ADLN - Perpustakaan Universitas Airlangga

ESTIMASI PARAMETER DARI DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE *JACKKNIFE*

SKRIPSI

MPM 35/06
Rah
e

NITA MUFIDAH RAHMAWATI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

2006

MILIK
PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

ESTIMASI PARAMETER DARI DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE *JACKKNIFE*

S K R I P S I

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Airlangga

Oleh :

NITA MUFIDAH RAHMAWATI
NIM. 080112320

Tanggal Lulus : 16 Agustus 2006

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. ARDI KURNIAWAN, M.Si	**Drs. H.SEDIONO, M.Si**
NIP. 132 230 977	**NIP. 131 653 448**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Judul : **Estimasi Parameter Dari Distribusi Gamma Dengan Metode *Jackknife***

Penyusun : **NITA MUFIDAH RAHMAWATI**

NIM : **080112320**

Tanggal Ujian : **16 Agustus 2006**

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. ARDI KURNIAWAN, M.Si	**Drs. H.SEDIONO, M.Si**
NIP.132 230 977	**NIP. 131 653 448**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA UNAIR

Drs. MOH. IMAM UTOYO, M.Si

NIP.131 801 397

KATA PENGANTAR

Puji syukur yang sedalam–dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas karunia dan rahmat-Nya, dan disadari dengan keteguhan hati akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Estimasi Parameter dari Distribusi Gamma dengan Metode *Jackknife*".

Dalam penyusunan skripsi ini tidak sedikit hambatan yang dialami, namun berkat petunjuk dan saran yang diberikan oleh semua pihak maka penulisan ini dapat selesai dengan baik. Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Ardi Kurniawan, M.Si selaku dosen pembimbing I dan Bapak Drs. H.Sediono, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan nasehat dan bimbingan dalam pembuatan skripsi ini
2. Kedua orang tua, saudara, dan teman-teman atas dukungan dan doa restunya, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna. Untuk itu penulis mengharap kritik dan saran yang bersifat membangun dalam rangka penyempurnaan. Akhir kata penulis mengharapkan, semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan jurusan matematika pada khususnya.

Surabaya, Agustus 2006

Penyusun

Tak ada sesuatu yang sempurna kecuali Dia
Hanya semangat dan doa yang bisa terpanjat
Serta dukungan orang-orang tercinta
Buat semua jadi nyata

Kupersembahkan Skripsi ini untuk
Ayah dan Ibu tercinta,
Almarhumah Emak,
serta kedua saudaraku

UCAPAN TERIMA KASIH

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyampaikan terima kasih yang takkan pernah surut untuk :

1. Allah, Tuhanku yang Maha Sempurna untuk segala nikmat untukku yang sampai akhir waktu bahkan dibangkitkan kembali takkan mampu manggantinya
2. Rasulullah Muhammad SAW yang memberikan cintanya pada manusia melalui dasar-dasar keimanan, Islam dan Uswatun Hasanah.
3. Ayah dan Ibu tercinta yang tak pernah lelah dalam doa dan dorongan, Emak Chusaeni almarhumah atas nasehat, dukungan, dan doa hingga akhir hayat, serta Masku Fuad Affandi dan Adikku Irwan Hidayat atas dukungan selama ini.
4. Bapak Ardi Kurniawan dan Bapak Sediono atas bimbingan dalam setahun terakhir sehingga saya dapat menyelesaikan skripsa ini.
5. Seluruh dosen Matematika Unair terutama Ibu Liliek dan Bapak Miswanto selaku dosen wali serta karyawan yang banyak membantu kemudahan saya dalam berkuliah (Mas Edi, Mas Milan, Mas Udin, dll).
6. Sobat-sobat seperjuanganku : Ira (cepet balik Surabaya, kangen nich!!!...ati-ati jaga diri), Dina (kerja yang bener!!), Raras (kangen jalan bareng), Eq(cepet selesein kuliah kamu), Es (semangat pantang mundur tuk slesein skripsimu ya), Yoko (jangan terlalu mikirin masalah yang g' penting), Suga (jangan banyak masalah yang penting qt wisuda bareng), Aslam (jangan malas-malas, semangat!!!). Makasih Guys buat kebersamaan qt slama ini...I will miss U all...
7. Rekan-rekan angkatan 2001 : Emi (makasih semuanya, sory ngrepotin), Hamzah atas persahabatan 'n supportnya, Hanafi (kuliah yang bener), Lelly (buat dukungan), Ira kecil, Tria, Trip, Nikhen, Ribut, Vonny, Dian kecil, Dian Gede, Yuni, Ifti, Anita, Trisni, Ipunk, Daniel, Henry, Dewi, Seha, Ida, Nina, Zumrotus, Juned, Sugeng, Dhani, Didin, Yudi.
8. Sobatku para Taruna : Ali, Ardian, Igit
9. Teman-teman RG : Yanto atas supportnya, Devi (semangat buat program, Otre!!), Dini (makasih fungsi implisitnya), Nelly, I'im, Arif 'Oyot', Fauzy, Linda, Happy, Anita, 'n teman-teman yang laennya.
10. Kakak Angkatan atas : Mbak Herlina (tetep semangat mbak!!), Mas Agung (yang rajin ngampus...biar cepet klar kuliahnya), Mas Petrus, Mas Nyamun.
11. Adek-adek angkatan 2002, 2003, 2004 dan 2005.

12. Teman-teman kosan Mulyorejo Utara III/6: Widya, Iin, Fiul, Mbak Fitri, Nelly, Mbak Indri, Mbak Dede, Rini 'n yang laen, sory banyak ngrepotin klian.
13. Semua pihak yang tak tersebut baik secara langsung maupun tak langsung memberi dukungan pada saya. Terima kasih.

ADLN - Perpustakaan Universitas Airlangga

Nita Mufidah Rahmawati, 2006. Estimasi Parameter Dari Distribusi Gamma Dengan Metode *Jackknife*. Skripsi ini di bawah bimbingan Drs. Ardi Kurniawan, M.Si dan Drs. H.Sediono, M.Si Jurusan Matematika FMIPA Universitas Airlangga.

ABSTRAK

Tujuan dari skripsi ini adalah memberikan solusi alternatif dalam menjawab permasalahan estimasi parameter distribusi Gamma. Ada dua metode yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter bentuk (α) dan parameter skala (β) dari distribusi Gamma, yaitu Metode Estimasi Maksimum *Likelihood* dan Metode *Jackknife*. Dari kedua metode akan diperoleh metode mana yang lebik baik dalam mengestimasi parameter-parameter distribusi Gamma.

Estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife* tidak dapat diselesaikan secara analitis sehingga estimator yang didapat masih dalam bentuk fungsi implisit, oleh karena itu digunakan metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan suatu persamaan implisit. Penentuan metode estimasi parameter terbaik digunakan kriteria nilai *Mean Square Error* (MSE) terkecil.

Dari studi kasus data ukuran panjang lingkar kepala anak pertama, data umur baterai mobil, dan data berat badan bayi dengan sindrom pernafasan pada saat lahir dalam keadaan hidup, diperoleh bahwa metode *Jackknife* merupakan metode estimasi parameter yang lebih baik dari metode Maksimum *Likelihood* karena mempunyai nilai MSE yang terkecil.

Kata kunci : Estimasi Parameter, Maksimum *Likelihood*, *Jackknife*, *Mean Square Error*.

Nita Mufidah Rahmawati, 2006. *The Parameters Estimation of the Gamma Distribution With Jackknife Method.* This *skripsi* is under guidance of Drs. Ardi Kurniawan, M.Si and Drs. H.Sediono, M.Si. Mathematics Major Subject of Mathematics and Natural Science Faculty. Airlangga University.

ABSTRACT

The aim of this *Skripsi* is to giving an alternative solutions in solving the Gamma distribution estimation parameter problem. There are two methods that will be used to estimate shape parameter (α) and scale parameter (β) from Gamma distribution, that is Maximum Likelihood Estimator method, and Jackknife method. From two methods will be compared to determine which one is better in estimating Gamma distribution parameters.

Estimation of Gamma distribution parameter with Maximum Likelihood Estimator method and Jackknife can not solved analytically so estimator had been found is still on implicit function form, that is why Newton-Raphson method will be used to solve it. The best estimation parameter method will be decide using the smallest Mean Square Error (MSE) value criteria.

From head length data for first sons, age data of car's batteries, and birth weight data of babies with respiratory distress syndrome who survived when they born, we obtained result that Jackknife method is a better estimation parameter method compare to of Maximum Likelihood Estimator method because it have a smallest Mean Square Error (MSE) value.

