GRUP NON-ABELIAN YANG ABELIAN SECARA GRAFIS

SKRIPSI

MICHELLE PURWAGANI

PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA

DEPARTEMEN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS AIRLANGGA

2012

GRUP NON-ABELIAN YANG ABELIAN SECARA GRAFIS

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains bidang Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga

Oleh:
MICHELLE PURWAGANI
NIM. 080810571

Tanggal Lulus : 18 Juni 2012

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Inna Kuswandari, Dra., M.Si.	**Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si.**
NIP. 196609051991022001	**NIP. 196412241991022001**

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul	**:**	**Grup Non-Abelian Yang Abelian Secara Grafis**
Penyusun	**:**	**Michelle Purwagani**
NIM	**:**	**080810571**
Pembimbing I	**:**	**Inna Kuswandari, Dra., M.Si.**
Pembimbing II	**:**	**Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si.**
Tanggal Ujian	**:**	**18 Juni 2012**

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Inna Kuswandari, Dra., M.Si.	**Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si.**
NIP. 196609051991022001	**NIP. 196412241991022001**

Mengetahui:

Ketua Program Studi S-1 Matematika,

Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

Dr. Miswanto,M.Si.

NIP. 196802041993031002

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penyusun panjatkan puji syukur kepada Tuhan Yesus atas kasih dan karunia-Nya penyusun dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya. Penyusun membuat skripsi dengan judul "Grup Non-Abelian Yang Abelian Secara Grafis" ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains bidang Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.

Dalam pembuatan skripsi ini, penyusun mengucapkan terima kasih kepada Inna Kuswandari, Dra., M.Si. dan Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si. yang telah bersedia menjadi dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan arahan yang berkaitan dengan penyusunan skripsi ini.

Dalam pembuatan skripsi ini, penyusun juga mendapatkan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penyusun juga ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Miswanto, M.Si. selaku ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan motivasi kepada penyusun untuk dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
2. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si selaku dosen penguji dan Ketua KBK Aljabar Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan bekal ilmu, serta bersedia memberikan arahan kepada penyusun sehingga penyusun dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

3. Dr. Moh. Imam Utoyo selaku dosen penguji yang telah memberikan banyak masukan kepada penyusun untuk kesempurnaan skripsi ini.
4. Auli Damayanti, S.Si., M.Si selaku dosen wali dari penyusun yang telah memberikan perhatian kepada penyusun mulai dari penyusun menjadi mahasiswa baru hingga saat ini.
5. Semua dosen di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penyusun selama masa perkuliahan sehingga penyusun mempunyai fondasi yang baik untuk menyelesaikan skripsi ini.
6. Professor Kathryn Weld yang sangat ramah dan bersedia meluangkan waktu untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan dari penyusun mengenai papernya yang berjudul "*Graphically Abelian Groups*".
7. Papi, mami, dan adik penyusun (Michael) yang telah memberikan motivasi, dukungan, dan doa agar penyusun dapat menyelesaikan skripsi dengan baik dan tepat waktu.
8. Teman-teman Golden Princess (Dinda, Lina, Dyah, Rika, Ragil, Dilfi, Mita, Vita, Tika, dan Lia) yang setia menemani penyusun selama masa perkuliahan dan telah memberikan bantuan, dukungan, dan semangat kepada penyusun untuk dapat segera menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Terima kasih juga kepada Julianti atas motivasi dan dukungannya, Citra beserta semua teman UK3 UNAIR, dan teman-teman prodi Matematika angkatan 2008 yang lain atas kebersamaan dan kekompakkan selama kurang lebih empat tahun ini.

9. Yessy Yosephine, Dra. serta murid-murid penyusun di SMA Katolik Karitas III yang senantiasa memberikan doa dan dukungan agar penyusun segera menyelesaikan skripsi penyusun dan mendapatkan nilai yang terbaik.

Tiada gading yang tak retak. Oleh karena itu, penyusun memohon saran dan kritik yang membangun dari semua pihak untuk perbaikan penyusun di masa mendatang. Penyusun juga memohon maaf apabila ada kata-kata yang kurang berkenan di hati para pembaca. Akhir kata, penyusun mengucapkan terima kasih atas perhatiannya.

Surabaya, Juli 2012

Penyusun

Michelle Purwagani, 2012, Grup Non-Abelian Yang Abelian Secara Grafis, Skripsi ini di bawah bimbingan Inna Kuswandari, Dra., M.Si. dan Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si., Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

ABSTRAK

Suatu grup G merupakan grup abelian secara grafis jika pemetaan yang mengawankan setiap elemen dari grup G ke inversnya merupakan automorfisma dari setiap graf Cayley atas G. Akibatnya, setiap grup abelian pasti merupakan grup abelian secara grafis. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menunjukkan karakterisasi grup non-abelian yang abelian secara grafis. Dengan mengkaji sifat-sifat grup dan graf, khususnya graf Cayley, serta automorfisma pada grup dan graf, dapat ditunjukkan bahwa grup G merupakan grup yang abelian secara grafis jika dan hanya jika semua himpunan bagian Cayley dari G merupakan himpunan bagian normal, G yang terseimbangkan, dan setiap elemen dari G tetap atau terbalik oleh konjugasi. Lebih lanjut, jika G merupakan abelian secara grafis, maka G merupakan grup Hamiltonian, dan untuk $a, b \in G$ yang merupakan pasangan elemen tidak komutatif, $\langle a, b \rangle$ merupakan grup Quarternion.

Kata kunci: Grup, abelian secara grafis, graf, graf Cayley, grup Hamiltonian, grup Quarternion.

Michelle Purwagani, 2012, Non-Abelian Group Which Is Graphically Abelian, This *skripsi* is under the guidance of Inna Kuswandari, Dra., M.Si. and Yayuk Wahyuni, Dra., M.Si., Mathematics Department of Science and Technology Faculty, Airlangga University

ABSTRACT

A group G is graphically abelian if the map that pairs each element of the group G to its inverse is an automorphism of every Cayley graph of G. So, all abelian groups are graphically abelian. The purpose of this research is to show the characterization of non-abelian group which is graphically abelian group. By reviewing the properties of groups and graphs, especially Cayley graph, also automorphism of group and automorphism of graph, we can show that G is graphically abelian if and only if all of its Cayley subsets are normal, G is balanced group, and each element of G is either fixed or inverted by conjugation. Furthermore, if G is graphically abelian group, then G is Hamiltonian, and let $a, b \in G$ be a pair of non-commuting elements, then $\langle a, b \rangle$ is Quarternion group.

Keywords: Group, graphically abelian, graph, Cayley graph, Hamiltonian group, Quarternion group.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam struktur aljabar, grup adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma grup, yaitu: ketertutupan, asosiatif, mempunyai elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Contoh grup adalah himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan $+$, yang dinotasikan sebagai $(\mathbb{Z}, +)$. Lebih lanjut, jika suatu grup bersifat komutatif, maka grup tersebut dinamakan grup abelian (grup komutatif). Sebagai contoh grup abelian adalah $(\mathbb{Z}, +)$. Salah satu contoh grup non-abelian adalah himpunan matriks persegi berukuran $n \times n$ atas bilangan real $\mathbb{R}$, dinotasikan dengan $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tanpa matriks singular dengan operasi biner perkalian matriks.

Dalam teori graf, graf H didefinisikan sebagai suatu himpunan berhingga $V(H)$ yang tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik (*vertice*), serta himpunan $E(H)$ yang elemen-elemennya merupakan pasangan tak terurut dua titik yang berbeda dari $V(H)$ dan disebut garis (*edge*). Salah satu jenis graf adalah graf Cayley. Graf Cayley yang dinotasikan dengan $Cay(G, S)$ adalah graf dengan himpunan titik-titiknya adalah elemen-elemen dari grup berhingga G dan $g, h \in V(Cay(G, S))$ terhubung dengan garis jika dan hanya jika $h = gs$ untuk suatu $s \in S$. S merupakan himpunan bagian Cayley, yaitu himpunan bagian dari G dengan syarat elemen identitas di G tidak terdapat di S, serta $S = S^{-1}$. Jika S membangkitkan grup G, maka graf Cayley $Cay(G, S)$ yang dihasilkan adalah graf terhubung. Jika S tidak membangkitkan grup G, maka jumlah graf Cayley yang terbentuk ada sebanyak himpunan bagian Cayleynya dan memungkinkan adanya graf Cayley yang tidak terhubung. Yang menarik untuk dibahas adalah jika S tidak membangkitkan grup G. Karena kondisi ini mengakibatkan jenis graf Cayleynya lebih bervariasi.

Dari pengertian tentang grup dan graf Cayley di atas, Richard Goldstone dan Kathryn Weld dalam jurnalnya yang berjudul *Graphically Abelian Groups* (2010) mendefinisikan grup abelian secara grafis. Suatu grup G adalah grup abelian secara grafis jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan automorfisma pada setiap graf Cayley atas G. Karena suatu grup G adalah grup abelian jika dan hanya jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan suatu automorfisma grup, maka automorfisma grup tersebut akan menyebabkan automorfisma graf pada graf Cayley $Cay(G,S)$. Akibatnya, semua grup abelian adalah grup abelian secara grafis. Oleh sebab itu, yang menarik untuk dibahas adalah grup non-abelian, contohnya grup Quarternion. Grup Quarternion didefinisikan sebagai suatu grup yang isomorfis terhadap suatu grup G dengan 8 elemen yang dibangun oleh dua elemen yaitu $a, b \in G$ dan memenuhi $a^4 = e$, $bab^{-1} = a^{-1}$, dan $a^2 = b^2$. Yang dikaji adalah karakteristik suatu grup non-abelian yang abelian secara grafis, secara khusus akan dibahas grup Quarternion sebagai contoh.

Topik yang akan dibahas pada skripsi ini bukanlah sesuatu yang baru. Penyusun mengambil topik ini dari jurnal yang berjudul *Graphically Abelian Groups*, ditulis oleh Richard Goldstone dan Kathryn Weld pada tahun 2010.

Penyusun menuliskan kembali dengan bahasa sendiri dilengkapi dengan contoh, serta melengkapi pembuktian dari beberapa teorema yang ada.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana karakterisasi grup non-abelian yang abelian secara grafis?

1.3 Tujuan

Menunjukkan karakterisasi grup non-abelian yang abelian secara grafis.

1.4 Manfaat

Manfaat dalam keilmuan adalah mengetahui karakterisasi dari grup non-abelian yang abelian secara grafis. Dalam hal ini, grup non-abelian yang dibahas adalah grup Quarternion. Grup Quaternion ditemukan oleh Sir William Rowan Hamilton pada tahun 1843. Pada tahun 1984, P.R. Girard dalam jurnalnya yang berjudul *The Quarternion Group and Modern Physics* menunjukkan hubungan antara grup-grup kovarian utama dalam Fisika, seperti grup Lorentz, dengan grup Quarternion. P.R. Girard juga menyajikan beberapan penerapan dari grup Quarternion dalam bidang Fisika, salah satunya adalah Teori Relativitas Khusus.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan disajikan beberapa definisi, sifat, dan teorema yang akan digunakan untuk pembahasan berikutnya.

2.1 Grup

Definisi 2.1 Misalkan S himpunan yang tidak kosong. **Operasi biner** $*$ pada himpunan S adalah sebuah fungsi atau pemetaan dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, elemen hasil pemetaan $*((a, b)) \in S$ dinotasikan dengan $a * b$.

(Fraleigh, 2003)

Definisi 2.2 Suatu **grup** adalah himpunan tidak kosong G yang tertutup terhadap satu operasi biner $*$, dinotasikan dengan $(G,*)$, serta memenuhi beberapa aksioma sebagai berikut:

(i) Sifat asosiatif dari $*$, yakni untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

(ii) Terdapat elemen identitas e di G, sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G, e * x = x * e = x$

(iii) Setiap elemen dari grup G mempunyai invers, yakni untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

(Fraleigh, 2003)

Contoh:

a. Himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}^+$ dengan operasi biner penjumlahan bukanlah sebuah grup karena tidak terdapat elemen identitas di $\mathbb{Z}^+$. Misalkan diambil $2 \in \mathbb{Z}^+$, maka $2 + e = 2$, sehingga $e = 0$, tetapi $0 \notin \mathbb{Z}^+$.

b. Himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$), himpunan bilangan rasional ($\mathbb{Q}$), himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$), dan himpunan bilangan kompleks ($\mathbb{C}$), dengan operasi penjumlahan adalah grup.

Untuk sebarang himpunan berhingga, berlakunya aksioma grup dapat dilihat dengan mengoperasikan setiap elemennya dan mendaftarnya dalam suatu tabel, yang dinamakan **tabel Cayley**.