Key word : The Parameter Estimation, Maximum Likelihood Estimator, Jackknife, Mean Square Error.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL		
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI		i
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI		ii
KATA PENGANTAR		iii
ABSTRAK		iv
ABSTRACT		v
DAFTAR ISI		vi
DAFTAR TABEL		ix
DAFTAR LAMPIRAN		x
BAB I	PENDAHULUAN	
	1.1 Latar Belakang	1
	1.2 Rumusan Masalah	2
	1.3 Tujuan	3
	1.4 Manfaat	3
	1.5 Batasan Masalah	3
BAB II	TINJAUAN PUSTAKA	
	1.1 Fungsi Gamma	4
	1.2 Distribusi Gamma	6
	1.3 Parameter Skala dan Bentuk	
	2.3.1 Parameter Skala	9
	2.3.2 Parameter Bentuk	9

	2.4 Estimasi Titik	9
	2.4.1 Metode Maksimum *Likelihood*	10
	2.4.2 Metode *Jackknife*	10
	2.4.3 Metode Momen	11
	2.5 Metode Newton-Raphson	12
	2.6 Rumus Empiris	13
	2.7 *Mean Square Error* (MSE)	14
	2.8 S-Plus	14
BAB III	METODE PENULISAN	17
BAB IV	HASIL DAN PEMBAHASAN	
	4.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma	19
	4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum *Likelihood*	19
	4.1.2 Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Jackknife	23
	4.2 Perbandingan hasil estimasi dari metode-metode estimasi melalui indikator *Mean Square Error* (MSE)	27
	4.3 Penentuan nilai awal	28
	4.4 Algoritma Program	33
	4.5 Implementasi Algoritma ke Program Komputer	36
	4.6 Data	37
	4.7 Analisis Data	37

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan 43

5.2 Saran 44

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel	Judul Tabel	Halaman
4.1	Hasil-hasil analisis data I	39
4.2	Hasil-hasil analisis data II	40
4.3	Hasil-hasil analisis data III	42

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Judul Lampiran
1	Program
2	Data
3	Pengujian data berdistribusi Gamma dengan menggunakan *Software StatGraphic*
4	Proses analisis data

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistika mempunyai peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Hampir setiap bidang ilmu memakai statistika, karena statistika merupakan ilmu yang berhubungan dengan data yang selanjutnya akan diambil kesimpulan dari data yang diperoleh. Perkembangan statistika dewasa ini cukup pesat. Hal ini dapat dilihat dari makin banyaknya *software* program statistika yang digunakan untuk memenuhi kebutuhan para pemakai statistika.

Salah satu penerapan metode statistika adalah untuk mengestimasi rata-rata mesin turbojet mati ketika pesawat mengudara. Dalam kasus tersebut digunakan data yang berdistribusi Gamma-poisson (**Eghbali dan Munafo, 1999**). Pada dasarnya distribusi berperan penting untuk menentukan model penyebaran dalam suatu data statistik. Distribusi Gamma mempunyai pdf (*probability density function*) berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad dan \quad \beta > 0 \\ 0 & , \quad untuk \quad x \quad lainnya \end{cases}$$

(Walpole dan Myers,1995)

Sedangkan distribusi lain yang dapat dikembangkan dari distribusi Gamma dengan kondisi-kondisi tertentu antara lain distribusi Exponensial dengan syarat $\alpha = 1$, dan distribusi χ^2 dengan syarat $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{n}{2}$.

PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA SURABAYA

ADLN - Perpustakaan Universitas Airlangga

Dalam aplikasinya untuk mengestimasi parameter suatu distribusi sering digunakan metode Maksimum *Likelihood*. Tetapi pada kenyataannya estimasi parameter yang dihasilkan oleh Maksimum *Likelihood* sering bias, dan karena itu penaksir tersebut masih dapat diperbaiki dalam artian biasnya diperkecil. Seiring hal tersebut telah banyak metode statistika yang ditawarkan untuk menaksir parameter yang relatif dapat mengurangi bias. Salah satu metode statistik yang dapat digunakan dalam penaksiran parameter sedemikian hingga dapat memperkecil bias taksiran parameter adalah metode *Jackknife* (**Dudewicz dan Mishra, 1995**).

1.2 Rumusan masalah

Berdasarkan uraian tersebut di atas permasalahan yang akan dibahas, adalah sebagai berikut :

1. Bagaimanakah bentuk hasil estimasi parameter distribusi Gamma tersebut apabila digunakan metode *Jackknife* ?
2. Bagaimana perbandingan nilai estimator parameter distribusi Gamma dengan metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife*?
3. Bagaimana menerapkan hasil yang diperoleh pada data sekunder?

ADLN - Perpustakaan Universitas Airlangga

1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan ini adalah :

1. Menentukan estimator parameter dari distribusi Gamma dengan menggunakan metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife*.
2. Membandingkan metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife* dengan menggunakan *Mean Square Error* yang diterapkan pada data sekunder.

1.4 Manfaat

Penulisan ini diharapkan :

1. Menambah wawasan tentang penggunaan penaksir *Jackknife* dalam penaksiran parameter distribusi Gamma.
2. Mendapatkan estimator dari parameter distribusi Gamma.

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan ini adalah mendapatkan estimator distribusi Gamma dengan metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife*.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.1.2

Fungsi Gamma dapat didefinisikan untuk $\alpha > 0$ maka $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan dengan integral :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \tag{2.1}$$

(DeGroot, 1989)

Teorema 2.1.2

Jika $\alpha > 1$ maka $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ (2.2)

(DeGroot, 1989)

Bukti :

Dengan menggunakan definisi 2.1.2. Misalkan $u = x^{\alpha-1}$ dan $dv = e^{-x}dx$ maka $du = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}dx$ dan $v = -e^{-x}$ sehingga

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty u dv$$

$$= [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du$$

$$= \left[-x^{\alpha-1} e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}(\alpha - 1)x^{\alpha-2} dx$$

$$= \left[-x^{\alpha-1}e^{-x}\right]_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$= 0 + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Teorema 2.1.3

Jika $\alpha > 0$ dengan α bilangan bulat positif maka

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \qquad (2.3)$$

(DeGroot, 1989)

Bukti :

Dengan mengikuti teorema sebelumnya untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)$$

$$= (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots 1\,\Gamma(1)$$

$$= (\alpha-1)!\ \Gamma(1)$$

Kemudian dengan definisi 2.1.1 diperoleh :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}\,|_0^\infty$$

$$= -e^{\infty} - (-e^{0})$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

Sehingga $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, untuk $\alpha = 2,3,\ldots$

2.2 Distribusi Gamma

Definisi 2.2.1

Peubah acak kontinu X berdistribusi Gamma,dengan parameter α dan β, jika pdf (*probability density function*) berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , \quad x > 0 \\ 0 \quad , \quad untuk \quad x \quad lainnya \end{cases} \tag{2.4}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

(Walpole dan Myers,1995)

sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Gamma dua parameter adalah:

$$\mathrm{F(x)} = \int_0^x \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \tag{2.5}$$

(Bain dan Engelhardt, 1992)

Teorema 2.2.1

Mean dan varians distribusi Gamma adalah

$$\mu = \alpha\beta \text{ dan } \sigma^2 = \alpha\beta^2 \tag{2.6}$$

(Walpole dan Myers,1995)

Bukti :

1. Untuk mencari mean

$$\mu = E(x) = \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Misalkan $y = \frac{x}{\beta}$ dan $dy = \frac{dx}{\beta}$, $\beta dy = dx$ maka

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} \beta dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta \alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \alpha\beta$$

2. Untuk mencari varians

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{\beta}{\beta}\frac{x^{\alpha+1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha+1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

Misalkan $y=\frac{x}{\beta}$ **maka** $dy=\frac{dx}{\beta}$, $\beta dy = dx$ **maka**

$$E(x^2)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y}\beta dy$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y}dy$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$=(\alpha+1)\alpha\beta^2$$

Sehingga

$$\sigma^2 = E(x^2)-(E(x))^2$$

$$=(\alpha+1)\alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha\beta^2$$

2.3 Parameter Skala dan Bentuk

2.3.1 Parameter Skala

θ adalah parameter skala jika mempunyai bentuk :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} f_0(\frac{x}{\theta}) \tag{2.7}$$

dengan f_0 merupakan pdf (*probability density function*)

2.3.2 Parameter Bentuk

α adalah parameter bentuk distribusi Gamma dari persamaan 2.4. Jika parameter tersebut menentukan bentuk grafik dari pdf (*probability density function*) distribusi Gamma.

(Bain dan Engelhardt, 1992)

2.4 Estimasi Titik

Definisi 2.4.1

Jika terdapat nilai dari beberapa statistik $t(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ yang mewakili atau mengestimasi parameter θ yang tidak diketahui, maka setiap statistik $t(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ disebut estimator titik.

(Graybill et.al. , 1963)

Dalam analisis statistik terdapat beberapa metode untuk mengestimasi parameter, diantaranya adalah metode Maksimum *Likelihood*, metode *Jackknife*, metode Momen dan metode Newton-Raphson.

2.4.1 Metode Maksimum *Likelihood*

Definisi 2.4.2

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi dengan pdf (*probability density function*) $f(x, \theta)$, untuk $\theta \in \Omega$, dengan Ω ruang parameter. Pdf (*probability density function*) bersama antara $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $f(x_1; \theta), \ldots, f(x_n; \theta)$. Jika pdf (*probability density function*) tersebut dinyatakan sebagai fungsi terhadap θ maka dinamakan fungsi *Likelihood* yang dinotasikan L atau ditulis :

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \theta) \qquad (2.8)$$

dengan $\theta \in \Omega$.

Definisi 2.4.3

Jika statistik $\hat{\theta} = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ memaksimumkan $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\theta \in \Omega$, dengan Ω ruang parameter, maka statistik $\hat{\theta} = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dinamakan Maksimum *Likelihood Estimator* (MLE) dari θ.

(Hogg dan Craig, 1995)

2.4.2 Metode *Jackknife*

Misalkan dipunyai data sampel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pada prinsipnya metode *Jackknife* adalah melakukan penghitungan estimator $\hat{\theta}_i$ dari sebuah sampel (berukuran n) secara berulang dengan cara menghilangkan pengamatan ke-i, i = 1,2,..,n. Dari prinsip ini, maka $\hat{\theta}_i$ adalah estimator yang diperoleh dari data :

$X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ (data ke X_i tidak digunakan).

Untuk $i = 1,2,\ldots,n$, bentuk nilai semu dari *Jackknife*:

$$J_i = n\hat{\theta} - (n-1)\,\hat{\theta}_i \tag{2.9}$$

dan

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_i) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\hat{\theta}}_i \tag{2.10}$$

dengan

$$\bar{\hat{\theta}}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i$$

Definisi 2.4.4

$J(\hat{\theta})$ disebut estimator *Jackknife* untuk θ dengan persamaan

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_i) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\hat{\theta}}_i \tag{2.11}$$

(Dudewicz dan Mishra, 1995)

Dalam penggunaan metode Newton-Raphson diperlukan suatu nilai awal dari variabelnya. Adapun metode penentuan nilai awal dapat memakai cara metode Momen.

2.4.3 Metode Momen

Misalkan X adalah variabel acak yang mempunyai fungsi densitas $f(x\,;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ dimana θ_k mewakili parameter ke-k. Jika μ_t adalah momen ke-t dari $f(x\,;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ maka $\mu_t = \int_{-\infty}^{\infty} x^t f(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)dx$. Jadi μ_t merupakan

fungsi k parameter, sehingga μ_t dapat ditulis $\mu_t = \mu_t\ (\theta_1,\ldots, \theta_k)$. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak berukuran n dari $f(x\ ;\ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Bentuk momen sampel ke-t adalah

$$m_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,t}$$

Estimator metode Momen $\hat{\theta}_i$, i = 1, 2, …, k dari $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ dalam bentuk $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

$$m_t = \mu_t(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \quad t = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.12}$$

(Mann, et.al, 1974)

2.5 Metode Newton – Raphson

Dalam pengestimasian suatu parameter terkadang didapatkan suatu bentuk yang implisit sehingga diperlukan suatu metode numerik salah satunya adalah metode Newton-Raphson. Menurut **Ayres (1964)** metode Newton-Raphson bisa juga dikembangkan dari perluasan deret Taylor. Adapun perluasan deret Taylor disekitar $x_{n+1} = x_n$ dapat dinyatakan sebagai :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x_{n+1} - x_n) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_n)}{(n-1)!}(x_{n+1} - x_n)^{(n-1)} + R_n(x) \tag{2.13}$$

dengan : $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

Dengan memotong deret setelah suku turunan pertama, diperoleh sebuah pendekatan sebagai berikut:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{2.14}$$

Jika x_{n+1} merupakan akar dari $f(x_{n+1})$, maka $f(x_{n+1})$ akan sama dengan nol atau:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{2.15}$$

Sehingga diperoleh metode Newton-Raphson adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.16}$$

Metode Newton-Raphson mempunyai langkah-langkah sebagai berikut:

1. Masukkan nilai awal x_0
2. Tentukan persamaan fungsi $f(x)$ dan turunan pertamanya
3. Masukkan persamaan fungsi $f(x)$ dan turunan pertamanya ke dalam rumus Newton-Raphson hingga error < ε, dengan ε nilai bilangan positif terkecil , sehingga diperoleh nilai akar fungsi.

2.6 Rumus Empiris

Estimasi fungsi distribusi kumulatif yang didasarkan sepenuhnya pada data diartikan sebagai rumus empiris.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan nilai suatu data. Suatu order statistik diberikan dengan susunan nilai data yang meningkat, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$. Rumus empiris fungsi distribusi kumulatif yang didasarkan pada data yang telah diurutkan tersebut dinyatakan sebagai $F(x_{(i)})$.

Rumus empiris $F(x_{(i)}) = \dfrac{i - 0.5}{n}$ (2.17)

pada umumnya digunakan untuk sampel besar ($n > 20$)

dan

$$F(x_{(i)}) = \frac{(i-0.3)}{(n+0.4)} \tag{2.18}$$

sering digunakan untuk sampel kecil ($n \leq 20$).

(Wolstenholme, 1999)

2.7 *Mean Square Error* (MSE)

Jika $\hat{F}(x_i)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dan $F(x_i)$ merupakan fungsi empiris distribusi kumulatif, maka rumus *Mean Square Error* (MSE) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$MSE = \sum_{i=1}^{n} \{\hat{F}(x_i) - F(x_i)\}^2 \tag{2.19}$$

(Al Fawzan,2000)

2.8 S-PLUS

Dalam **Everitt (1994)** disebutkan bahwa S-PLUS adalah suatu paket program yang memungkinkan membuat program sendiri walaupun didalamnya sudah tersedia banyak program internal yang siap digunakan. Kelebihan dari paket ini adalah baik program internal maupun program yang pernah dibuat dapat digunakan sebagai sub program dari program yang akan dibuat.

Beberapa perintah internal yang digunakan dalam S-PLUS

a. function ( )

function ( ) digunakan untuk untuk menunjukkan fungsi yang akan digunakan dalam program.

Bentuk

function( )

b. length ( )

length ( ) merupakan perintah untuk menunjukkan banyaknya data

Bentuk

length( )

c. rep(a,b)

rep(...,...) digunakan untuk membentuk sebuah vektor yang anggotanya a sebanyak b.

Bentuk

rep(...,...)

d. for (i in 1:n)

for(... in...:...) digunakan untuk melakukan perulangan sebanyak n kali.

Bentuk

for(... in...:...)

e. abs(...)

abs(...) digunakan untuk membuat harga mutlak dari suatu bilangan.

Bentuk

abs(...)

ADLN - Perpustakaan Universitas Airlangga

f. sum(...)

sum(...) digunakan untuk menjumlahkan semua bilangan anggota dari suatu vektor.

Bentuk

sum(...).

BAB III

METODE PENULISAN

Dalam penulisan ini, langkah-langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Penelusuran pustaka yang berkaitan dengan estimasi parameter, distribusi Gamma, metode Maksimum *Likelihood*, metode *Jackknife*.
2. Mengestimasi parameter distribusi Gamma menggunakan metode Maksimum *Likelihood* dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   a. Menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi Gamma.
   b. Me-log-kan fungsi *likelihood* tersebut.
   c. Mendifferensialkan hasil log-*likelihood* tersebut terhadap parameter distribusi Gamma.
   d. Hasil dari differensial tersebut disama-dengankan nol sebagai syarat perlu untuk memaksimumkan fungsi log-*likelihood* dan diselesaikan.
   e. Mendapatkan estimator dari parameter-parameter distribusi Gamma.
   f. Melakukan pendekatan numerik karena pada langkah (e) diperoleh persamaan yang masih berbentuk implisit.
3. Mengestimasi parameter distribusi Gamma menggunakan metode *Jackknife*.
   a. Menaksir estimator $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ berdasarkan metode MLE.
   b. Menentukan $\hat{\alpha}_i$ dan $\hat{\beta}_i$ (i = 1,2,...,n) dengan melakukan penghitungan estimator dari sebuah sampel (berukuran n) secara berulang dengan cara menghilangkan pengamatan ke-i.

c. Melakukan pendekatan numerik karena pada langkah (b) diperoleh bentuk yang implisit.

d. Mencari mean dari $\hat{\alpha}_i$ dan $\hat{\beta}_i$.

e. Hasil yang diperoleh dimasukkan kedalam definisi *Jackknife*.

f. Didapat estimator parameter Gamma yang baru.

4. Membandingkan hasil estimasi melalui indikator *Mean Square Error* dengan langkah-langkah sebagai berikut :

   a. Menghitung fungsi distribusi kumulatif dengan kedua metode.

   b. Menghitung *Mean Square Error* dari fungsi distribusi kumulatif pada kedua metode.

   c. Membandingkan *Mean Square Error* dari fungsi distribusi kumulatif tersebut.

   d. Menentukan metode estimasi terbaik dari distribusi kumulatif yang didapat (dengan melihat nilai *Mean Square Error* yang paling kecil)

5. Membuat program dengan *software* statistik untuk menerapkan hasil-hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode *Jackknife* :

   a. Membuat algoritma.

   b. Membuat program dengan *software* statistik S-Plus.

   c. Menerapkan program pada data sekunder.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma

Dalam mengestimasi parameter-parameter pada distribusi Gamma dapat digunakan beberapa metode. Pada penulisan ini akan digunakan dua metode yaitu metode maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife*.