Contoh:

Himpunan $Z_3 = \{0,1,2\}$ dengan operasi penjumlahan bilangan bulat modulo 3 dinyatakan sebagai berikut:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Dari tabel di atas, terlihat bahwa $(Z_3\,,+)$ bersifat tertutup terhadap operasi binernya, bersifat asosiatif (setiap baris dan setiap kolom memuat setiap elemen dari grup tepat satu), mempunyai elemen identitas: 0, dan setiap elemennya memiliki invers: $0^{-1} = 0,\ 1^{-1} = 2,\ 2^{-1} = 1.$ Jadi, $(Z_3, +)$ merupakan grup.

Definisi 2.3 Suatu grup $(G,*)$ adalah **grup abelian** jika operasi binernya bersifat komutatif, yakni untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

(Fraleigh, 2003)

Selanjutnya, untuk mempermudah penulisan, maka untuk setiap $a, b \in G, a * b$ dapat ditulis ab, $(G,*)$ dapat ditulis sebagai grup G, dan pengoperasian antar elemen dari grup G ditulis sebagai perkalian. Karena grup abelian bersifat komutatif, maka suatu grup berhingga G adalah grup abelian jika dan hanya jika elemen yang muncul dalam tabel Cayley simetris sepanjang elemen diagonalnya.

Contoh:

1. Himpunan bilangan real dengan operasi penjumlahan, dinotasikan $(\mathbb{R}, +)$, merupakan grup abelian.
2. Grup Quarternion Q_8 didefinisikan sebagai himpunan $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dengan operasi perkalian $\cdot$ yang mengikuti ketentuan berikut:

   (i) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, untuk setiap $a \in Q_8$

   (ii) $(-1) \cdot (-1) = 1$

   (iii) $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$, untuk setiap $a \in Q_8$

   (iv) $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$

   (v) $i \cdot j = k$

   (vi) $j \cdot k = i$

   (vii) $k \cdot i = j$

   (viii) $j \cdot i = -k$

   (ix) $k \cdot j = -i$

   (x) $i \cdot k = -j$

   Q_8 adalah grup non-abelian.

(Dummit and Foote, 2004)

Hal ini diperlihatkan dalam tabel Cayley berikut:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{-i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{-j}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{-k}$
$\mathbf{1}$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
$\mathbf{-1}$	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
$\boldsymbol{i}$	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$\boldsymbol{-i}$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$\boldsymbol{-j}$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
$\boldsymbol{k}$	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$\boldsymbol{-k}$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Berdasarkan tabel Cayley tersebut, terlihat bahwa himpunan $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ dengan operasi $\cdot$ memenuhi aksioma berikut:

(i) Bersifat tertutup terhadap operasi binernya

(ii) Bersifat asosiatif (setiap baris dan setiap kolom memuat setiap elemen dari grup tepat satu)

(iii) Mempunyai elemen identitas, yaitu: 1

(iv) Setiap elemennya memiliki invers:

$1^{-1} = 1,\ (-1)^{-1} = -1,\ i^{-1} = -i,\ (-i)^{-1} = i,\ j^{-1} = -j,\ (-j)^{-1} = j,$

$k^{-1} = -k,\ (-k)^{-1} = k$

Sehingga, Q_8 dengan operasi perkalian $\cdot$ merupakan grup. Dapat dilihat bahwa hasil operasi elemen Q_8 terhadap $\cdot$ pada tabel Cayley tersebut tidak simetris, maka Q_8 bukan merupakan grup abelian. ■

Definisi 2.4 Jika G adalah grup, maka **order dari grup** G, yang dinotasikan $|G|$, adalah banyaknya elemen dari grup G.

(Fraleigh, 2003)

Definisi 2.5 Misalkan G adalah grup dan $x \in G$. **Order dari elemen** x yang dinotasikan $|x|$, adalah bilangan bulat positif terkecil n yang menyebabkan $x^n = e$. Jika tidak ada n yang menyebabkan $x^n = e$, maka order dari x adalah tidak berhingga.

(Fraleigh, 2003)

Teorema 2.6 Misalkan G adalah grup dan $a, b, c \in G$. Hukum kanselasi kiri dan kanan berlaku dalam G, yaitu:

(i) jika $ab = ac$, maka $b = c$, dan

(ii) jika $ba = ca$, maka $b = c$.

(Fraleigh, 2003)

Teorema 2.7 Jika $(G,*)$ suatu grup, maka G memenuhi sifat berikut:

(i) Grup G hanya memuat satu elemen identitas

(ii) Setiap elemen di G mempunyai invers yang tunggal

(iii) Untuk setiap $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$

(iv) Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$

(Dummit and Foote, 2004)

Teorema 2.8 Misalkan G suatu grup non-abelian dan $a, b \in G$. Jika $ab \neq ba$, maka $ab^{-1} \neq b^{-1}a$.

Bukti: Diketahui $ab \neq ba$. Andaikan $ab^{-1} = b^{-1}a$. Kedua ruas dikalikan dari sisi kanan dengan b, diperoleh $a = b^{-1}ab$. Setelah itu, $a = b^{-1}ab$ dikalikan dari sisi kiri dengan b, sehingga diperoleh $ba = ab$. Hal ini kontradiksi dengan $ab \neq ba$. ■

Definisi 2.9 Misalkan G suatu grup dan H himpunan bagian tidak kosong dari G. H disebut **subgrup** dari G jika H dengan operasi biner yang sama pada G juga merupakan grup. Jika G adalah grup, maka subgrup $\{e\}$ adalah **subgrup trivial** dari G. Subgrup $\{e\}$ dan G itu sendiri adalah **subgrup tidak sejati** dari G.

(Fraleigh, 2003)

Contoh: $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan. Bila diambil himpunan $3\mathbb{Z} = \{3n | n \in \mathbb{Z}\}$, jelas bahwa $3\mathbb{Z} \neq \emptyset$ dan $(3\mathbb{Z}, +)$ adalah suatu grup. Karena $3\mathbb{Z}$ adalah himpunan bagian tidak kosong dari $\mathbb{Z}$, maka $3\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Dari Definisi 2.9, untuk melihat apakah suatu himpunan bagian dari suatu grup merupakan subgrup, maka harus ditunjukkan bahwa semua aksioma grup berlaku pada himpunan bagian tersebut. Oleh sebab itu, diberikan Teorema 2.10 yang memberi kemudahan dalam menunjukkan suatu subgrup.

Teorema 2.10 Misalkan H himpunan bagian dari grup G. H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika H tidak kosong dan $xy^{-1} \in H$, untuk setiap $x \in H$ dan $y \in H$.

(Dummit and Foote, 2004)

Definisi 2.11 Misalkan G adalah grup dan S adalah himpunan bagian dari G. S **membangun grup** G jika setiap elemen dari G dapat dinyatakan sebagai pergandaan dari elemen-elemen S dan invers elemen-elemennya.

Jika S membangun grup G, dinotasikan $G = \langle S \rangle$.

(Dummit and Foote, 2004)

Selanjutnya, misalkan $S = \{a, b, c\}$merupakan himpunan bagian dari grup G yang membangun G, notasi $G = \langle S \rangle$ dapat ditulis sebagai $\langle a, b, c \rangle$.

Contoh: Grup Quarternion dibangun oleh dua elemen, yaitu i dan j sebab setiap elemen dari grup Quarternion dapat dinyatakan sebagai pergandaan dari i dan j sebagai berikut:

$1 = i^4 = j^4,\ \ -1 = i^2 = j^2,\ \ i = i^1,\ \ -i = i^{-1} = i^3,\ \ j = j^1,\ \ -j = j^{-1} = j^3,$

$k = ij,\ -k = -(ij) = ji.$

Definisi 2.12 Misalkan H subgrup dari G dan $a \in G$. Himpunan bagian $aH = \{ah | h \in H\}$ dari G dinamakan **koset kiri** atas H, sedangkan himpunan bagian $Ha = \{ha | h \in H\}$ dinamakan **koset kanan** atas H.

(Fraleigh, 2003)

Teorema 2.13 (Teorema Lagrange) Misalkan H adalah subgrup dari grup berhingga G, maka order dari H membagi order dari G.

(Fraleigh, 2003)

Definisi 2.14 Jika H adalah subgrup dari grup G, maka H adalah **subgrup normal** dari grup G jika memenuhi salah satu dari pernyataan berikut:

(i) $xH = Hx$, untuk setiap $x \in G$

(ii) $xHx^{-1} = H$, untuk setiap $x \in G$

(iii) $xhx^{-1} \in H$, untuk setiap $x \in G$ dan $h \in H$

H subgrup normal dari grup G dinotasikan dengan $H \lhd G$.

(Fraleigh, 2003)

Akibatnya, jika G adalah grup abelian, maka semua subgrup dari G adalah subgrup normal karena koset kanan sama dengan koset kiri.

Definisi 2.15 Misalkan S adalah himpunan bagian dari grup G. S merupakan **himpunan bagian normal** dari G jika untuk setiap $g \in G$, memenuhi $gSg^{-1} = S$ atau $gsg^{-1} \in S$ untuk setiap $s \in S$.

(Goldstone and Weld, 2010)

Contoh: Misalkan $\{0,1\}$ adalah himpunan bagian dari grup $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ dengan operasi penjumlahan bilangan bulat modulo 4. Akan ditunjukkan bahwa $\{0,1\}$ merupakan himpunan bagian normal dari Z_4 melalui Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Hasil operasi gsg^{-1} untuk $g \in Z_4$ dan $s \in \{0,1\}$

$g \in Z_4$	$s \in \{0,1\}$	$g^{-1} \in Z_4$	gsg^{-1}
0	0	0	0
1	0	3	0
2	0	2	0
3	0	1	0
0	1	0	1
1	1	3	1
2	1	2	1
3	1	1	1

Karena untuk setiap $g \in Z_4$ dan $s \in \{0,1\}$ berlaku $g^{-1} \in \{0,1\}$, maka $\{0,1\}$ merupakan himpunan bahian normal dari Z_4.

Teorema 2.16 Jika H dan K masing-masing merupakan himpunan bagian normal dari grup G, maka $H \cup K$ merupakan himpunan bagian normal dari grup G.

Bukti: Misalkan G grup. Misalkan H dan K masing-masing merupakan himpunan bagian normal dari grup G. Karena H dan K masing-masing merupakan himpunan bagian normal dari grup G, berdasarkan Definisi 2.15, $ghg^{-1} \in H$ untuk setiap

$g \in G$ dan $h \in H$, dan $gkg^{-1} \in K$ untuk setiap $g \in G$ dan $k \in K$. Diambil sebarang $g \in G$ dan $m \in H \cup K$, terdapat tiga kemungkinan, yaitu:

(i) H dan K merupakan dua buah himpunan yang saling asing dan misalkan $m \in H$, maka $gmg^{-1} \in H \subset H \cup K$.

(ii) H dan K merupakan dua buah himpunan yang saling asing dan misalkan $m \in K$, maka $gmg^{-1} \in K \subset H \cup K$.

(iii) H dan K merupakan dua buah himpunan yang tidak saling asing dan misalkan $m \in H \cap K$, maka $gmg^{-1} \in H \cap K$, akibatnya $gmg^{-1} \in H \cup K$.

Karena $gmg^{-1} \in H \cup K$, untuk setiap $g \in G$ dan $m \in H \cup K$, berdasarkan Definisi 2.15, $H \cup K$ merupakan himpunan bagian normal dari grup G. ■

Definisi 2.17 Suatu grup non-abelian yang setiap subgrupnya adalah subgrup normal disebut sebagai **grup Hamiltonian**.

(Goldstone et al, 2010)

Sebagai contoh, grup Quarternion adalah grup Hamiltonian. Sebelumnya telah dijelaskan bahwa grup Quarternion dibangun oleh i dan j, dinotasikan dengan $Q_8 = \langle i, j \rangle$. Semua subgrup dari grup Quarternion adalah:

1. $H_1 = \langle 1 \rangle = \{1\}$ yang merupakan subrup trivial dari grup Quarternion.
2. $H_2 = \langle -1 \rangle = \{1, -1\}$
3. $H_3 = \langle i \rangle = \langle -i \rangle = \{i, -i, 1, -1\}$
4. $H_4 = \langle j \rangle = \langle -j \rangle = \{j, -j, 1, -1\}$
5. $H_5 = \langle k \rangle = \langle -k \rangle = \{k, -k, 1, -1\}$
6. $H_6 = \langle i, j \rangle = \langle i, k \rangle = \langle j, k \rangle = Q_8$ yang merupakan subgrup tidak sejati dari grup Quarternion.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa semua subgrup dari grup Quarternion merupakan subrup normal.

1. Karena $H_1 = \langle 1 \rangle = \{1\}$ merupakan subgrup trivial dari Q_8, sehingga untuk setiap $g \in Q_8$, berlaku $g\langle 1 \rangle = \{g\}$ dan $\langle 1 \rangle g = \{g\}$, sehingga $g\langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle g$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.14 peryataan (i), $\langle 1 \rangle \lhd Q_8$.
2. Karena $H_2 = \langle -1 \rangle = \{1, -1\}$, sehingga untuk setiap $g \in Q_8$, berlaku: $g\langle -1 \rangle = \{g, -g\}$ dan $\langle -1 \rangle g = \{g, -g\}$, maka $g\langle -1 \rangle = \langle -1 \rangle g$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.14 peryataan (i), $\langle -1 \rangle \lhd Q_8$.
3. Karena $H_3 = \langle i \rangle = \{1, -1, i, -i\}$, sehingga untuk setiap $g \in Q_8$, berlaku: $g\langle i \rangle = \{g, -g, gi, -gi\}$ dan $\langle i \rangle g = \{g, -g, ig = -gi, -ig = gi\}$, maka $g\langle i \rangle = \langle i \rangle g$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.14 peryataan (i), $\langle i \rangle \lhd Q_8$.
4. Karena $H_4 = \langle j \rangle = \{1, -1, j, -j\}$, sehingga untuk setiap $g \in Q_8$, berlaku: $g\langle j \rangle = \{g, -g, gj, -gj\}$ dan $\langle j \rangle g = \{g, -g, jg = -gj, -jg = gj\}$, maka $g\langle j \rangle = \langle j \rangle g$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.14 peryataan (i), $\langle j \rangle \lhd Q_8$.
5. Karena $H_5 = \langle k \rangle = \{1, -1, k, -k\}$, sehingga untuk setiap $g \in Q_8$, berlaku: $g\langle k \rangle = \{g, -g, gk, -gk\}$ dan$kg = \{g, -g, kg = -gk, -kg = gk\}$, maka $g\langle k \rangle = \langle k \rangle g$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.14 peryataan (i), $\langle k \rangle \lhd Q_8$.
6. Karena $H_6 = Q_8$ merupakan subgrup tidak sejati dari Q_8, maka untuk setiap $g \in Q_8$dan $h \in H_6 = Q_8$, berlaku: $ghg^{-1} \in Q_8$. Akibatnya, berdasarkan menggunakan Definisi 2.14 peryataan (iii), maka $\langle i, j \rangle \lhd Q_8$.

Karena setiap subgrup dari Q_8 merupakan subgrup normal, maka grup Quarternion Q_8 merupakan grup Hamiltonian.

Selanjutnya, penemuan Richard Dedekind pada tahun 1887 menjelaskan bahwa setiap grup Hamiltonian pasti memuat suatu subgrup yang isomorfis dengan grup Quarternion. Kemudian, pada tahun 1933, Reinhold Baer melengkapi klasifikasi dari grup Hamiltonian tersebut yang disajikan dalam Teorema 2.18 berikut sebagai definisi alternatif.

Teorema 2.18 (Teorema Baer) Suatu grup non-abelian G adalah grup Hamiltonian jika dan hanya jika $G \cong Q_8 \times A \times B$, dengan A adalah grup abelian yang setiap elemennya (selain elemen identitas) beroder dua dan B adalah grup abelian yang setiap elemennya berorder gasal.

(Goldstone et al, 2010)

Contoh: Salah satu contoh grup Hamiltonian adalah grup $Q_8 \times Z_2 \times Z_3 = \{(a,b,c)|a \in Q_8, b \in Z_2, c \in \mathbb{Z}_3\}$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai $(a,b,c) * (p,q,r) = (a.p, b+q, c+r)$ dengan elemen identitas $(1,0,0)$. Karena Z_2 adalah grup abelian yang setiap elemennya (selain elemen identitas) beroder dua dan Z_3 adalah grup abelian yang setiap elemennya berorder gasal, maka berdasarkan Teorema 2.18, $Q_8 \times Z_2 \times Z_3$ merupakan grup Hamiltonian.

Definisi 2.19 Misalkan G grup, dan $g \in G$.

(i) Elemen g dikatakan **tetap oleh konjugasi** (*fixed by conjugation*) terhadap h jika $gh = hg$, untuk setiap $h \in G$

(ii) Elemen g dikatakan **terbalik oleh konjugasi** (*inverted by conjugation*) terhadap h jika $gh = hg^{-1}$, untuk setiap $h \in G$

(Goldstone and Weld, 2010)

Definisi 2.20 Suatu grup G merupakan **grup yang terseimbangkan** (*balanced group*) jika untuk setiap elemen $a, b \in G$ memenuhi kondisi: a dan b komutatif atau $a^2 = b^2$.

(McCabe and Weld, 2009)

Contoh:

a. Semua grup abelian G merupakan grup yang terseimbangkan karena untuk setiap elemen $a, b \in G$ memenuhi a dan b komutatif.

b. Grup Quarternion merupakan grup yang terseimbangkan. (Bukti grup Quarternion sebagai grup yang terseimbangkan akan dibahas pada Bab IV.)

Definisi 2.21 Suatu **homomorfisma dari grup** G_1 ke grup G_2 adalah pemetaan f dari G_1 ke G_2, yang memenuhi: $f(xy) = f(x)f(y)$, untuk setiap $x, y \in G_1$. Suatu **isomorfisma grup** adalah homomorfisma yang bijektif. Jika $f: G_1 \to G_2$ merupakan isomorfisma, maka G_1 dikatakan isomorfis dengan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$. Suatu **automorfisma pada grup** G adalah suatu isomorfisma pada grup G.

(Dummit and Foote, 2004)

Contoh: $\mathbb{R}^+$merupakan grup dari semua bilangan real positif terhadap operasi perkalian dan $\mathbb{R}$ merupakan grup dari semua bilangan real terhadap operasi penjumlahan. Didefinisikan pemeraan $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = \log(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$. Karena untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$berlaku $f(x.y) = \log(x.y) = \log x + \log y = f(x) + f(y)$, maka f merupakan homomorfisma.

Definisi 2.22 Grup Quarternion merupakan grup yang isomorfis terhadap suatu grup G dengan 8 elemen yang dibangun oleh dua elemen yaitu $a, b \in G$ dan memenuhi $a^4 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, dan $a^2 = b^2$.

(Goldstone and Weld, 2010)

Teorema 2.23 Suatu grup G adalah grup abelian jika dan hanya jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ adalah suatu automorfisma grup.

(Goldstone and Weld, 2010)

Bukti: Diketahui G grup abelian, akan ditunjukkan bahwa pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ adalah suatu automorfisma grup. Karena G grup abelian, maka untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $ab = ba$.

Misalkan $f: G \longrightarrow G$ dengan $f(g) = g^{-1}$, untuk setiap $g \in G$.

(i) Untuk setiap $a, b \in G,\ f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Karena G grup abelian, maka $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Sehingga, $f(ab) = f(a)f(b)$. Akibatnya, f merupakan homomorfisma pada G.

(ii) Selanjutnya, diambil sebarang $a \in G$, karena G grup, maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $f(a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} = a$. Jadi, f merupakan homomorfisma yang surjektif.

(iii) Diambil sebarang $a, b \in G$ dengan $f(a) = f(b)$. Akan ditunjukkan bahwa $a = b$. Karena $f(a) = f(b)$, maka $a^{-1} = b^{-1}$. Kemudian kedua ruas dikalikan dengan a dari sisi kiri sehingga $e_G = ab^{-1}$. Selanjutnya, kedua ruas dikalikan dengan b dari sisi kanan, sehingga diperoleh $b = a$. Oleh sebab itu, f adalah homomorfisma yang injektif.

Dari (iii) dan (iv) diperoleh bahwa f merupakan homomorfisma yang bijektif. Karena f merupakan homomorfisma yang bijektif pada grup G, maka f merupakan automorfisma grup.

Sebaliknya, jika pemetaan$f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ adalah suatu automorfisma grup, maka akan ditunjukkan bahwa G adalah grup abelian.

Untuk setiap $a, b \in G,$ berlaku:

$$ab = (b^{-1}a^{-1})^{-1} \text{ (berdasarkan Teorema 2.7 bagian iv)}$$

$$= f(b^{-1}a^{-1})$$

$$= f(b^{-1})f(a^{-1}) \text{ karena } f \text{ homomorfisma}$$

$$= (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = ba$$

Karena untuk setiap $a, b \in G,\ ab = ba$, maka G adalah grup abelian.

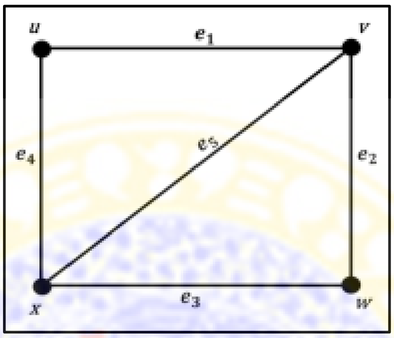
Jadi, terbukti bahwa suatu grup G adalah grup abelian jika dan hanya jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ adalah suatu automorfisma grup. ■

2.2 Graf

Definisi 2.24 Graf *H* didefinisikan sebagai himpunan berhingga V(*H*) yang tak kosong dengan elemen-elemennya disebut titik / *vertice*, serta himpunan E(*H*) yang elemen-elemennya merupakan pasangan tak terurut 2 elemen yang berbeda dari V(*H*) dan disebut garis / *edge*. Elemen dari V(*H*) dinotasikan dengan *v* dan elemen dari E(*H*) dinotasikan dengan (*u,v*), dan untuk mempersingkat penulisan, (*u,v*)∈ E(*H*) dapat ditulis sebagai *uv*. Jika *e*=*uv* adalah garis pada graf *H* , maka u dikatakan terhubung (*adjacent*) dengan v, dan e dikatakan insiden terhadap u maupun v, sedangkan e_1 dikatakan terhubung dengan e_2 jika e_1 dan e_2 insiden pada satu titik.

(Godsil and Royle, 2001)

Contoh:



Gambar 2.1 Graf *H*

Pada Gambar 2.1: Graf H terdiri dari $V(H) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Garis e_1 insiden terhadap titik u dan titik v. Titik u dan titik v terhubung (*adjacent*).

Pada pembahasan selanjutnya, penulisan garis pada suatu graf *H* akan digunakan notasi $(u,v) \in E(H)$.

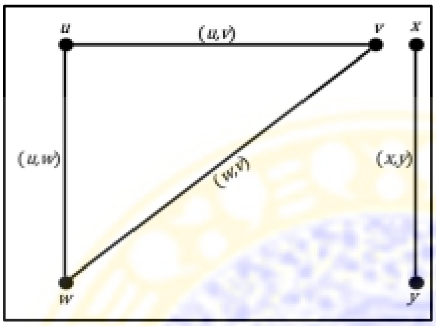
Definisi 2.25 Perjalanan (*walk*) adalah barisan bergantian titik dan garis, yang diawali dan diakhiri dengan titik, sehingga setiap garis insiden dengan dua titik terdekat sebelum dan sesudahnya pada barisan itu. **Lintasan** (*path*) adalah suatu perjalanan (*walk*) yang semua titiknya berbeda.

(Godsil and Royle, 2001)

Definisi 2.26 Graf H dikatakan **terhubung** jika setiap dua titik u, v di H dihubungkan oleh sekurang-kurangnya satu lintasan (*path*).

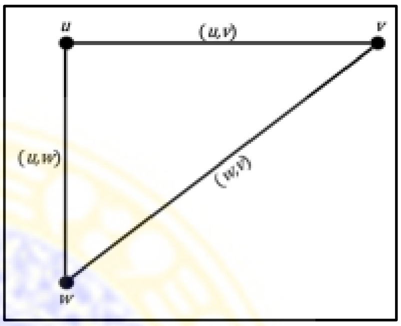
(Godsil and Royle, 2001)

Contoh:



Gambar 2.2

Graf *A* tidak terhubung



Gambar 2.3

Graf *B* terhubung

Pada Gambar 2.2, graf A adalah graf tidak terhubung, sedangkan pada Gambar 2.3, graf B adalah graf terhubung.

Definisi 2.27 Himpunan bagian Cayley S dari grup G adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu grup G dengan ketentuan $e \in G$, $e \notin S$ dan $S = S^{-1}$.

(Goldstone dan Weld, 2010)

Contoh: $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ merupakan grup dengan operasi penjumlahan bilangan modulo 5. Elemen identitas pada Z_5 adalah 0, dan invers dari setiap elemennya adalah $0^{-1} = 0$, $1^{-1} = 4$, $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$, dan $4^{-1} = 1$. Dibentuk $S = \{2,3\}$ himpunan bagian dari Z_5. $S = \{2,3\}$ merupakan himpunan bagian Cayley dari Z_5 karena $0 \in Z_5$, $0 \notin S$, $2 \in S$, $2^{-1} = 3 \in S$.

Definisi 2.28 Misalkan G suatu grup berhingga dengan elemen identitas e. Misalkan S adalah suatu himpunan bagian Cayley dari. **Graf Cayley** atas G, dinotasikan dengan $Cay(G, S)$, mempunyai syarat sebagai berikut:

(i) titik-titik dari $Cay(G, S)$ adalah elemen-elemen dari G.