Berikut ini pengestimasian parameter distribusi Gamma dengan menggunakan metode-metode yang telah disebutkan di atas :

4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Dalam mengestimasi parameter distribusi Gamma dengan menggunakan metode Maksimum *Likelihood*, langkah awal yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi *Likelihood* distribusi Gamma. Dengan menggunakan persamaan (2.4) dan (2.8)

$$L(\alpha,\beta;x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\alpha,\beta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}$$

$$= (\beta)^{-n\alpha}(\Gamma(\alpha))^{-n} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\alpha-1} \qquad (4.1)$$

Fungsi *Likelihood* yang diperoleh kemudian di-ln-kan sehingga

$$\ln L = \ln(\beta)^{-n\alpha} + \ln(\Gamma(\alpha))^{-n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + \ln\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{\alpha-1}$$

$$= -(n\alpha)\ln\beta - n\ln(\Gamma(\alpha)) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \qquad (4.2)$$

Selanjutnya fungsi ln *Likelihood* dideferensialkan secara parsial terhadap masing-masing parameternya yaitu α dan β, didapat

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -n\ln\beta - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta^2} \qquad (4.4)$$

Kemudian hasil diferensial disamadengankan nol sehingga persamaan (4.3) menjadi

$$-n\ln\hat{\beta} + n\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0 \qquad (4.5)$$

Dan persamaan (4.4) menjadi

$$-\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\beta}^2} = 0 \qquad (4.6)$$

Berdasarkan **DeGroot (1989)**, $\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})}$ disebut fungsi digamma

Selanjutnya persamaan (4.5) dan (4.6) diselesaikan dan penyelesaiannya adalah sebagai berikut

Untuk persamaan (4.6) dapat ditulis

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\beta}^2} = \frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \tag{4.7}$$

Dari persamaan (4.7) akhirnya diselesaikan dan didapatkan persamaan estimator

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}} \tag{4.8}$$

Sedangkan persamaan (4.5) dapat ditulis

$$n\ln\hat{\beta} + n\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{4.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.8) pada persamaan (4.9) maka persamaan menjadi

$$n\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}} + n\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{4.10}$$

Persamaan (4.10) tidak dapat diselesaikan secara analitis, oleh karena itu diperlukan suatu metode numerik untuk menyelesaikannya. Dalam kasus ini akan digunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimasi parameter α. Menurut persamaan (2.15) metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut :

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \hat{\alpha}_n - \frac{f(\hat{\alpha}_n)}{f'(\hat{\alpha}_n)} \qquad , n = 0,1,2,\ldots$$

Metode Newton-Raphson mempunyai langkah- langkah sebagai berikut :

Langkah I :

Menentukan nilai awal ($\hat{\alpha}_0$)

Langkah II :

Menentukan persamaan fungsi $f(\hat{\alpha})$ dan turunan pertamanya ($f'(\hat{\alpha})$).

Misalkan fungsi pada persamaan (4.10) dipakai sebagai $f(\hat{\alpha})$, maka :

$$f(\hat{\alpha}) = -n\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}\right) - \frac{n\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad (4.11)$$

Dan turunan pertama ($f(\hat{\alpha})$) terhadap $\hat{\alpha}$ yaitu :

$$f'(\hat{\alpha}) = \frac{n}{\hat{\alpha}} - n\frac{d}{d\hat{\alpha}}\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})}$$

$$= \frac{n}{\hat{\alpha}} - n\,\Psi_1(\hat{\alpha})$$

Berdasarkan Weisstein (2006), $\Psi_1(\hat{\alpha})$ disebut fungsi PolyGamma(1,$\hat{\alpha}$) dan $\Psi_1(\hat{\alpha})$ dapat dituliskan pula sebagai :

$$\Psi_1(\hat{\alpha}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\hat{\alpha}+k)^2}$$

Dengan $f'(\hat{\alpha})$ dapat dinyatakan dengan :

$$f'(\hat{\alpha}) = \frac{n}{\alpha} - nPolyGamma(1,\alpha) \qquad (4.12)$$

Langkah III :

Memasukkan persamaan fungsi $f(\hat{\alpha})$ dan turunan pertamanya ($f'(\hat{\alpha})$) ke dalam rumus Newton- Raphson hingga $\left|\frac{f(\hat{\alpha})}{f'(\hat{\alpha})}\right| < \varepsilon$ sehingga diperoleh nilai akar fungsi.

Pada langkah III ini akan diselesaikan dengan menggunakan program S-PLUS hingga didapatkan nilai estimator $\hat{\alpha}$.

Selanjutnya nilai estimator $\hat{\alpha}$ yang telah didapatkan dari langkah III, disubstitusikan pada persamaan (4.7) sehingga didapatkan nilai estimator $\hat{\beta}$.

4.1.2 Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Jackknife*

Setelah mendapatkan estimator dari distribusi Gamma dengan menggunakan metode Maksimum *Likelihood*.

Sekarang akan dikonstruksi rumus untuk estimator distribusi Gamma dengan menggunakan metode resampling *Jackknife*.

Misalkan tersedia sampel asal berukuran n yang dapat dituliskan :

$$\{ x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n \}$$

Maka metode *Jackknife* akan memberikan sampel-sampel berikut ini :

Sampel *Jackknife* ke-1 : $\{ x_2, x_3, x_4, ..., x_n \}$

Sampel *Jackknife* ke-2 : $\{ x_1, x_3, x_4, ..., x_n \}$

Sampel *Jackknife* ke-3 : $\{ x_1, x_2, x_4, ..., x_n \}$

.

.

.

Sampel *Jackknife* ke-n : $\{ x_1, x_2, x_4, ..., x_{n-1} \}$

Masing –masing sampel *Jackknife* di atas hanya berukuran sejumlah (n-1) data amatan yang diperoleh dari sampel asal, sehingga dengan menerapkan metode Maksimum *Likelihood* terhadap beberapa sampel *Jackknife* tersebut dapat diturunkan bentuk rumus estimator sebagai berikut :

Berdasarkan persamaan (4.8) diperoleh estimator $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}$ (4.13)

Pada sisi lain misalkan $\hat{\beta}_i$ adalah estimator dari β dengan menghilangkan pengamatan ke-i maka :

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i}^{n} \frac{x_j}{\hat{\alpha}} \quad , i = 1, 2, 3, ..., n \tag{4.14}$$

Dan untuk memudahkan perhitungan dapatkan disederhanakan menjadi bentuk berikut :

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{\hat{\alpha}(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - x_i\right)$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j - x_i}{\hat{\alpha}(n-1)} \tag{4.15}$$

Kemudian dicari rata-rata dari $\hat{\beta}_i$

$$\overline{\hat{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j - x_i}{\hat{\alpha}(n-1)}\right) \tag{4.16}$$

Persamaan (4.16) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\bar{\hat{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\hat{\alpha}(n-1)} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\hat{\alpha}(n-1)}$$

$$= \frac{n}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\hat{\alpha}(n-1)} - \frac{1}{\hat{\alpha}(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$= \frac{n}{\hat{\alpha}(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n} - \frac{1}{\hat{\alpha}(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$= \frac{n}{\hat{\alpha}(n-1)}\bar{x} - \frac{1}{\hat{\alpha}(n-1)}\bar{x}$$

$$= \frac{(n-1)\bar{x}}{\hat{\alpha}(n-1)} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \qquad (4.17)$$

Memasukkan persamaan (4.13) dan (4.17) kedalam definisi *Jackknife* (2.11) yaitu :

$$J(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\hat{\theta}}$$

Sehingga diperoleh

$$J(\hat{\beta}) = n\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} - (n-1)\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$$

$$= \frac{n\bar{x}}{\hat{\alpha}} - \frac{n\bar{x}}{\hat{\alpha}} + \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$$

$$= \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \qquad (4.18)$$

Jadi estimator *Jackknife* untuk $\hat{\beta}$, yaitu $J(\hat{\beta}) = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$, selanjutnya untuk penentuan estimator *Jackknife* untuk $\hat{\alpha}$ akan digunakan persamaan (4.9) dari metode Maksimum *Likelihood.* Estimator *Jackknife* untuk $\hat{\alpha}_i$ diperoleh dengan menghilangkan pengamatan ke-*i*, sehingga :

$$(n-1)\ln\left(\frac{\sum_{j\neq i}^{n} x_j}{(n-1)\hat{\alpha}}\right)+\frac{(n-1)\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})}=\sum_{j\neq i}^{n}\ln x_j \tag{4.19}$$

Persamaan (4.19) tidak dapat diselesaikan secara analitis, oleh karena diperlukan suatu metode numerik untuk menyelesaikannya. Dalam kasus ini akan dipakai metode Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimasi parameter α. Menurut persamaan (2.15) metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut :

$$\hat{\alpha}_{n+1}=\hat{\alpha}_n-\frac{f(\hat{\alpha}_n)}{f'(\hat{\alpha}_n)} \qquad ,n=0,1,2,\ldots$$

Metode Newton-Raphson mempunyai langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah I :

Menentukan nilai awal ($\hat{\alpha}_0$)

Langkah II :

Menentukan persamaan fungsi $f(\hat{\alpha}_n)$ dan turunan pertamanya ($f'(\hat{\alpha}_n)$) dari masing-masing sampel *Jackknife*. Misalkan fungsi pada persamaan (4.18) dipakai sebagai $f(\hat{\alpha}_n)$, maka :

$$f(\hat{\alpha}_n)=-(n-1)\ln\left(\frac{\sum_{j\neq i}^{n} x_j}{(n-1)\hat{\alpha}_n}\right)-\frac{(n-1)\Gamma'(\hat{\alpha}_n)}{\Gamma(\hat{\alpha}_n)}+\sum_{j\neq i}^{n}\ln x_j$$

Dan turunan pertamanya ($f(\hat{\alpha}_n)$) terhadap $\hat{\alpha}_n$ yaitu

$$f'(\hat{\alpha}_n)=\frac{(n-1)}{\hat{\alpha}_n}-(n-1)PolyGamma(1,\hat{\alpha}_n)$$

Langkah III :

Memasukkan persamaan fungsi $f(\hat{\alpha}_n)$ dan turunan pertamanya ($f'(\hat{\alpha}_n)$) ke dalam rumus Newton-Raphson hingga $\left|\frac{f(\hat{\alpha}_n)}{f'(\hat{\alpha}_n)}\right| < \varepsilon$ sehingga diperoleh nilai akar fungsi.

Pada langkah III ini akan diselesaikan dengan menggunakan program S-PLUS hingga didapatkan nilai estimator $\hat{\alpha}$ dari masing-masing sampel *Jackknife*.

Langkah IV :

Menentukan $\bar{\hat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i}{n}$

Langkah V :

Memasukkan $\hat{\alpha}_0$ dan $\bar{\hat{\alpha}}$ kedalam rumus *Jackknife*

$$J(\hat{\alpha}) = n\hat{\alpha}_0 - (n-1)\bar{\hat{\alpha}}$$

Selanjutnya nilai estimator $\hat{\alpha}$ yaitu $J(\hat{\alpha})$ yang telah didapatkan dari langkah V, disubstitusikan pada persamaan (4.18) sehingga didapatkan nilai estimator $\hat{\beta}$.