(ii) $g, h \in V(Cay(G, S))$ terhubung dengan garis jika dan hanya jika $h = gs$ untuk suatu $s \in S$.

(Alspach, 2004)

Teorema 2.29 Misalkan G suatu grup berhingga dengan elemen identitas e dan S adalah himpunan bagian Cayley dari G. Misalkan $Cay(G, S)$ adalah suatu graf Cayley atas G, maka untuk setiap $g, h \in V(Cay(G, S))$, g dan h terhubung dengan garis jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$.

(Goldstone dan Weld, 2010)

Bukti: Akan dibuktikan bahwa Teorema 2.29 ekuivalen dengan Definisi 2.28, yaitu: $g, h \in V(Cay(G, S))$ dengan $h = gs$ untuk suatu $s \in S$ jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$. Untuk sebarang $g, h \in V(Cay(G, S))$, misalkan $h = gs$ untuk suatu $s \in S$, maka $g^{-1}h = g^{-1}(gs) = s \in S$. Sebaliknya, misalkan $g^{-1}h \in S$, berarti $g^{-1}h = s$ atau $g^{-1}h = s^{-1}$. Untuk $g^{-1}h = s$ jika dikalikan dengan g dari kiri, maka $gg^{-1}h = gs$, akibatnya $h = gs$, untuk setiap $s \in S$. Sedangkan, untuk $g^{-1}h = s^{-1}$ jika dikalikan dengan g dari kiri, maka $gg^{-1}h = gs^{-1}$, akibatnya $h = gs^{-1}$, untuk setiap $s^{-1} \in S$.

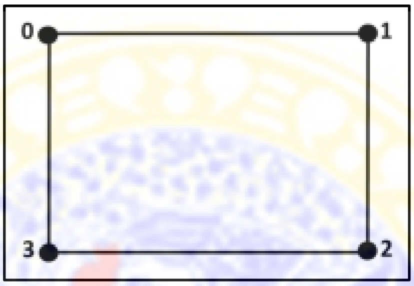
Berdasarkan Definisi 2.28 dan uraian di atas diperoleh:

(i) $g, h \in V(Cay(G, S))$ terhubung dengan garis jika dan hanya jika $h = gs$ untuk suatu $s \in S$

(ii) $h = gs$ untuk suatu $s \in S$ jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$

Sehingga $g, h \in V(Cay(G, S))$ terhubung dengan garis jika dan hanya jika $g^{-1}h \in S$. ■

Contoh: Misalkan diambil grup berhingga $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ dengan operasi penjumlahan modulo empat dan dipilih $S = \{1,3\}$, maka $Cay(\mathbb{Z}_4, \{1,3\})$ adalah:



Gambar 2.4 $\boldsymbol{Cay}(Z_4, \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\})$

Teorema 2.30 Graf Cayley $\boldsymbol{Cay(G, S)}$ terhubung jika dan hanya jika S membangun grup G.

(Alspach, 2004)

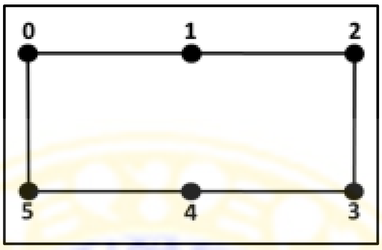
Contoh: Graf $Cay(Z_4, \{1,3\})$ pada Gambar 2.4 adalah graf Cayley terhubung karena $S = \{1,3\}$ membangun grup Z_4.

Definisi 2.31 Graf H_1 dan H_2 dikatakan isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f: V(H_1) \to V(H_2)$ sehingga untuk setiap $u, v \in V(H_1)$, maka: $(u, v) \in E(H_1) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(H_2)$. H_1 isomorfis dengan H_2 dinotasikan dengan $H_1 \cong H_2$. Automorfisma adalah isomorfisma pada graf H itu sendiri.

(Godsil and Royle, 2001)

Contoh: Misalkan diambil grup abelian berhingga $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dengan operasi penjumlahan modulo enam dan dipilih $S = \{1,5\}$. Berdasarkan Teorema

2.29, maka terdapat suatu automorfisma f, yang didefinisikan sebagai $f: Z_6 \to Z_6$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk setiap $g \in Z_6$. Sehingga, $f: Z_6 \to Z_6$ dengan $f(g) = g^{-1}$ menghasilkan: $f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 2, f(5) = 1$. Berikut adalah gambar graf Cayley Cay($Z_6, \{1,5\}$) :



Gambar 2.5 $\boldsymbol{Cay}(Z_6, \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\})$

Gambar 2.5 menunjukkan automorfisma pada graf Cay($Z_6, \{1,5\}$). Karena titik 0 dan titik 1 terhubung, maka titik 0 (titik $f(0)$)dan titik 5 (titik $f(1)$) juga terhubung. Karena titik 1 dan titik 2 terhubung, maka titik 5 (titik $f(1)$) dan titik 4 (titik $f(2)$) juga terhubung. Karena titik 2 dan titik 3 terhubung, maka titik 4 (titik $f(2)$) dan titik 3 (titik $f(3)$) juga terhubung.

2.3 Grup Abelian Secara Grafis

Definisi 2.32 Suatu grup G adalah **grup abelian secara grafis** jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan suatu automorfisma pada semua graf Cayley atas G.

(Goldstone dan Weld, 2010)

Teorema 2.33 Jika G adalah grup abelian, maka G merupakan grup abelian secara grafis.

(Goldstone dan Weld, 2010)

Bukti: Misalkan grup G adalah grup abelian**,** maka berdasarkan Teorema 2.23, pemetaan $f: G \rightarrow G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ adalah suatu automorfisma grup.

Misalkan S adalah himpunan bagian Cayley dari grup G. Diambil sebarang $s \in S$, maka $f(s) = s^{-1} \in S$. Sehingga $f(s) \in S$ untuk setiap $s \in S$.

Akan ditunjukkan bahwa automorfisma pada grup G, yaitu $f: G \rightarrow G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan automorfisma pada setiap graf Cayley atas G.

Misalkan diambil sebarang graf Cayley $Cay(G,S)$, dengan $g, h \in G$ dan $(g,h) \in E(Cay(G,S))$, maka berdasarkan Definisi 2.28, $h = gs$ untuk suatu $s \in S$. Karena f suatu automorfisma pada grup G, maka untuk setiap $g, h \in G$ berlaku $f(g) \in G$ dan $f(h) \in G$, $f(h) = f(gs) = f(g)f(s)$, untuk suatu $f(s) \in S$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.28, $(f(g), f(h)) \in E(Cay(G,S))$.

Sebaliknya, misalkan diambil sebarang graf Cayley $Cay(G,S)$ dengan $g, h \in G$. Karena f suatu automorfisma pada grup G, maka $f(g), f(h) \in G$. Misalkan $\big(f(g), f(h)\big) \in E\big(Cay(G,S)\big)$, akan ditunjukkan bahwa $(g,h) \in E(Cay(G,S))$. Karena $(f(g), f(h)) \in E(Cay(G,S))$, maka $(g^{-1}, h^{-1}) \in E(Cay(G,S))$. Berdasarkan Teorema 2.29, maka $(g^{-1})^{-1}h^{-1} = gh^{-1} \in S$. Karena $gh^{-1} \in S$, maka $gh^{-1} = s$ atau $gh^{-1} = s^{-1}$. Misalkan $gh^{-1} = s^{-1}$, kemudian kedua ruas dikalikan dengan h dari sisi kanan, maka akan diperoleh $g = s^{-1}h$. Selanjutnya, kedua ruas dikalikan dengan s dari sisi kiri, sehingga diperoleh $sg = h$. Karena G

adalah grup abelian, maka $sg = gs = h$. Karena $h = gs$ untuk suatu $s \in S$, maka berdasarkan Definisi 2.28, $(g, h) \in E(Cay(G, S))$. ■

Karena grup abelian pasti merupakan grup abelian secara grafis, maka yang akan dibahas pada skripsi ini adalah grup non-abelian.

BAB III

METODE PENULISAN

Skripsi ini merupakan hasil studi literatur dari jurnal yang berjudul *Graphically Abelian Groups*, ditulis oleh Richard Goldstone dan Kathryn Weld pada tahun 2010. Penyusun menuliskan kembali dengan bahasa sendiri dilengkapi dengan contoh, serta melengkapi pembuktian dari beberapa teorema yang ada.

Adapun metode penulisan yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Mengkaji literatur tentang grup dan graf, beserta sifat-sifatnya.
2. Mempelajari karakterisasi beberapa grup non-abelian, misalnya grup Quarternion.
3. Mempelajari tentang jenis-jenis graf, khususnya graf Cayley.
4. Mempelajari tentang automorfisma grup dan automorfisma graf.
5. Mempelajari definisi dan sifat grup abelian secara grafis.
6. Membuktikan teorema mengenai kriteria yang harus dipenuhi suatu grup agar merupakan grup abelian secara grafis, yaitu:
   - 6.1 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika semua himpunan bagian Cayleynya adalah himpunan bagian normal.
   - 6.2 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi.
   - 6.3 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika G grup yang terseimbangkan.

7. Membuktikan teorema mengenai sifat lebih lanjut dari suatu grup abelian secara grafis, yaitu:

   7.1 Jika G grup abelian secara grafis, maka G grup Hamiltonian.

   7.2 Misalkan G grup non-abelian yang abelian secara grafis dan misalkan $a, b \in G$ merupakan pasangan elemen yang tidak komutatif, maka subgrup $\langle a, b \rangle$ adalah grup Quarternion.

8. Membuktikan bahwa grup Quarternion memenuhi kriteria sebagai grup non-abelian yang abelian secara grafis.

BAB IV

PEMBAHASAN

Suatu grup G adalah grup abelian secara grafis jika pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan suatu automorfisma pada semua graf Cayley atas G. Karena pada Teorema 2.33 telah dibuktikan bahwa semua grup abelian merupakan grup abelian secara grafis, maka grup yang dibahas pada pembahasan ini adalah grup non abelian. Salah satu contoh grup non-abelian yang abelian secara grafis adalah grup Q_8. Berikut akan ditunjukkan bahwa Q_8 merupakan grup non-abelian yang abelian secara grafis berdasarkan Definisi 2.32, yaitu jika pemetaan $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma pada semua graf Cayley atas grup Q_8. Jumlah graf Cayley atas grup Q_8 ada sebanyak himpunan bagian Cayleynya. Semua himpunan bagian Cayley dari Q_8 adalah $\{-1\}, \{-i, i\}, \{-j, j\}, \{-k, k\}, \{-1, -i, i\}, \{-1, -j, j\}, \{-1, -k, k\}$, $\{-i, i, -j, j\}, \{-i, i, -k, k\}, \{-j, j, -k, k\}, \{-1, -i, i, -j, j\}, \{-1, -i, i, -k, k\}, \{-1, -j, j, -k, k\}, \{-i, i, -j, j, -k, k\}$, dan $\{-1, -i, i, -j, j, -k, k\}$.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1\}$

Tabel 4.1 Automorfisma $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ dan $S = \{-1\}$ atas $Cay(Q_8, S)$

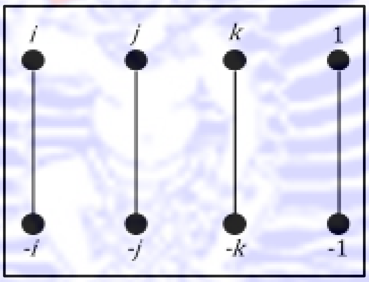
$g \in Q_8$	$s \in S$	$h = gs \in Q_8$	Garis (g, h)	$g^{-1} \in Q_8$	$h^{-1} \in Q_8$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
$-i$	-1	i	$(-i, i)$	i	$-i$	$(i, -i)$
i	-1	$-i$	$(i, -i)$	$-i$	i	$(-i, i)$
$-j$	-1	j	$(-j, j)$	j	$-j$	$(j, -j)$
j	-1	$-j$	$(j, -j)$	$-j$	j	$(-j, j)$
$-k$	-1	k	$(-k, k)$	k	$-k$	$(k, -k)$

Tabel 4.1 (lanjutan)

$g \in Q_8$	$s \in S$	$h = gs \in Q_8$	Garis (g,h)	$g^{-1} \in Q_8$	$h^{-1} \in Q_8$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
k	-1	$-k$	$(k,-k)$	$-k$	k	$(-k,k)$
-1	-1	1	$(-1,1)$	-1	1	$(-1,1)$
1	-1	-1	$(1,-1)$	1	-1	$(1,-1)$

Dari Tabel 4.1 terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in V(Cay(Q_8, \{-1\}))$, $(g,h) \in E\big(Cay(Q_8,\{-1\})\big) \Leftrightarrow (g^{-1}, h^{-1}) \in E(Cay(Q_8, \{-1\}))$. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-1\})$:



Gambar 4.1 $Cay(Q_8, \{-1\})$

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-i, i\}$

Tabel 4.2 Automorfisma $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ dan $S = \{-i, i\}$ atas $Cay(Q_8, S)$

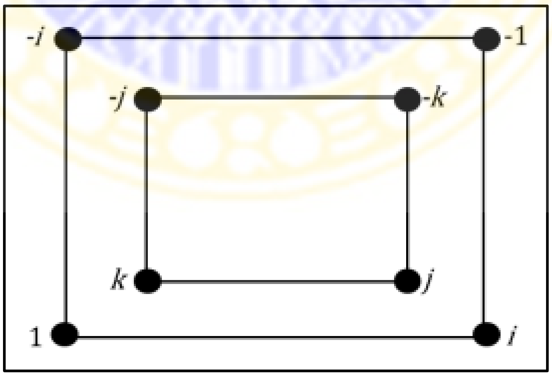
$g \in Q_8$	$s \in S$	$h = gs \in Q_8$	Garis (g,h)	$g^{-1} \in Q_8$	$h^{-1} \in Q_8$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
$-i$	$-i$	-1	$(-i,-1)$	i	-1	$(i,-1)$
i	$-i$	1	$(i,1)$	$-i$	1	$(-i,1)$
$-j$	$-i$	$-k$	$(-j,-k)$	j	k	(j,k)
j	$-i$	k	(j,k)	$-j$	$-k$	$(-j,-k)$
$-k$	$-i$	j	$(-k,j)$	k	$-j$	$(k,-j)$
k	$-i$	$-j$	$(k,-j)$	$-k$	j	$(-k,j)$

Tabel 4.2 (lanjutan)

$g \in Q_8$	$s \in S$	$h = gs \in Q_8$	Garis (g, h)	$g^{-1} \in Q_8$	$h^{-1} \in Q_8$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
-1	$-i$	i	$(-1,i)$	-1	$-i$	$(-1,-i)$
1	$-i$	$-i$	$(1,-i)$	1	i	$(1,i)$
$-i$	i	1	$(-i,1)$	i	1	$(i,1)$
i	i	-1	$(i,-1)$	$-i$	-1	$(-i,-1)$
$-j$	i	k	$(-j,k)$	j	$-k$	$(j,-k)$
j	i	$-k$	$(j,-k)$	$-j$	k	$(-j,k)$
$-k$	i	$-j$	$(-k,-j)$	k	j	(k,j)
k	i	j	(k,j)	$-k$	$-j$	$(-k,-j)$
-1	i	$-i$	$(-1,-i)$	-1	i	$(-1,i)$
1	i	i	$(1,i)$	1	$-i$	$(1,-i)$

Dari Tabel 4.2 terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in V(Cay(Q_8, \{-i, i\}))$, $(g, h) \in E\big(Cay(Q_8, \{-i, i\})\big) \Leftrightarrow (g^{-1}, h^{-1}) \in E(Cay(Q_8, \{-i, i\}))$. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8\{-i, i\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-i, i\})$:



Gambar 4.2 $Cay(Q_8, \{-i, i\})$

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-j, j\}$

Tabel 4.3 Automorfisma $f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ dan $S = \{-j, j\}$ atas $Cay(Q_8, S)$

$g \in Q_8$	$s \in S$	$h = gs \in Q_8$	Garis (g, h)	$g^{-1} \in Q_8$	$h^{-1} \in Q_8$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
$-i$	$-j$	k	$(-i, k)$	i	$-k$	$(i, -k)$
i	$-j$	$-k$	$(i, -k)$	$-i$	k	$(-i, k)$
$-j$	$-j$	-1	$(-j, -1)$	j	-1	$(j, -1)$
j	$-j$	1	$(j, 1)$	$-j$	1	$(-j, 1)$
$-k$	$-j$	$-i$	$(-k, -i)$	k	i	(k, i)
k	$-j$	i	(k, i)	$-k$	$-i$	$(-k, -i)$
-1	$-j$	j	$(-1, j)$	-1	$-j$	$(-1, -j)$
1	$-j$	$-j$	$(1, -j)$	1	j	$(1, j)$
$-i$	j	$-k$	$(-i, -k)$	i	k	(i, k)
i	j	k	(i, k)	$-i$	$-k$	$(-i, -k)$
$-j$	j	1	$(-j, 1)$	j	1	$(j, 1)$
j	j	-1	$(j, -1)$	$-j$	-1	$(-j, -1)$
$-k$	j	i	$(-k, i)$	k	$-i$	$(k, -i)$
k	j	$-i$	$(k, -i)$	$-k$	i	$(-k, i)$
-1	j	$-j$	$(-1, -j)$	-1	j	$(-1, j)$
1	j	j	$(1, j)$	1	$-j$	$(1, -j)$

Dari Tabel 4.3 terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in V(Cay(Q_8, \{-j, j\}))$, $(g, h) \in E\big(Cay(Q_8, \{-j, j\})\big) \Leftrightarrow (g^{-1}, h^{-1}) \in E(Cay(Q_8, \{-j, j\}))$. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8\{-j, j\})$. $Cay(Q_8, \{-j, j\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-i, i\})$ pada Gambar 4.2.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-k, k\}$

Tabel 4.4 Automorfisma $f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ dan $S = \{-k, k\}$ atas $Cay(Q_8, S)$

$g \in G$	$s \in S$	$h = gs \in G$	Garis (g, h)	$g^{-1} \in G$	$h^{-1} \in G$	Garis (g^{-1}, h^{-1})
$-i$	$-k$	$-j$	$(-i, -j)$	i	j	(i, j)

Tabel 4.4 (lanjutan)

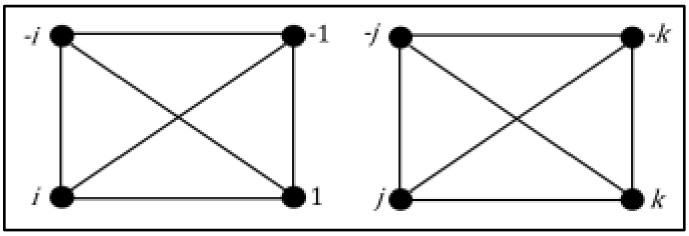
$g \in G$	$s \in S$	$h = gs \in G$	**Garis** (g, h)	$g^{-1} \in G$	$h^{-1} \in G$	**Garis** (g^{-1}, h^{-1})
i	$-k$	j	(i,j)	$-i$	$-j$	$(-i,-j)$
$-j$	$-k$	i	$(-j,i)$	j	$-i$	$(j,-i)$
j	$-k$	$-i$	$(j,-i)$	$-j$	i	$(-j,i)$
$-k$	$-k$	-1	$(-k,-1)$	k	-1	$(k,-1)$
k	$-k$	1	$(k,1)$	$-k$	1	$(-k,1)$
-1	$-k$	k	$(-1,k)$	-1	$-k$	$(-1,-k)$
1	$-k$	$-k$	$(1,-k)$	1	k	$(1,k)$
$-i$	k	j	$(-i,j)$	i	$-j$	$(i,-j)$
i	k	$-j$	$(i,-j)$	$-i$	j	$(-i,j)$
$-j$	k	$-i$	$(-j,-i)$	j	i	(j,i)
j	k	i	(j,i)	$-j$	$-i$	$(-j,-i)$
$-k$	k	1	$(-k,1)$	k	1	$(k,1)$
k	k	-1	$(k,-1)$	$-k$	-1	$(-k,-1)$
-1	k	$-k$	$(-1,-k)$	-1	k	$(-1,k)$
1	k	k	$(1,k)$	1	$-k$	$(1,-k)$

Dari Tabel 4.4 terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in V(Cay(Q_8, \{-k, k\}))$, $(g, h) \in E\big(Cay(Q_8, \{-k, k\})\big) \Leftrightarrow (g^{-1}, h^{-1}) \in E(Cay(Q_8, \{-k, k\})$. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8\{-k, k\})$. $Cay(Q_8, \{-k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-i, i\})$ pada Gambar 4.2.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -i, i\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis (g^{-1}, h^{-1}) untuk $S = \{-1, -i, i\} = \{-1\} \cup \{-i, i\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Gambar $Cay(Q_8, \{-1, -i, i\})$:



Gambar 4.3 $\boldsymbol{Cay(Q_8, \{-1, -i, i\})}$

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -j, j\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis (g^{-1}, h^{-1}) untuk $S = \{-1, -j, j\} = \{-1\} \cup \{-j, j\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.3. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -j, j\})$. $Cay(Q_8, \{-1, -j, j\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-1, -i, i\})$ pada Gambar 4.3.

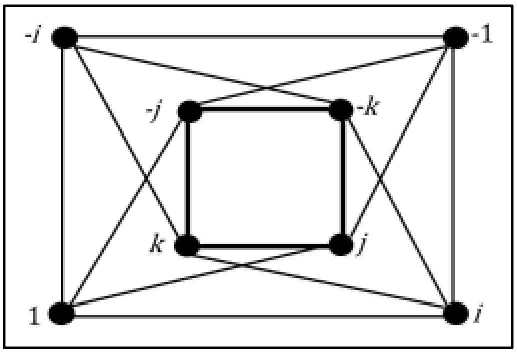
- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis (g^{-1}, h^{-1}) untuk $S = \{-1, -k, k\} = \{-1\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -k, k\})$. $Cay(Q_8, \{-1, -k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-1, -i, i\})$ pada Gambar 4.3.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-i, i, -j, j\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-i, i, -j, j\} = \{-i, i\} \cup \{-j, j\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.2 dan Tabel 4.3. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j\})$:



Gambar 4.4 $\boldsymbol{Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j\})}$

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-i, i, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis (g^{-1}, h^{-1}) untuk $S = \{-i, i, -k, k\} = \{-i, i\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.2 dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-i, i, -k, k\})$.$Cay(Q_8, \{-i, i, -k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j\})$ pada Gambar 4.4.

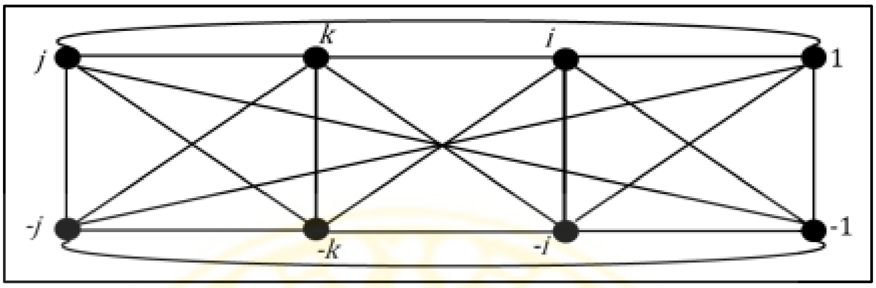
➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-j, j, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis (g^{-1}, h^{-1}) untuk $S = \{, -j, j, -k, k\} = \{-j, j\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.3 dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31,$f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-j, j, -k, k\})$.$Cay(Q_8, \{-j, j, -k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j\})$ pada Gambar 4.4.

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -i, i, -j, j\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-1, -i, i, -j, j\} = \{-1\} \cup \{-i, i\} \cup \{-j, j\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, dan Tabel 4.3. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j\})$:



Gambar 4.5 $\boldsymbol{Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j\})}$

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -i, i, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-1, -i, i, -k, k\} = \{-1\} \cup \{-i, i\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -k, k\})$. $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j\})$ pada Gambar 4.5.