4.2 Perbandingan hasil estimasi dari metode-metode estimasi melalui indikator *Mean Square Error* (MSE)

Setelah dilakukan pengestimasian dengan dua metode yaitu metode Maksimum *Likelihood* dan metode *Jackknife*, maka didapatkan beberapa estimator dari masing-masing metode pengestimasian. Nilai-nilai estimator akan

didapatkan jika dua metode tersebut diterapkan pada data. Melalui penerapan terhadap data, dua metode estimasi tersebut akan dibandingkan dan ditentukan metode estimasi yang terbaik.

Dalam penulisan ini untuk menentukan metode estimasi yang terbaik, digunakan nilai *Mean Square Error* dari masing-masing metode estimasi. *Mean Square Error* yang paling kecil merupakan indikator dari metode estimasi yang terbaik. Berdasarkan persamaan (2.5), jika $\hat{F}(x_i)$ merupakan estimator fungsi distribusi kumulatif yaitu :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

yang akan dicari menggunakan *software* S-Plus karena fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Gamma tidak mempunyai penyelesaian tertutup apabila α bukan suatu bilangan bulat dan $F(x_i)$ merupakan fungsi empiris distribusi kumulatif, maka rumus *Mean Square Error* (MSE) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \hat{F}(x_i) - F(x_i) \right\}^2 \tag{4.19}$$

4.3 Penentuan nilai awal

Pada penentuan estimator metode estimasi Maksimum *Likelihood* telah dibahas dan diperoleh sebuah persamaan yang tidak bisa diselesaikan secara langsung terhadap α. Oleh karena itu diperlukan metode Newton-Raphson untuk menyelesaikannya sehingga dapat diperoleh nilai estimasi α.

Dalam penggunaannya, metode Newton-Raphson memerlukan nilai awal dari variabelnya dan pada kasus ini adalah nilai awal α. Adapun metode penentuan nilai awal dipakai metode Momen yaitu nilai awal diambil dari estimator metode Momen.

Metode Momen pada prinsipnya menyamakan antara momen populasi dan momen sampel. Momen pertama dan kedua dari sampel yaitu :

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.20}$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{4.21}$$

Kemudian menentukan momen pertama dan kedua dari populasi. Dari $f(x)$ didapatkan momen pertama populasi yaitu :

$$\begin{aligned}\mu_1 = E(x) &= \int_0^\infty x f(x)dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)} dx \end{aligned} \tag{4.22}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.22) diperlukan pemisalan dari sebagian komponen integral yaitu : $\frac{x}{\beta} = y$ dan $\beta dy = dx$

Kemudian hasil pemisalan disubstitusikan ke persamaan (4.23) sehingga didapatkan persamaan baru sebagai berikut :

$$\mu_1 = E(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} \beta dy \tag{4.23}$$

Untuk mendapatkan μ_1, persamaan (4.24) diselesaikan dengan uraian sebagai berikut :

$$\mu_1 = E(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} \beta dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \alpha\beta \tag{4.24}$$

Sedangkan momen kedua populasi dari $f(x)$ adalah :

$$\mu_2 = E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta} \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}dx \tag{4.25}$$

Seperti langkah untuk mendapatkan μ_1, μ_2 didapatkan dengan uraian sebagai berikut :

$$\mu_2=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y}\beta dy$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y}dy$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$=(\alpha+1)\alpha\beta^2 \tag{4.26}$$

Setelah momen sampel dan momen populasi didapatkan, langkah selanjutnya yaitu momen sampel disamadengankan momen populasi. Berdasarkan estimasi metode Momen pada persamaan (2.12), maka didapatkan

$m_1 = \mu_1$ sehingga didapatkan $\bar{x}=\hat{\alpha}\hat{\beta}$ atau dapat ditulis

$$\hat{\beta}=\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \tag{4.27}$$

dan $m_2 = \mu_2$ sehingga didapatkan

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=(\hat{\alpha}+1)\hat{\alpha}\hat{\beta}^2 \tag{4.28}$$

Kemudian persamaan (4.27) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.28) sehingga

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\hat{\alpha}+1)\hat{\alpha}\left(\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}\right)^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\hat{\alpha}+1)\hat{\alpha}\left(\frac{\bar{x}^2}{\hat{\alpha}^2}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{\hat{\alpha}+1}{\hat{\alpha}}(\bar{x})^2$$

Kemudian kedua ruas dikalikan silang menjadi

$$\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n(\hat{\alpha}+1)(\bar{x})^2$$

$$\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n(\bar{x})^2\hat{\alpha} + n(\bar{x})^2$$

atau dapat ditulis

$$\hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\hat{\alpha} = n(\bar{x})^2$$

$$\hat{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n(\bar{x})^2\right) = n(\bar{x})^2$$

sehingga didapatkan $\hat{\alpha}$ dalam fungsi x sebagai berikut

$$\hat{\alpha} = \frac{n(\bar{x})^2}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n(\bar{x})^2\right)} \qquad (4.29)$$

Jika persamaan (4.29) disubstitusikan kedalam persamaan (4.27) maka didapat

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\dfrac{n(\bar{x})^2}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n(\bar{x})^2\right)}}$$

$$= \frac{\bar{x}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n(\bar{x})^2\right)}{n(\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n(\bar{x})^2\right)}{n(\bar{x})}$$

4.4 Algoritma Program

Algoritma dibuat berdasarkan teori-teori yang telah dibahas di sub bab sebelumnya. Pada pembahasan skripsi ini akan dibuat 3 algoritma yaitu :

1. Algoritma untuk menentukan nilai estimasi dengan metode Maksimum *Likelihood*

a. Masukkan data sekunder

b. Masukkan fungsi implisit yang diperoleh dari penentuan estimator

$$f(\hat{\alpha}) = -n \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}\right) - \frac{n\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

c. Masukkan fungsi turunan dari fungsi implisit tersebut

$$f'(\hat{\alpha}) = \frac{n}{\alpha} - nPolyGamma(1,\alpha)$$

e. Masukkan ke rumus Newton-Raphson

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \hat{\alpha}_n - \frac{f(\hat{\alpha}_n)}{f'(\hat{\alpha}_n)} \text{ hingga error} < \varepsilon$$

f. Cetak nilai akar / nilai estimasi dari tiap $\hat{\alpha}$

g. Masukkan ke rumus $\overline{\hat{\alpha}}$

$$\overline{\hat{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i}{n}$$

h. Masukkan $\hat{\alpha}$ dari metode Maksimum *Likelihood* dan $\overline{\hat{\alpha}}$

i. Masukkan ke rumus *Jackknife*

$$J(\hat{\alpha}) = n\hat{\alpha}_{MLE} - (n-1)\overline{\hat{\alpha}}$$

j. Masukkan persamaan dari estimator $\hat{\beta}$ yang diperoleh

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}$$

k. Masukkan nilai estimasi $\hat{\alpha}$ ke dalam persamaan estimator $\hat{\beta}$ sehingga didapatkan nilai estimasinya.

3. Algoritma untuk menentukan nilai *Mean Square Error* (MSE)

a. Masukkan data sekunder

b. Masukkan rumus MSE nya

$$\text{MSE} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\hat{F}(x_i) - F(x_i)\right\}^2$$

c. Hitung fungsi distribusi kumulatif $\hat{F}(x_i)$ yang didapat dari persamaan (2.5) dan $F(x_i)$ yang didapat dari persamaan (2.15) untuk masing-masing metode. Masukkan nilai-nilai estimasi yan telah diperoleh dari masing-masing metode ke dalam rumus MSE

d. Bandingkan nilai-nilai MSE yang diperoleh dari langkah c.

4.5 Implementasi Algoritma ke Program Komputer

Program komputer dalam pembahasan skripsi ini dibuat dengan menggunakan paket program S-Plus. Algoritma yang telah disusun akan dijabarkan ke dalam 3 program (lihat lampiran 1).

1 Program 1 untuk menentukan nilai estimator dengan metode Maksimum *Likelihood*.

2 Program 2 untuk menentukan nilai estimator dengan metode *Jackknife*.

3 Program 3 untuk menentukan nilai *Mean Square Error* bagi masing-masing metode estimasi.

Selainkan tiga program utama yang telah disebutkan di atas, dalam skripsi ini juga terdapat program tambahan sebagai pendukung dari program utama (lihat lampiran 1). Program tambahan tersebut sebagai berikut :

1 Program 4 untuk menentukan nilai estimator dengan metode Momen yang akan digunakan sebagai nilai awal dalam Maksimum *Likelihood*.

2 Program 5 untuk mencari nilai *PolyGamma*.

4.6 Data

Program yang telah dibuat akan diuji coba menggunakan data sekunder, dan dalam pembahasan ini dipilih data sebagai berikut :

a. Data I tentang ukuran panjang lingkar kepala anak pertama (dalam milimeter). Data ini diperoleh dari kelahiran anak pertama dari 25 keluarga **(Everitt, 2001)**.

b. Data II tentang umur baterai mobil dengan garansi 3 tahun. Data ini diperoleh dari 40 baterai mobil **(Walpole dan Myers, 1986)**.

c. Data III tentang berat badan bayi dengan sindrom pernafasan pada saat lahir dalam keadaan hidup (dalam kilogram). Data ini diperoleh dari kelahiran anak dari 23 keluarga **(Everitt, 2001)**.