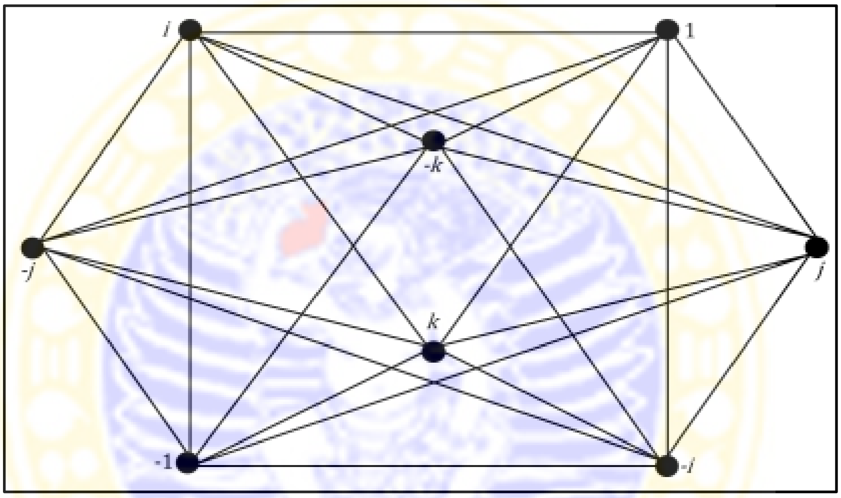
➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -j, j, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-1, -j, j, -k, k\} = \{-1\} \cup \{-j, j\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \rightarrow Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -j, j, -k, k\})$. $Cay(Q_8, \{-1, -j, j, -k, k\})$ isomorfis dengan $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j\})$ pada Gambar 4.5.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-i, i, -j, j, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-i, i, -j, j, -k, k\} = \{-i, i\} \cup \{-j, j\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j, -k, k\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j, -k, k\})$:

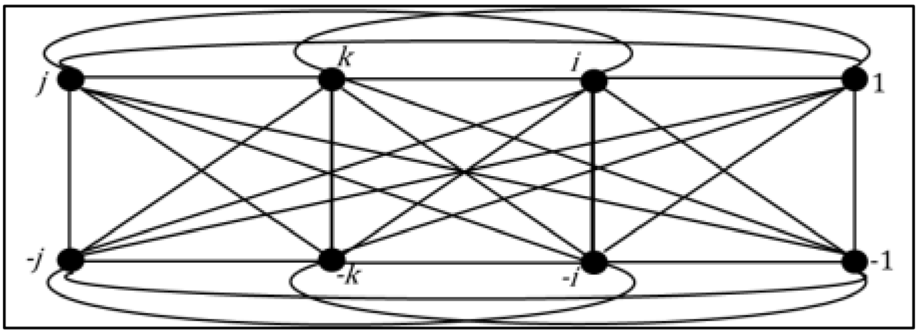


Gambar 4.6 $\boldsymbol{Cay(Q_8, \{-i, i, -j, j, -k, k\})}$

- Untuk himpunan bagian Cayley $S = \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\}$

Keterhubungan garis (g, h) dan keterhubungan garis untuk $S = \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\} = \{-1\} \cup \{-i, i\} \cup \{-j, j\} \cup \{-k, k\}$ dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4. Berdasarkan Definisi 2.31, $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$ untuk $g \in Q_8$ merupakan automorfisma atas $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\})$.

Gambar $Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\})$:



Gambar 4.7 $\boldsymbol{Cay(Q_8, \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\})}$

Karena pemetaan $f: Q_8 \to Q_8$ dengan $f(g) = g^{-1}$untuk setiap $g \in Q_8$ merupakan automorfisma pada semua graf Cayley atas Q_8, maka Q_8 merupakan grup abelian secara grafis.

Berikut akan diuraikan beberapa kriteria dan sifat suatu grup non-abelian yang merupakan grup abelian secara grafis.

Teorema 4.1 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika semua himpunan bagian Cayleynya adalah himpunan bagian normal.

Bukti: Misalkan G adalah grup abelian secara grafis. Diambil sebarang himpunan bagian Cayley S dari grup G dan diambil sebarang $Cay(G, S)$. Berdasarkan Definisi 2.28 bagian (i), maka $V\big(Cay(G, S)\big) = G$. Karena G adalah grup abelian secara grafis, berdasarkan Definisi 2.32, pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan automorfisma pada semua graf Cayley atas grup G. Misalkan diambil $g, h \in V\big(Cay(G, S)\big)$ dengan $(g, h) \in E\big(Cay(G, S)\big)$. Berdasarkan Definisi 2.32, maka $\big(f(g), f(h)\big) \in E(Cay(G, S)$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.28 bagian (ii), maka $h = gs$, untuk $s \in S$. Sehingga, $\big(f(g), f(h)\big) = (f(g), f(gs)) = (g^{-1}, (gs)^{-1}) \in E(Cay(G, S))$.

Berdasarkan Teorema 2.29, karena $(g^{-1}, (gs)^{-1}) \in E(Cay(G,S))$, maka $(g^{-1})^{-1}(gs)^{-1} \in S$. Selanjutnya, $(g^{-1})^{-1}(gs)^{-1} = g(gs)^{-1} = gs^{-1}g^{-1} \in S$, untuk setiap $s^{-1} \in S$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.15, S merupakan himpunan bagian normal.

Sebaliknya, misalkan diambil sebarang grup G. Misalkan semua himpunan bagian Cayley S dari G adalah himpunan bagian normal, maka $gsg^{-1} \in S,$ untuk setiap $s \in S$ dan $g \in G$. Diambil sebarang $Cay(G,S)$. Berdasarkan Definisi 2.28 bagian (i), maka $V(Cay(G,S)) = G$. Misalkan diambil $(gs)^{-1}, g^{-1} \in V(Cay(G,S))$. Karena $gsg^{-1} \in S$, berdasarkan Teorema 2.29, diperoleh $((gs)^{-1}, g^{-1}) \in E(Cay(G,S))$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ merupakan automorfisma pada semua $Cay(G,S)$. Untuk $(gs)^{-1}, g^{-1} \in V(Cay(G,S))$, pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$, menyebabkan $f((gs)^{-1}) = ((gs)^{-1})^{-1} = (gs)$ dan $f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$. Selanjutnya, $(f((gs)^{-1}))^{-1} f(g^{-1}) = (gs)^{-1}(g) = s^{-1}g^{-1}g = s^{-1} \in S$. Berdasarkan Teorema 2.29, maka $(f((gs)^{-1}), f(g^{-1})) \in E(Cay(G,S))$. Karena untuk setiap $(gs)^{-1}, g^{-1} \in V(Cay(G,S))$dan $((gs)^{-1}, g^{-1}) \in E(Cay(G,S))$, pemetaan $f: G \to G$ dengan $f(g) = g^{-1}$ menyebabkan $(f((gs)^{-1}), f(g^{-1})) \in E(Cay(G,S))$, berdasarkan Definisi 2.31, f merupakan automorfisma pada graf Cayley $Cay(G,S)$. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.32, grup G merupakan grup abelian secara grafis. ■

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan salah satu contoh grup non-abelian yang abelian secara grafis adalah grup Quarternion karena memenuhi

Definisi 2.32. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa grup Quarternion memenuhi kriteria lain sebagai suatu grup abelian secara grafis melalui Teorema 4.1, yaitu semua himpunan bagian Cayley dari geup Quarternion merupakan himpunan bagian normal. Perhatikan grup Quarternion $Q_8 = \{-i, i, -j, j, -k, k, -1, 1\}$. Semua himpunan bagian Cayley dari Q_8 adalah $\{-1\}, \{-i, i\}, \{-j, j\}, \{-k, k\}, \{-1, -i, i\}, \{-1, -j, j\}, \{-1, -k, k\}, \{-i, i, -j, j\}, \{-i, i, -k, k\}, \{-j, j, -k, k\}, \{-1, -i, i, -j, j\}, \{-1, -i, i, -k, k\}, \{-1, -j, j, -k, k\}, \{-i, i, -j, j, -k, k\}$, dan $\{-1, -i, i, -j, j, -k, k\}$. Berikut akan ditunjukkan bahwa semua himpunan bagian Cayley dari Q_8 adalah himpunan bagian normal. Berdasarkan Definisi 2.15, himpunan bagian Cayley S dari Q_8 merupakan himpunan bagian normal dari Q_8 jika untuk setiap $g \in Q_8$, memenuhi $gsg^{-1} \in S$ untuk setiap $s \in S$.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S_1 = \{-1\}$

Tabel 4.5 Hasil operasi gsg^{-1} untuk $S_1 = \{-1\}$ dan $g \in Q_8$

g	s	gs	g^{-1}	$gs\,g^{-1}$
$-i$	-1	i	i	-1
i	-1	$-i$	$-i$	-1
$-j$	-1	j	j	-1
j	-1	$-j$	$-j$	-1
$-k$	-1	k	k	-1
k	-1	$-k$	$-k$	-1
-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.5 dapat dilihat bahwa untuk setiap $g \in Q_8$ dan $s \in S_1$, maka $gsg^{-1} = -1 \in S_1$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.15, S_1 merupakan himpunan bagian Cayley normal dari Q_8.

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S_2 = \{-i, i\}$

Tabel 4.6 Hasil operasi gsg^{-1} untuk $S_2 = \{-i, i\}$ dan $g \in Q_8$

g	s	gs	g^{-1}	$gs\,g^{-1}$
$-i$	$-i$	-1	i	$-i$
i	$-i$	1	$-i$	$-i$
$-j$	$-i$	$-k$	j	i
j	$-i$	k	$-j$	i
$-k$	$-i$	j	k	i
k	$-i$	$-j$	$-k$	i
-1	$-i$	i	-1	$-i$
1	$-i$	$-i$	1	$-i$
$-i$	i	1	i	i
i	i	-1	$-i$	i
$-j$	i	k	j	$-i$
j	i	$-k$	$-j$	$-i$
$-k$	i	$-j$	k	$-i$
k	i	j	$-k$	$-i$
-1	i	$-i$	-1	i
1	i	i	1	i

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.6 dapat dilihat bahwa untuk setiap $g \in Q_8$ dan $s \in S_2$, maka $gsg^{-1} \in S_2$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.15, S_2merupakan himpunan bagian Cayley normal dari Q_8.

➢ Untuk himpunan bagian Cayley $S_3 = \{-j, j\}$

Tabel 4.7 Hasil operasi gsg^{-1} untuk $S_3 = \{-j, j\}$ dan $g \in Q_8$

g	s	gs	g^{-1}	$gs\,g^{-1}$
$-i$	$-j$	k	i	j
i	$-j$	$-k$	$-i$	j
$-j$	$-j$	-1	j	$-j$
j	$-j$	1	$-j$	$-j$
$-k$	$-j$	$-i$	k	j
k	$-j$	i	$-k$	j
-1	$-j$	j	-1	$-j$
1	$-j$	$-j$	1	$-j$
$-i$	j	$-k$	i	$-j$

Tabel 4.7 (lanjutan)

g	s	gs	g^{-1}	$gs\,g^{-1}$
i	j	k	$-i$	$-j$
$-j$	j	1	j	j
j	j	-1	$-j$	j
$-k$	j	i	k	$-j$
k	j	$-i$	$-k$	$-j$
-1	j	$-j$	-1	j
1	j	j	1	j

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.7 dapat dilihat bahwa untuk setiap $g \in Q_8$ dan $s \in S_3$, maka $gsg^{-1} \in S_3$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.15, S_3merupakan himpunan bagian Cayley normal dari Q_8.

- Untuk himpunan bagian Cayley $S_4 = \{-k, k\}$

Tabel 4.8 Hasil operasi gsg^{-1} untuk $S_4 = \{-k, k\}$ dan $g \in Q_8$

g	s	gs	g^{-1}	$gs\,g^{-1}$
$-i$	$-k$	$-j$	i	k
i	$-k$	j	$-i$	k
$-j$	$-k$	i	j	k
j	$-k$	$-i$	$-j$	k
$-k$	$-k$	-1	k	$-k$
k	$-k$	1	$-k$	$-k$
-1	$-k$	k	-1	$-k$
1	$-k$	$-k$	1	$-k$
$-i$	k	j	i	$-k$
i	k	$-j$	$-i$	$-k$
$-j$	k	$-i$	j	$-k$
j	k	i	$-j$	$-k$
$-k$	k	1	k	k
k	k	-1	$-k$	k
-1	k	$-k$	-1	k
1	k	k	1	k

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.8 dapat dilihat bahwa untuk setiap $g \in Q_8$ dan $s \in S_4$, maka $gsg^{-1} \in S_4$.

Sehingga berdasarkan Definisi 2.15, S_4 merupakan himpunan bagian Cayley normal dari Q_8.

- Untuk $S_5 = \{-1, -i, i\} = S_1 \cup S_2$, berdasarkan Teorema 2.16, S_5 merupakan himpunan bagian normal karena S_1 dan S_2 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_6 = \{-1, -j, j\} = S_1 \cup S_3$, berdasarkan Teorema 2.16, S_6 merupakan himpunan bagian normal karena S_1 dan S_3 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_7 = \{-1, -k, k\} = S_1 \cup S_4$, berdasarkan Teorema 2.16, S_7 merupakan himpunan bagian normal karena S_1 dan S_4 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_8 = \{-1, -i, i, -j, j\} = S_5 \cup S_3$, berdasarkan Teorema 2.16, S_8 merupakan himpunan bagian normal karena S_5 dan S_3 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_9 = \{-1, -i, i, -k, k\} = S_5 \cup S_4$, berdasarkan Teorema 2.16, S_9 merupakan himpunan bagian normal karena S_5 dan S_4 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_{10} = \{-1, -j, j, -k, k\} = S_6 \cup S_4$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{10} merupakan himpunan bagian normal karena S_6 dan S_4 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_{11} = \{-i, i, -j, j\} = S_2 \cup S_3$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{11} merupakan himpunan bagian normal karena S_2 dan S_3 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.

- Untuk $S_{12} = \{-i, i, -k, k\} = S_2 \cup S_4$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{12} merupakan himpunan bagian normal karena S_2 dan S_4 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk$S_{13} = \{-j, j, -k, k\} = S_3 \cup S_4$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{13} merupakan himpunan bagian normal karena S_3 dan S_4 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_{14} = \{-i, i, -j, j, -k, k\} = S_{11} \cup S_3$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{14} merupakan himpunan bagian normal karena S_{11} dan S_3 masing-masing merupakan himpunan bagian normal.
- Untuk $S_{15} = \{-1, -i, i, -j, j, -k, k\} = S_1 \cup S_{14}$, berdasarkan Teorema 2.16, S_{15} merupakan himpunan bagian normal karena S_1 dan S_{14} masing-masing merupakan himpunan bagian normal.

Terlihat bahwa semua himpunan bagian Cayley dari Q_8 merupakan himpunan bagian normal, sehingga Q_8 memenuhi Teorema 4.1.

Dari Teorema 4.1, jika G merupakan grup non-abelian yang abelian secara grafis, maka semua himpunan bagian Cayley dari G merupakan himpunan bagian normal. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.17, G merupakan grup Hamiltonian jika setiap subgrup dari adalah subgrup normal. Sehingga, akibat dari Teorema 4.1 akan dijelaskan pada teorema berikut.

Akibat 4.2 Jika G grup abelian secara grafis, maka G grup Hamiltonian.

Bukti: Misalkan G grup abelian secara grafis. Diambil sebarang subgrup H dari grup G. Karena H subgrup, berdasarkan Definisi 2.27, maka terdapat S himpunan bagian Cayley dari G sehingga $H = S \cup \{e\}$ dengan e elemen identitas pada G. Berdasarkan Teorema 4.1, maka semua himpunan bagian Cayley S merupakan himpunan bagian normal dari G. Karena S himpunan bagian Cayley normal dari G, maka untuk setiap $g \in G$ dan $s \in S \subset H$, berlaku $gsg^{-1} \in S \subset H$. Demikian juga, untuk setiap $g \in G$ dan $e \in \{e\} \subset H$, berlaku $geg^{-1} = gg^{-1} = e \in \{e\} \subset H$. Karena untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$, berlaku $ghg^{-1} \in H$, berdasarkan Definisi 2.14 bagian (iii), H merupakan subgrup normal dari G. Akibatnya, berdasarkan Definisi 2.17, G merupakan grup Hamiltonian. ■

Contoh grup non-abelian yang abelian secara grafis adalah grup Quarternion. Pada Bab II telah dijelaskan bahwa grup Quarternion merupakan grup Hamiltonian. Sehingga, kebalikan Akibat 4.2 ini berlaku pada grup Quarternion. Namun, kebalikan Akibat 4.2 tidak selalu berlaku untuk semua grup Hamiltonian. Contoh grup Hamiltonian yang tidak abelian secara grafis adalah $Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$. Berdasarkan Teorema 2.18 (Teorema Baer), $Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3 = \{(a,b,c) | a \in Q_8, b \in \{-1,1\}, c \in \mathbb{Z}_3\}$ dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai $(a,b,c) * (p,q,r) = (a.p, b.q, c + r)$, merupakan grup Hamiltonian, dengan elemen identitas (1,1,0). Misalkan diambil himpunan bagian Cayley $S_1 = \{r_1 = (-1,1,1), r_2 = (-1,1,2), r_3 = (i,1,0), r_4 = (-i,1,0)\}$ dan $g = (i,1,1) \in Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$, maka:

$$gr_1g^{-1} = (i,1,1) * (-1,1,1) * (-i,1,2) = (-i,1,2) * (-i,1,2) = (-1,1,1) \in S_1$$

$$gr_2g^{-1} = (i,1,1) * (-1,1,2) * (-i,1,2) = (-i,1,0) * (-i,1,2) = (-1,1,2) \in S_1$$

$$gr_3g^{-1} = (i,1,1) * (i,1,0) * (-i,1,2) = (-1,1,1) * (-i,1,2) = (i,1,0) \in S_1$$

$gr_4g^{-1} = (i,1,1) * (-i,1,0) * (-i,1,2) = (1,1,1) * (-i,1,2) = (-i,1,0) \in S_1$

Karena untuk setiap $r \in S_1$ dan $g \in Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$ berlaku $grg^{-1} \in S_1$, berdasarkan Definisi 2.15, $S_1 = \{(-1,1,1),(-1,1,2),(i,1,0),(-i,1,0)\}$ merupakan himpunan bagian Cayley normal dari $Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$.

Akan tetapi, jika diambil himpunan bagian Cayley $S_2 = \{p_1 = (j,1,2), p_2 = (-j,1,1)\}$ dan $g = (i,1,1) \in Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$, maka :

$gp_1g^{-1} = (i,1,1) * (j,1,2) * (-i,1,2) = (k,1,0) * (-i,1,2) = (-j,1,2) \notin S_2$

Sehingga, $S_2 = \{(j,1,2),(-j,1,1)\}$ bukan merupakan himpunan bagian Cayley normal dari $Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$. Berdasarkan Teorema 4.1, grup $Q_8 \times \{-1,1\} \times \mathbb{Z}_3$ tidak abelian secara grafis.

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.19, misalkan G grup dan $g \in G$, maka g tetap oleh konjugasi terhadap h jika $gh = hg$ untuk setiap $h \in G$ dan g terbalik oleh konjugasi terhadap h jika $gh = hg^{-1}$ untuk setiap $h \in G$. Melalui Teorema 4.1 dan Definisi 2.19 tersebut dapat ditemukan Teorema 4.3 sebagai berikut.

Teorema 4.3 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi.

Bukti: Misalkan diambil sebarang grup G abelian secara grafis. Misalkan S himpunan bagian Cayley dari G. Berdasarkan Teorema 4.1, maka S merupakan himpunan bagian normal. Sehingga, untuk setiap $g \in G$ dan $s \in S$, maka $gsg^{-1} \in S$. Karena $gsg^{-1} \in S$, berdasarkan Definisi 2.27, maka kondisi berikut terpenuhi, yaitu:

(i) $gsg^{-1} = s$ atau

(ii) $gsg^{-1} = s^{-1}$

Jika memenuhi kondisi (i), yaitu: $gsg^{-1} = s$, maka dengan perkalian dari sisi kanan oleh g, akan diperoleh $gs = sg$. Berdasarkan Definisi 2.19 bagian (i), elemen s tetap oleh konjugasi terhadap g. Jika memenuhi kondisi (ii), yaitu: $gsg^{-1} = s^{-1}$, maka dengan perkalian dari sisi kanan oleh g, akan diperoleh $gs = s^{-1}g$. Berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii), elemen s terbalik oleh konjugasi terhadap g. Akibatnya, setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi.

Sebaliknya, misalkan setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik dari konjugasi. Misalkan diambil sebarang S himpunan bagian Cayley dari G. Misalkan diambil $g \in G$ dan $s \in S \subset G$. Jika g tetap oleh konjugasi terhadap s, maka berdasarkan Definisi 2.19 bagian (i), diperoleh $gs = sg$. Dengan perkalian dari sisi kanan oleh g^{-1}, diperoleh $gsg^{-1} = s \in S$. Jika g terbalik oleh konjugasi terhadap s, maka berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii), diperoleh $gs = s^{-1}g$. Dengan perkalian dari sisi kanan oleh g^{-1}, diperoleh $gsg^{-1} = s^{-1} \in S$. Berdasarkan Definisi 2.15, maka S merupakan himpunan bagian Cayley normal dari G. Akibatnya, berdasarkan Teorema 4.1, G merupakan grup abelian secara grafis. ■

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa salah satu contoh grup non-abelian yang abelian secara grafis adalah grup Quarternion. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa grup Quarternion memenuhi kriteria pada Teorema 4.3, yaitu setiap elemen dari grup Quarternion tetap atau terbalik oleh konjugasi, seperti ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.9 Identifikasi kriteria tetap atau terbalik oleh konjugasi pada elemen grup Q_8

g	h	gh	hg	h^{-1}	$h^{-1}g$	Keterangan
1	1	1	1	1	1	$gh = hg$ dan $gh = h^{-1}g$
1	-1	-1	-1	-1	-1	$gh = hg$ dan $gh = h^{-1}g$
1	i	i	i	$-i$	$-i$	$gh = hg$
1	$-i$	$-i$	$-i$	i	i	$gh = hg$
1	j	j	j	$-j$	$-j$	$gh = hg$
1	$-j$	$-j$	$-j$	j	j	$gh = hg$
1	k	k	k	$-k$	$-k$	$gh = hg$
1	$-k$	$-k$	$-k$	k	k	$gh = hg$
-1	-1	1	1	-1	1	$gh = hg$
-1	i	$-i$	$-i$	$-i$	i	$gh = hg$
-1	$-i$	i	i	i	$-i$	$gh = hg$
-1	j	$-j$	$-j$	$-j$	j	$gh = hg$
-1	$-j$	j	j	j	$-j$	$gh = hg$
-1	k	$-k$	$-k$	$-k$	k	$gh = hg$
-1	$-k$	k	k	k	$-k$	$gh = hg$
i	i	-1	-1	$-i$	1	$gh = hg$
i	$-i$	1	1	i	-1	$gh = hg$
i	j	k	$-k$	$-j$	k	$gh = h^{-1}g$
i	$-j$	$-k$	k	j	$-k$	$gh = h^{-1}g$
i	k	$-j$	j	$-k$	$-j$	$gh = h^{-1}g$
i	$-k$	j	$-j$	k	j	$gh = h^{-1}g$
$-i$	$-i$	-1	-1	i	1	$gh = hg$
$-i$	j	$-k$	k	$-j$	$-k$	$gh = h^{-1}g$
$-i$	$-j$	k	$-k$	j	k	$gh = h^{-1}g$
$-i$	k	j	$-j$	$-k$	j	$gh = h^{-1}g$
$-i$	$-k$	$-j$	j	k	$-j$	$gh = h^{-1}g$
j	j	-1	-1	$-j$	1	$gh = hg$
j	$-j$	1	1	j	-1	$gh = hg$
j	k	i	$-i$	$-k$	i	$gh = h^{-1}g$
j	$-k$	$-i$	i	k	$-i$	$gh = h^{-1}g$
$-j$	$-j$	-1	-1	j	1	$gh = hg$
$-j$	k	$-i$	i	$-k$	$-i$	$gh = h^{-1}g$
$-j$	$-k$	i	$-i$	k	i	$gh = h^{-1}g$
k	k	-1	-1	$-k$	1	$gh = hg$
k	$-k$	1	1	k	-1	$gh = hg$

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.9 terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in Q_8$, g dan h tetap atau terbalik oleh konjugasi.

Dari Teorema 4.3 tersebut, dapat dikembangkan kriteria lain dari grup abelian secara grafis seperti yang disajikan dalam Teorema 4.4 berikut.

Teorema 4.4 Grup G abelian secara grafis jika dan hanya jika G grup yang terseimbangkan.

Bukti: Misalkan grup G abelian secara grafis. Misalkan diambil sebarang $g, x \in G$. Karena G grup, berdasarkan Definisi 2.2, G bersifat tertutup terhadap operasi binernya, sehingga terdapat $h \in G$ sedemikian sehingga $h = gx$, untuk $g, x \in G$. Karena G grup abelian secara grafis, berdasarkan Teorema 4.3, setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi, sehingga $xg = gx$ atau $x^{-1}g = gx$.

Untuk $xg = gx$, jika dikalikan dari sisi kiri dengan g, diperoleh $gxg = ggx$. Karena $gx = h$, maka $hg = gh$. Akibatnya, g dan h komutatif. Selanjutnya, untuk $x^{-1}g = gx$, jika dikalikan dari kiri dengan gx, diperoleh $gg = gxgx$. Karena $gx = h$, maka $gg = hh$. Akibatnya, $g^2 = h^2$. Berdasarkan Definisi 2.20, G merupakan grup yang terseimbangkan.

Sebaliknya, misalkan grup G yang terseimbangkan. Akan ditunjukkan bahwa G grup abelian secara grafis dengan menggunakan Teorema 4.3. Misalkan diambil $g, h \in G$. Karena G grup, berdasarkan Definisi 2.2, G bersifat tertutup terhadap operasi binernya. Misalkan $h = gx$ untuk suatu $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.20, maka untuk setiap $g, h \in G$, kondisi g dan h komutatif atau $g^2 = h^2$ terpenuhi. Untuk kondisi g dan h komutatif, maka $gh = hg$. Berdasarkan Definisi 2.19

bagian (i), maka g tetap oleh konjugasi terhadap h. Untuk kondisi $g^2 = h^2$, karena $h = gx$, maka $g^2 = (gx)^2$. Karena $g^2 = gg$ dan $(gx)^2 = gxgx$, maka $gg = gxgx$. Dengan menggunakan Teorema 2.6 bagian (i), diperoleh $g = xgx$. Jika $g = xgx$ dikalikan dari kanan dengan x^{-1}, maka diperoleh $gx^{-1} = xg$. Berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii), elemen x terbalik oleh konjugasi terhadap g. Karena setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi, berdasarkan Teorema 4.3, G merupakan grup abelian secara grafis. ■

Karena grup Quarternion merupakan grup non-abelian yang abelian secara grafis, berdasarkan Teorema 4.4, grup Quarternion merupakan grup yang terseimbangkan.