4.7 Analisis Data

❖ **Data I**

I. Metode Maksimum *Likelihood*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 1 (MLE) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 459.5847

$\hat{\beta}$: 0.4068891

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{MLE} : 5,020098

II. Metode *Jackknife*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 2 (*Jackknife*) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 397.6654

$\hat{\beta}$: 0.4702446

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{Jack} : 4,834767

III. Metode Momen

a. Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 4 (Momen) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 459.6346

$\hat{\beta}$: 0.4068449

b. Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{momen} : 5.020237

Agar lebih ringkas akan dibuat tabel yang menunjukkan hasil-hasil lengkap estimasi parameter bentuk (α) dan parameter skala (β) serta nilai *Mean Square Error* (MSE) untuk setiap metode

Tabel 4.1. Hasil-hasil analisis data I

Metode	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	MSE
MLE	459.5847	0.4068891	5.020098
Jackknife	397.6654	0.4702446	4.834767
Momen	459.6346	0.4068449	5.020237

❖ **Data II**

I. Metode Maksimum *Likelihood*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 1 (MLE) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 24.18046

$\hat{\beta}$: 0.1411264

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{MLE} : 5.551576

II. Metode *Jackknife*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 2 (*Jackknife*) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 18.73643

$\hat{\beta}$: 0.1821318

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{Jack} : 5.37013

III. Metode Momen

a. Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 4 (Momen) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 24.18046

$\hat{\beta}$: 0.1411264

b. Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{momen} : 5.720209

Agar lebih ringkas akan dibuat tabel yang menunjukkan hasil-hasil lengkap estimasi parameter bentuk (α) dan parameter skala (β) serta nilai *Mean Square Error* (MSE) untuk setiap metode

Tabel 4.2. Hasil-hasil analisis data II

Metode	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	MSE
MLE	24.18046	0.1411264	5.551576
Jackknife	18.73643	0.1821318	5.37013
Momen	24.18046	0.1411264	5.720209

❖ **Data III**

I. Metode Maksimum *Likelihood*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 1 (MLE) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 12.20483

$\hat{\beta}$: 0.1890556

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{MLE} : 2.402364

II. Metode *Jackknife*

a Nilai estimator alfa dan beta diperoleh dengan menggunakan program 2 (*Jackknife*) yaitu :

$\hat{\alpha}$: 10.80751

$\hat{\beta}$: 0.213499

b Nilai *Mean Square Error* diperoleh dengan menggunakan program 3 (MSE) yaitu :

MSE_{Jack} : 2.311571

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada penulisan ini dapat disimpulkan bahwa :

1. a. MLE untuk α pada distribusi GAM (α,β) merupakan penyelesaian persamaan :

$$n\ln\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\hat{\alpha}} + n\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

b. MLE untuk β pada distribusi GAM (α,β) adalah :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\hat{\alpha}}$$

c. Estimor *Jackknife* untuk α pada distribusi GAM (α,β) merupakan penyelesaian persamaan :

$$(n-1)\ln\left(\frac{\sum_{j\neq i}^{n}x_j}{(n-1)\hat{\alpha}}\right) + \frac{(n-1)\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})} = \sum_{j\neq i}^{n}\ln x_j$$

d. Estimor *Jackknife* untuk β pada distribusi GAM (α,β) adalah :

$$J(\hat{\beta}) = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$$

2. Dari beberapa data pada skripsi ini menunjukkan bahwa metode *Jackknife* adalah metode yang lebih baik dalam mengestimasi parameter-parameter distribusi Gamma dibandingkan dengan menggunakan metode Maksimum *Likelihood* karena mempunyai nilai *Mean Square Error* terhadap fungsi distribusi kumulatif yang paling kecil.

5.2 Saran

Adapun saran yang perlu disampaikan pada penulisan ini adalah

1. Estimasi parameter distribusi Gamma dapat menggunakan metode lain selain kedua metode yang telah dibahas pada skripsi ini, seperti metode Kuadrat Terkecil, metode Bayesian, dll.
2. Penentuan metode estimasi terbaik dapat menggunakan kriteria yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Fawzan, M.A., 2000, *Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution,* King Abdul Aziz City for Science and Technology, Riyadh – Saudi Arabia.

Ayres, S.A., 1964, *Theory and Problems of Calculus*, Mc.Graw-hill, Inc.,Britain.

Bain. L.J. and Engelhard B., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistic*, Second Edition, Duxbury Press, Belmant.

DeGroot, Morris H., 1985, *Probability and Statistics*, Second Edition, Addison Wesley, Pittsburg, Pennsylvania.

Dudewicz, E.J. dan Mishra, S.N., 1995, Statistika Matematika Modern, Penerjemah : RK Sembiring, Penerbit ITB, Bandung.

Everitt, S.Brian., 1994, *A Handbook of Statistical Analysis Using S-Plus*, Chapman & Hall, London.

Everitt, S.Brian and Hesketh, 2001, *Analyzing Medical Data Using S-Plus*, Springer-Verlag, New York.

Hogg dan Craig, 1995, *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice Hall, Englewood Clieff, New Jersey.

Mann, N.R.,Schafer, R.E. and Singpurwalla, N.D., 1974, *Methods For Statistical Analysis of Reliability & Life Data*, John Wiley & Sons, Inc.

Walpole, R.E dan Myers, 1986, Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Terbitan ke-2, ITB, Bandung.

Walpole, R.E dan Myers, 1995, Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Edisi ke-4, ITB, Bandung.

Weisstein, Eric W., 2006, *Polygamma Function*, http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html (akses : 2006, Juli 20)

Wolstenholme, L.C., 1999, *Reliability Modelling : A Statistical Approach*, Chapman & Hall, London.

Lampiran 1. Program

1. **Program untuk menentukan nilai estimasi parameter dengan metode Maksimum *Likelihood***

```
> mle <- function(x, k)
{
  x <- as.vector(x)
  n <- length(x)
  alfawal <- momen(x)$alfmom
  repeat
  {
        f <- ( - n) * log(sum(x)/(n * alfawal)) - n * digamma(alfawal) +
        sum(log(x))
        ftur <- (n/alfawal) - n * dev(alfawal, k)
        err <- f/ftur
        alfaMLE <- alfawal - err
        if(abs(alfaMLE - alfawal) < 0.09)
            break
        alfawal <- alfaMLE
  }
  betaMLE <- sum(x)/(n * alfaMLE)
  perbetaMLE <- 1/betaMLE
  return(alfaMLE, betaMLE, perbetaMLE)
}
```

Lanjutan lampiran 1

2. Program untuk menentukan nilai estimasi parameter dengan metode

Jackknife

```
> jack <- function(x, alfawal, k)
{
    x <- as.vector(x)
    n <- length(x)
    alfamle <- alfawal
    alfanyar <- c(rep(0, n))
    for(i in 1:n)
    {
        xbaru <- x[ - i]
        d <- mle(xbaru, k)$alfaMLE
        alfanyar[i] <- d
    }
    alfa <- sum(alfanyar)/n
    alfaJack <- n * alfamle - (n - 1) * alfa
    betaJack <- sum(x)/(n * alfaJack)
    perbetaJack <- 1/betaJack
    return(alfaJack, betaJack, perbetaJack)
}
```

Lanjutan lampiran 1

3. Program untuk menentukan nilai *Mean Square Error* (MSE) dari masing-masing metode estimasi

```
mse<-function(x,alfawal,k)
{
        x<-as.vector(x)
        n<-length(x)
        a<-mle(x,k)$alfaMLE
        b<-mle(x,k)$perbetaMLE
        e<-jack(x,alfawal,k)$alfaJack
        d<-jack(x,alfawal,k)$perbetaJack
        f<-momen(x)$alfmom
        g<-momen(x)$perbetmom
        kumtop1<-pgamma(x,a,b)
        kumtop1<-as.vector(kumtop1)
        kumtop2<-pgamma(x,e,d)
        kumtop2<-as.vector(kumtop2)
        kumtop3<-pgamma(x,f,g)
        kumtop3<-as.vector(kumtop3)
        kum<-c(rep(0,n))
        error1<-c(rep(0,n))
        error2<-c(rep(0,n))
        error3<-c(rep(0,n))
        for(i in 1:n)
        {

            kum[i]<-(i-0.5)/n
            error1[i]<-(kumtop1[i]-kum[i])^2
            error2[i]<-(kumtop2[i]-kum[i])^2
            error3[i]<-(kumtop3[i]-kum[i])^2
        }
        msemle<-sum(error1)
        msejack<-sum(error2)
        msemom<-sum(error3)
        return(kumtop1,kumtop2,kumtop3,msemle,msejack,msemom)
}
```

Lanjutan lampiran 1

4. Program untuk menentukan nilai estimasi parameter dengan metode Momen

```
> momen <- function(x)
{
  x <- as.vector(x)
  n <- length(x)
  a <- 0
  b <- 0
  for(i in 1:n)
{
    a <- a + x[i]
    b <- b + x[i]^2
  }
  xbar <- a/n
  alfmom <- (n * xbar^2)/(b - n * xbar^2)
  betmom <- xbar/alfmom
  return(alfmom, betmom)
}
```

5. Program untuk menentukan nilai Polygamma

```
> dev <- function(alfawal, k)
{
  a <- 0
  for(i in 0:k)
{
    a <- a + (1/(alfawal + i)^2)
  }
  return(a)
}
```

Lampiran 2. Data

a. Data ukuran panjang lingkar kepala anak pertama (dalam milimeter)

Sumber : Everitt, 2001

191	179	195
201	181	185
183	188	176
171	208	192
189	190	197
189	188	197
192	187	179
186	183	174
174		

b. Data umur baterai mobil (dalam tahun) dengan garansi 3 tahun

Sumber : Walpole dan Myers, 1986

2.2	4.1	3.5	4.5
3.2	3.7	3.0	2.6
3.4	1.6	3.1	3.3
3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6
2.9	3.3	3.9	3.1
3.3	3.1	3.7	4.4
3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6
3.9	3.0	4.2	3.5

Lanjutan lampiran 2

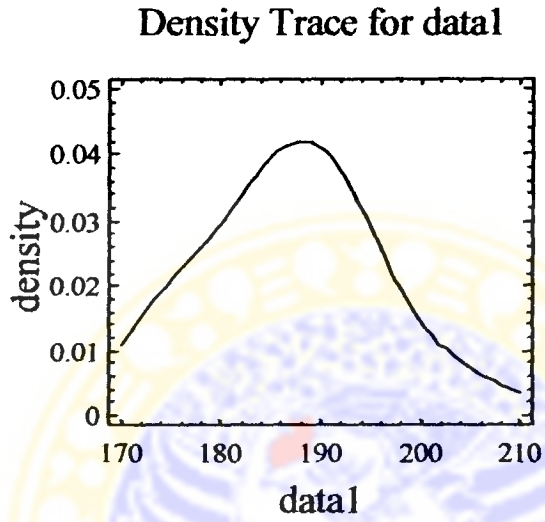
c. **Data berat badan bayi dengan sindrom pernafasan pada saat lahir dalam keadaan hidup (dalam kilogram)**

Sumber : Everitt, 2001

1.130	1.575	1.680
1.760	1.930	2.015
2.090	2.600	2.700
2.950	3.160	3.400
3.640	2.830	1.410
1.715	1.720	2.040
2.200	2.400	2.550
2.570	3.005	

Lampiran 3.Pengujian data berdistribusi Gamma dengan menggunakan *Software StatGraphic*

a. Data panjang kepala anak pertama (dalam milimeter)



Lanjutan lampiran 3

Goodness-of-Fit Tests for data1

Chi-Square Test

	Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chi-Square
	at or below	177.731	4	3.57	0.05
	177.731	181.985	3	3.57	0.09
	181.985	185.303	3	3.57	0.09
	185.303	188.435	4	3.57	0.05
	188.435	191.831	4	3.57	0.05
	191.831	196.306	3	3.57	0.09
above	196.306		4	3.57	0.05

Chi-Square = 0.479954 with 4 d.f. P-Value = 0.975423

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.0792892
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.0717984
Estimated overall statistic DN = 0.0792892
Approximate P-Value = 0.997534

EDF Statistic	Value	Modified Form	P-Value
Kolmogorov-Smirnov D	0.0792892	0.407705	>0.10
Anderson-Darling A^2	0.164876		>0.10*

*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values specially constructed for fitting the currently selected distribution. Other P-values are based on general tables and may be very conservative.

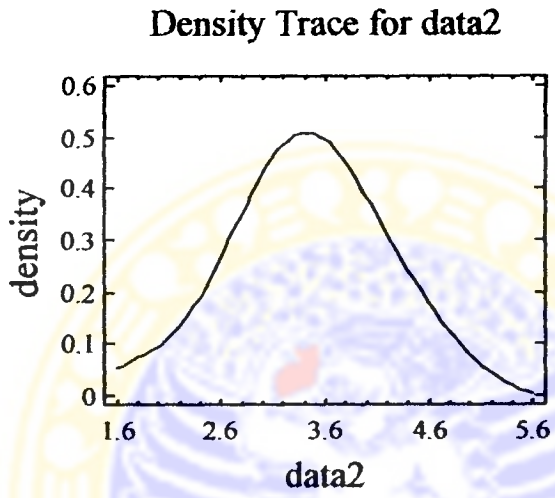
The StatAdvisor

This pane shows the results of tests run to determine whether data1 can be adequately modeled by a gamma distribution. The chi-square test divides the range of data1 into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The Kolmogorov-Smirnov test computes the maximum distance between the cumulative distribution of data1 and the CDF of the fitted gamma distribution. In this case, the maximum distance is 0.0792892. The other EDF statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways.

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0.10, we can not reject the idea that data1 comes from a gamma distribution with 90% or higher confidence.

Lanjutan lampiran 3

b. Data umur baterai mobil (dalam tahun) dengan garansi 3 tahun



Lanjutan lampiran 3

Goodness-of-Fit Tests for data2

Chi-Square Test

	Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chi-Square
	at or below	2.5453	4	4.44	0.04
	2.5453	2.83168	2	4.44	1.34
	2.83168	3.05479	3	4.44	0.47
	3.05479	3.2586	7	4.44	1.47
	3.2586	3.46266	6	4.44	0.54
	3.46266	3.68406	3	4.44	0.47
	3.68406	3.94947	7	4.44	1.47
	3.94947	4.33167	4	4.44	0.04
above	4.33167		4	4.44	0.04

Chi-Square = 5.9 with 6 d.f. P-Value = 0.434485

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.0509445
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.13253
Estimated overall statistic DN = 0.13253
Approximate P-Value = 0.494288

EDF Statistic	Value	Modified Form	P-Value
Kolmogorov-Smirnov D	0.13253	0.856401	>0.10
Anderson-Darling A^2	0.572154		>0.10*

*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values specially constructed for fitting the currently selected distribution. Other P-values are based on general tables and may be very conservative.

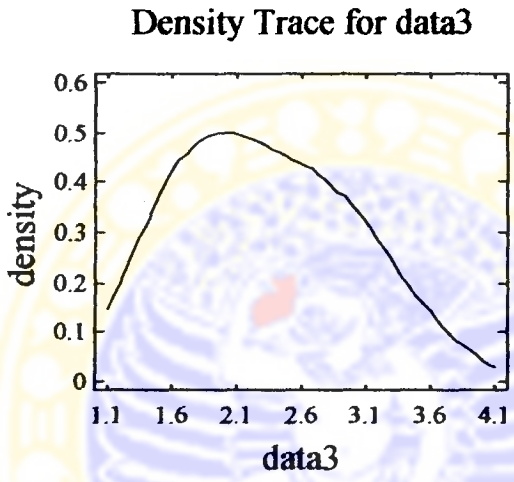
The StatAdvisor

This pane shows the results of tests run to determine whether data2 can be adequately modeled by a gamma distribution. The chi-square test divides the range of data2 into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The Kolmogorov-Smirnov test computes the maximum distance between the cumulative distribution of data2 and the CDF of the fitted gamma distribution. In this case, the maximum distance is 0.13253. The other EDF statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways.

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0.10, we can not reject the idea that data2 comes from a gamma distribution with 90% or higher confidence.

Lanjutan lampiran 3

c. Data berat badan bayi dengan sindrom pernafasan pada saat lahir dalam keadaan hidup (dalam kilogram)



Lanjutan lampiran 3

Goodness-of-Fit Tests for data3

Chi-Square Test

	Lower Limit	Upper Limit	Observed Frequency	Expected Frequency	Chi-Square
	at or below	1.62058	3	3.29	0.02
	1.62058	1.89673	4	3.29	0.16
	1.89673	2.12972	4	3.29	0.16
	2.12972	2.36372	1	3.29	1.59
	2.36372	2.63291	4	3.29	0.16
	2.63291	3.01197	4	3.29	0.16
above	3.01197		3	3.29	0.02

Chi-Square = 2.26087 with 4 d.f. P-Value = 0.687902

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0.0946864
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0.108419
Estimated overall statistic DN = 0.108419
Approximate P-Value = 0.949726

EDF Statistic	Value	Modified Form	P-Value
Kolmogorov-Smirnov D	0.108419	0.535456	>0.10
Anderson-Darling A^2	0.199864		>0.10*

*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values specially constructed for fitting the currently selected distribution. Other P-values are based on general tables and may be very conservative.

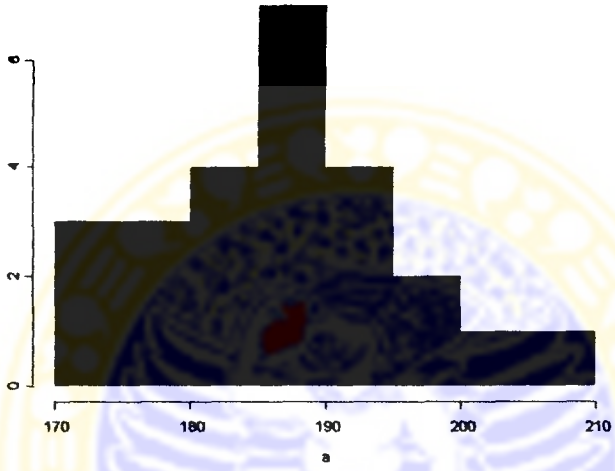
The StatAdvisor

This pane shows the results of tests run to determine whether data3 can be adequately modeled by a gamma distribution. The chi-square test divides the range of data3 into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The Kolmogorov-Smirnov test computes the maximum distance between the cumulative distribution of data3 and the CDF of the fitted gamma distribution. In this case, the maximum distance is 0.108419. The other EDF statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways.

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0.10, we can not reject the idea that data3 comes from a gamma distribution with 90% or higher confidence.