Tabel 4.10 Identifikasi kriteria grup yang terseimbangkan pada elemen grup Q_8

g	h	gh	hg	g^2	h^2	**Keterangan**
1	1	1	1	1	1	$gh = hg$ dan $g^2 = h^2$
1	-1	-1	-1	1	1	$gh = hg$ dan $g^2 = h^2$
1	i	i	i	1	-1	$gh = hg$
1	$-i$	$-i$	$-i$	1	-1	$gh = hg$
1	j	j	j	1	-1	$gh = hg$
1	$-j$	$-j$	$-j$	1	-1	$gh = hg$
1	k	k	k	1	-1	$gh = hg$
1	$-k$	$-k$	$-k$	1	-1	$gh = hg$
-1	-1	1	1	1	1	$gh = hg\ dan\ g^2 = h^2$
-1	i	$-i$	$-i$	1	-1	$gh = hg$
-1	$-i$	i	i	1	-1	$gh = hg$
-1	j	$-j$	$-j$	1	-1	$gh = hg$
-1	$-j$	j	j	1	-1	$gh = hg$
-1	k	$-k$	$-k$	1	-1	$gh = hg$
-1	$-k$	k	k	1	-1	$gh = hg$
i	i	-1	-1	-1	-1	$gh = hg\ dan\ g^2 = h^2$
i	$-i$	1	1	-1	-1	$gh = hg\ dan\ g^2 = h^2$

Tabel 4.10 (lanjutan)

g	h	gh	hg	g^2	h^2	Keterangan
i	j	k	$-k$	-1	-1	$g^2 = h^2$
i	$-j$	$-k$	k	-1	-1	$g^2 = h^2$
i	k	$-j$	j	-1	-1	$g^2 = h^2$
i	$-k$	j	$-j$	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-i$	$-i$	-1	-1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$
$-i$	j	$-k$	k	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-i$	$-j$	k	$-k$	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-i$	k	j	$-j$	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-i$	$-k$	$-j$	j	-1	-1	$g^2 = h^2$
j	j	-1	-1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$
j	$-j$	1	1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$
j	k	i	$-i$	-1	-1	$g^2 = h^2$
j	$-k$	$-i$	i	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-j$	$-j$	-1	-1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$
$-j$	k	$-i$	i	-1	-1	$g^2 = h^2$
$-j$	$-k$	i	$-i$	-1	-1	$g^2 = h^2$
k	k	-1	-1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$
k	$-k$	1	1	-1	-1	$gh = hg \ dan \ g^2 = h^2$

Dari kolom terakhir pada Tabel 4.10 tersebut terlihat bahwa untuk setiap $g, h \in Q_8$, memenuhi $gh = hg$ atau $g^2 = h^2$, sehingga Q_8 merupakan grup yang terseimbangkan.

Dari pembahasan sebelumnya, telah diketahui bahwa grup Quarternion merupakan grup non-abelian yang abelian secara grafis, semua himpunan bagian Cayley dari grup Quarternion merupakan himpunan bagian normal, setiap elemen dari grup Quarternion tetap atau terbalik oleh konjugasi, dan grup Quarternion merupakan grup yang terseimbangkan. Selanjutnya, untuk mengetahui struktur dari grup non-abelian yang abelian secara grafis dapat digunakan sifat isomorfis antara subgrup yang dibangun oleh dua elemen tidak komutatif dari grup non-abelian tersebut dengan grup Quarternion, seperti yang disajikan dalam Teorema 4.5 berikut.

Teorema 4.5 Misalkan G grup non-abelian yang abelian secara grafis dan misalkan $a, b \in G$ merupakan pasangan elemen yang tidak komutatif, maka subgrup $\langle a, b \rangle$ adalah grup Quarternion.

Bukti: Misalkan G grup non-abelian yang abelian secara grafis. Misalkan $a, b \in G$ dengan $ab \neq ba$. Berdasarkan Teorema 2.8, karena $ab \neq ba$, maka $a^{-1}b \neq ba^{-1}$. Karena G grup non-abelian yang abelian secara grafis dan $a^{-1}b \neq ba^{-1}$, berdasarkan Teorema 4.3, a^{-1} terbalik oleh konjugasi terhadap b. Berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii) , diperoleh $a^{-1}b = b((a^{-1})^{-1}) = ba$. Dengan perkalian dari sisi kanan oleh b^{-1}, diperoleh $a^{-1} = bab^{-1}$.

Selanjutnya, karena G grup non-abelian yang abelian secara grafis, berdasarkan Teorema 4.4, G merupakan grup yang terseimbangkan. Karena $ab \neq ba$, berdasarkan Definisi 2.20, $a^2 = b^2$. Berdasarkan Teorema 2.8, karena $ab \neq ba$, maka $ab^{-1} \neq b^{-1}a$. Sehingga, untuk setiap $a, b^{-1} \in G$, berdasarkan Definisi 2.20, maka $a^2 = (b^{-1})^2$. Karena $a^2 = b^2$ dan $a^2 = (b^{-1})^2$, maka $b^2 = (b^{-1})^2$. Jika $b^2 = (b^{-1})^2$ dikalikan dari sisi kiri dengan b, akan diperoleh $bbb = bb^{-1}b^{-1}$ atau $b^3 = b^{-1}$. Kemudian kedua ruas dikalikan dari sisi kanan dengan b, sehingga diperoleh $b^4 = e$ Karena $a^2 = b^2$, akibatnya $a^4 = b^2a^2 = b^2b^2 = b^4 = e$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa a dan b tidak mungkin berorder dua. Andaikan a berorder dua, maka $a^2 = e$. Pada penjelasan sebelumnya telah diketahui bahwa

$bab^{-1} = a^{-1}$. Kemudian kedua ruas dikalikan dari sisi kanan dengan a^2, sehingga diperoleh:

$$bab^{-1}a^2 = a^{-1}a^2$$

$$bab^{-1}e = ea$$

$$bab^{-1} = a$$

$$ba = ab$$

Akibatnya, kontradiksi dengan $ba \neq ab$. Sehingga, a tidak mungkin berorder dua, demikian juga dengan b. Karena $a^4 = b^4 = e$, serta a dan b tidak mungkin berorder dua, sehingga berdasarkan Definisi 2.5, a dan b berorder 4. Karena a dan b berorder 4, serta a dan b memenuhi kriteria grup Quarternion pada Definisi 2.22, maka $\langle a, b \rangle$ merupakan subgrup dari grup Quarternion.

Selanjutnya, karena $a^4 = e$, maka $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$, sehingga $\langle a \rangle$ berorder 4. Karena $\langle a \rangle$ adalah subgrup sejati dari $\langle a, b \rangle$, berdasarkan Teorema 2.13, order dari $\langle a \rangle$ membagi order dari $\langle a, b \rangle$. Sehingga, setidaknya $\langle a, b \rangle$ berorder 8. Akan ditunjukkan bahwa $\langle a, b \rangle$ tepat berorder 8.

Diketahui: $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ dan $\langle b \rangle = \{b, b^2, b^3, b^4 = e\}$. Pada penjelasan sebelumnya telah diketahui $a^2 = b^2$, $a^4 = b^4 = e$, dan $ba = a^{-1}b$, maka $\langle a, b \rangle = \{a, a^2, a^3, e, b, b^3, ab, ba\}$, dengan:

1. $a^2 = b^2$

2. $a^4 = b^4 = e = a^2b^2 = b^2a^2$

Karena $a^2 = b^2$, maka $a^2b^2 = a^2a^2 = a^4 = e$ dan $b^2a^2 = b^2b^2 = b^4 = e$. Sehingga, $a^4 = b^4 = e = a^2b^2 = b^2a^2$.

3. $a = a^3b^2 = b^2a^3$

Karena $a^2 = b^2$dan $a^4 = b^4 = e$, maka$a^3b^2 = aa^2b^2 = ab^2b^2 = ab^4 = ae = a$ dan $b^2a^3 = b^2a^2a = b^2b^2a = b^4a = ea = a$. Sehingga, $a = a^3b^2 = b^2a^3$.

4. $a^3 = ab^2 = b^2a$

Karena $a^2 = b^2$, maka $ab^2 = aa^2 = a^3$ dan $b^2a = a^2a = a^3$. Sehingga, $a^3 = ab^2 = b^2a$.

5. $b = a^2b^3 = b^3a^2$

Karena $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, maka $a^2b^3 = a^2b^2b = eb = b$ dan $b^3a^2 = bb^2a^2 = be = b$. Sehingga, $b = a^2b^3 = b^3a^2$.

6. $b^3 = a^2b = ba^2$

Karena $a^2 = b^2$, maka $a^2b = b^2b = b^3$ dan $ba^2 = bb^2 = b^3$. Sehingga, $b^3 = a^2b = ba^2$.

7. $ab = ba^3 = b^3a$

Karena G grup non-abelian yang abelian secara grafis dan $ab \neq ba$, berdasarkan Teorema 4.3, elemen a terbalik oleh konjugasi terhadap b, sehingga berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii), $ab = ba^{-1}$. Kemudian $ab = ba^{-1}$ dikalikan dengan a dari sisi kanan, sehingga diperoleh $aba = be = ba^4 = ba^3a$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema 2.6, diperoleh $ab = ba^3$. Karena $a^2 = b^2$, maka $ba^3 = ba^2a = bb^2a = b^3a$. Akibatnya, $ab = ba^3 = b^3a$.

8. $ba = a^3b = ab^3$

Karena G grup non-abelian yang abelian secara grafis dan $ab \neq ba$, berdasarkan Teorema 4.3, elemen b terbalik oleh konjugasi terhadap a, sehingga berdasarkan Definisi 2.19 bagian (ii), $ba = ab^{-1}$. Kemudian $ba = ab^{-1}$

dikalikan dengan b dari sisi kanan, sehingga diperoleh $bab = ae = ab^4 = ab^3b$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema 2.6, diperoleh$ba = ab^3$. Karena $a^2 = b^2$, maka $ab^3 = ab^2b = aa^2b = a^3b$. maka $ba = a^3b$. Akibatnya $ba = a^3b = ab^3$.

Selanjutnya, karena $ab \neq ba$, maka ab dan ba merupakan dua elemen yang berbeda pada $\langle a, b\rangle$.

Dari uraian di atas, jelas bahwa $\langle a, b\rangle$ berorder 8. Karena $\langle a, b\rangle$ merupakan subgrup dari grup Quarternion dan $\langle a, b\rangle$ berorder 8, maka $\langle a, b\rangle$ merupakan subrup tidak sejati dari grup Quarternion. Dengan kata lain, $\langle a, b\rangle$ merupakan grup Quarternion. ■

Dari Teorema 4.5, jika G sebarang grup non-abelian, misalkan $a, b \in G$ merupakan pasangan elemen yang tidak komutatif, dan subgrup $\langle a, b\rangle$ tidak isomorfis dengan grup Quarternion, maka G bukan grup abelian secara grafis.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Karakteristik dari grup G yang merupakan grup abelian secara grafis adalah memenuhi salah satu dari kriteria berikut:
   a. Semua himpunan bagian Cayley dari grup G merupakan himpunan bagian normal.
   b. Setiap elemen dari grup G tetap atau terbalik oleh konjugasi.
   c. Grup G merupakan grup yang terseimbangkan.
2. Jika diketahui bahwa G adalah grup non-abelian yang abelian secara grafis, maka:
   a. G merupakan grup Hamiltonian.
   b. Untuk $a, b \in G$ yang merupakan pasangan elemen yang tidak komutatif, berlaku bahwa subgrup $\langle a, b \rangle$ merupakan grup Quarternion.

5.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas grup Quarternion sebagai contoh dari grup non-abelian yang abelian secara grafis. Pada penelitian selanjutnya, dapat dibahas karakter dari grup non-abelian lainnya, misalnya grup simetrik S_n, untuk diselidiki apakah grup tersebut merupakan grup abelian secara grafis.

DAFTAR PUSTAKA

Alspach, B., 2004, *Cayley Graphs* in *Handbook of Graph Theory* edited by Jonathan L. Gross and Jay Yellen, CRC Press LLC, Florida, pages 505-515

Dummit, David S., and Foote, Richard M., 2004, *Abstract Algebra Third Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey

Fraleigh, John B., 2003, *A First Course in Abstract Algebra 7th Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, New York

Godsil, C., and Gordon, R., 2001, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag New York Inc., New York

Goldstone, R., McCabe, J., and Weld, K., 2010, *Ambiguous Groups and Cayley Graphs – A Problem in Distinguishing Opposites*, Mathematics Magazine Vol.83, No.5, December 2010

Goldstone, R., and Weld, K., 2010, *Graphically abelian groups*, Discrete Mathematics. 310 (2010) 2806-2810

McCabe, J., and Weld, K., 2009, *On an inverse Cayley problem*, Australassian Journal of Combinatorics Volume 45 (2009), pages 263-276