Lampiran 4. Proses analisis data

```
>a<- c(191,179,195,201,181,185,183,188,176,171,208,192,189,190,197,189,188,197,
    192,187 ,179,186,183,174,174)
> hist(a)
```



Gambar L.4.1. Histogram data Gamma a

```
> momen(a)
$alfmom:
[1] 459.6346
$betmom:
[1] 0.4068449
$perbetmom:
[1] 2.457939

> mle(a,10000)
$alfaMLE:
[1] 459.5847
```

Lanjutan lampiran 4

```
$betaMLE:
[1] 0.4068891
$perbetaMLE:
[1] 2.457672
> jack(a,459.6346,10000)
$alfaJack:
[1] 398.9129
$betaJack:
[1] 0.4687741
$perbetaJack:
[1] 2.126553
> mse(a,459.5847,10000)
$kumtop1:
[1]  0.68112889 0.18011165 0.82117805 0.94318016 0.24833017 0.41506233
     0.32769070
[8]  0.55170898 0.10185746 0.03048667 0.99031250 0.72028597 0.59638694
     0.63969015
[15] 0.87328839 0.59638694 0.55170898 0.87328839 0.72028597 0.50620314
     0.18011165
[22] 0.46045409 0.32769070 0.06543209 0.06543209

$kumtop2:
[1]  0.67011840 0.19799184 0.80452653 0.92973962 0.26433149 0.42179160
     0.33984338
[8]  0.54900936 0.11898898 0.04087373 0.98526934 0.70719087 0.59065284
     0.63115624
[15] 0.85647134 0.59065284 0.54900936 0.85647134 0.70719087 0.50666862
     0.19799184
[22] 0.46410149 0.33984338 0.08030999 0.08030999
```

Lanjutan lampiran 4

$kumtop3:

```
 [1]  0.68113742 0.18009816 0.82119067 0.94318977 0.24831795 0.41505713
      0.32768134
 [8]  0.55171110 0.10184488 0.03047953 0.99031575 0.72029607 0.59639141
      0.63969679
[15]  0.87330093 0.59639141 0.55171110 0.87330093 0.72029607 0.50620280
      0.18009816
[22]  0.46045128  0.32768134  0.06542141  0.06542141
```

$msemle:

[1] 5.020098

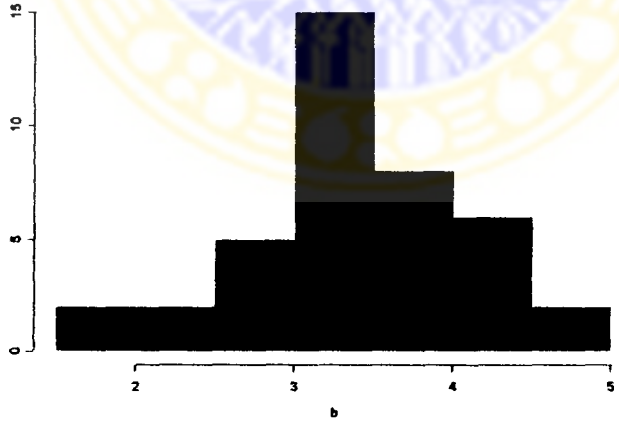
$msejack:

[1] 4.834767

$msemom:

[1] 5.020237

```
>b<-c(2.2,4.1,3.5,4.5,3.2,3.7,3.0,2.6,3.4,1.6,3.1,3.3,3.8,3.1,4.7,3.7,2.5,4.3,3.4,3.6,2.9,
      3.3,3.9,3.1,3.3,3.1,3.7,4.4,3.2,4.1,1.9,3.4,4.7,3.8,3.2,2.6,3.9,3.0,4.2,3.5)
> hist(b)
```



Gambar L.4.2. Histogram data Gamma b

Lanjutan lampiran 4

```
> momen(b)
$alfmom:
[1] 24.18046
$betmom:
[1] 0.1411264
$perbetmom:
[1] 7.085848
> mle(b,10000)
$alfaMLE:
[1] 21.43348
$betaMLE:
[1] 0.1592136
$perbetaMLE:
[1] 6.280872
> jack(b,21.43348,10000)
$alfaJack:
[1] 18.73643
$betaJack:
[1] 0.1821318
$perbetaJack:
[1] 5.49053
> mse(b,21.43348,10000)
$kumtop1:
 [1] 0.034421582  0.828304025  0.575202811  0.921160266
 [5] 0.412139323  0.674072267  0.304646507  0.129075627
 [9] 0.521979303  0.001187975  0.357556793  0.467300480
[13] 0.718522013  0.357556793  0.949033352  0.674072267
[17] 0.097536192  0.881742520  0.521979303  0.626128492
```

Lanjutan lampiran 4

```
21] 0.254470164   0.467300480   0.759138073   0.357556793
[25] 0.467300480  0.357556793   0.674072267   0.903059075
[29] 0.412139323  0.828304025   0.008305219   0.521979303
[33] 0.949033352  0.718522013   0.412139323   0.129075627
[37] 0.759138073  0.304646507   0.856909094   0.575202811
```

$kumtop2:

```
 [1] 0.045409444   0.814721208   0.574168150   0.908325758
 [5] 0.421584313   0.666944652   0.319880255   0.147476475
 [9] 0.524421053   0.002321085   0.370143609   0.473298014
[13] 0.708999345   0.370143609   0.938052904   0.666944652
[17] 0.114776569   0.867849350   0.524421053   0.621860652
[21] 0.271693949   0.473298014   0.747736694   0.370143609
[25] 0.473298014   0.370143609   0.666944652   0.889560373
[29] 0.421584313   0.814721208   0.012896029   0.524421053
[33] 0.938052904   0.708999345   0.421584313   0.147476475
[37] 0.747736694   0.319880255   0.842964687   0.574168150
```

$kumtop3:

```
 [1] 0.0260976176   0.8408121707   0.5764165600
 [4] 0.9321813103   0.4033844237   0.6810298704
 [7] 0.2905966832   0.1131510712   0.5198748292
[10] 0.0006045326   0.3458847447   0.4618051964
[13] 0.7276698152   0.3458847447   0.9580722017
[16] 0.6810298704   0.0830013057   0.8941272056
[19] 0.5198748292   0.6304096318   0.2387415006
[22] 0.4618051964   0.7699401963   0.3458847447
[25] 0.4618051964   0.3458847447   0.6810298704
[28] 0.9148765188   0.4033844237   0.8408121707
[31] 0.0053375244   0.5198748292   0.9580722017
[34] 0.7276698152   0.4033844237   0.1131510712
[37] 0.7699401963   0.2905966832   0.8695506718
[40] 0.5764165600
```

$msemle:

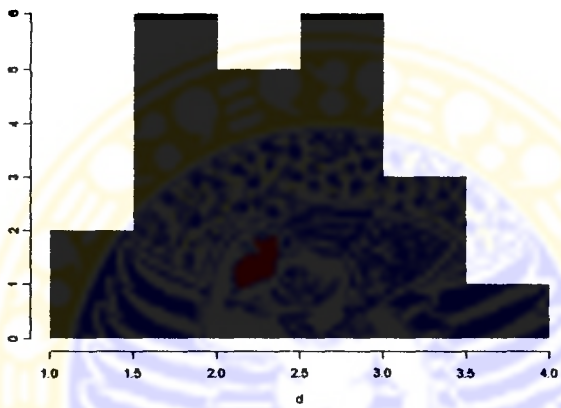
```
[1] 5.551576
```

$msejack:

```
[1] 5.37013
```

Lanjutan lampiran 4

```
$msemom:
[1] 5.720209
> d<-c(1.130,1.575,1.680,1.760,1.930,2.015,2.090,2.600,2.700,2.950,3.160,3.400,
        3.640,2.830,1.410,1.715,1.720,2.040,2.200,2.400,2.550,2.570,3.005)
> hist(d)
```



Gambar L.4.3. Histogram data Gamma d

```
> momen(d)
$alfmom:
[1] 12.59698
$betmom:
[1] 0.1831702
$perbetmom:
[1] 5.459403
> mle(d,10000)
$alfaMLE:
[1] 12.20483
```

Lanjutan lampiran 4

```
$betaMLE:
[1] 0.1890556
$perbetaMLE:
[1] 5.28945
> jack(d,12.20483,10000)
$alfaJack:
[1] 10.80751
$betaJack:
[1] 0.213499
$perbetaJack:
[1] 4.683864
> mse(d,12.20483,10000)
$kumtop1:
 [1] 0.01662575 0.12385958 0.16979210 0.20965808 0.30539271 0.35707733
     0.40371989 0.69854073 0.74474239 0.83855146
[11] 0.89476075 0.93822859 0.96524260 0.79737447 0.06795611 0.18675136
     0.18923685 0.37255454 0.47240570 0.59237751
[21] 0.67363750 0.68373873 0.85514229
$kumtop2:
 [1] 0.02322841 0.14102221 0.18761433 0.22720749 0.32020885 0.36960570
     0.41386739 0.69183642 0.73588906 0.82680763
[11] 0.88292284 0.92792238 0.95720945 0.78658891 0.08208910 0.20453806
     0.20700781 0.38432109 0.47868998 0.59153652
[21] 0.66821725 0.67778874 0.84319777
$kumtop3:
 [1] 0.01515000 0.11950878 0.16519963 0.20509141 0.30148453 0.35376290
     0.40103562
 [8] 0.70038245 0.74714580 0.84166205 0.89782640 0.94081975 0.96719523
     0.80026512
[15] 0.06449548 0.18214711 0.18463384 0.36944076 0.47075684 0.59265131
     0.67513893
[22] 0.68538085 0.85828829
```

Lanjutan lampiran 4

$msemle:

[1] 2.402364

$msejack:

[1] 2.311571

$msemom:

[1] 2.426724