

ANALISIS KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV PADA POPULASI HETEROSEKSUAL

Endrik Mifta Shaiful¹⁾, Angga Setiawan²⁾

¹⁾²⁾Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga
Surabaya

¹⁾endrik.mifta.aiful-2014@fst.unair.ac.id

²⁾angga.setiawan-2015@fst.unair.ac.id

Abstract—Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS) merupakan salah satu penyakit mematikan di dunia yang disebabkan oleh *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) yang menginfeksi sel darah putih dan menyebabkan turunnya daya tahan tubuh. AIDS dengan cepat menjadi penyakit epidemi di dunia yang mempengaruhi hampir di seluruh negara. Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan kontrol optimal berupa penggunaan kondom (u_1) pada populasi laki-laki dan perempuan yang sehat tetapi rentan terhadap virus HIV, dan *Screening* (u_2) pada populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART. Eksistensi kontrol optimal pada model matematika penyebaran penyakit HIV pada populasi heteroseksual dilakukan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol u_1 dinilai lebih efektif untuk meminimalkan jumlah penderita HIV dengan biaya yang lebih minimal.

Keywords—HIV/AIDS, Kontrol Optimal, Penggunaan Kondom, Screening, Prinsip Maksimum Pontryagin

I. PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah virus yang menyerang/menginfeksi sel pada sistem imun yang menyebabkan turunnya kekebalan tubuh. *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) adalah stadium paling parah dari infeksi HIV (WHO, 2017). Sumber penularan HIV adalah darah, air mani, dan sekresi serviks, serta ASI yang dapat menularkan HIV dari ibu ke bayinya (Depkes RI, 2006). Berdasarkan data dari *United Nations Programme on HIV/AIDS* (UNAIDS) pada tahun 2016, jumlah penderita HIV secara keseluruhan adalah 36,7 juta orang dan jumlah kematian akibat AIDS secara keseluruhan adalah satu juta orang.

Model matematika dibutuhkan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit HIV sehingga dapat dilakukan langkah strategis untuk mencegah penyebaran penyakit HIV yang semakin tinggi. Kimbir dkk., (2012), menganalisa kestabilan lokal model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS pada populasi heteroseksual

dengan pembinaan dan pengobatan ART. Dalam model tersebut dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok laki-laki dan perempuan. Pada kelompok laki-laki terdiri dari tiga kompartemen yaitu laki-laki yang rentan dengan HIV, laki-laki penderita HIV tanpa pengobatan, dan laki-laki penderita HIV dengan pengobatan. Pada kelompok perempuan terdiri dari tiga kompartemen yaitu perempuan yang rentan dengan HIV, perempuan penderita HIV tanpa pengobatan, dan perempuan penderita HIV dengan pengobatan. Penulis tertarik untuk memodifikasi model yang telah dikonstruksi oleh Kimbir dkk., (2012) dan menerapkan kontrol optimal berupa penggunaan kondom (u_1) untuk populasi laki-laki dan perempuan yang rentan terhadap virus HIV dan *screening*(u_2) pada penderita HIV laki-laki dan perempuan yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART.

II. MODEL MATEMATIKA DENGAN KONTROL

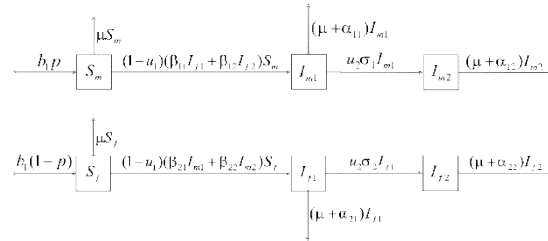
Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah Sistem Persamaan Differensial Biasa (SPDB) non linear yang terdiri atas enam populasi yaitu populasi laki-laki yang rentan dengan HIV (S_m), populasi laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART (I_{m1}), populasi laki-laki penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART (I_{m2}), populasi perempuan yang rentan dengan HIV (S_f), populasi perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART (I_{f1}), populasi perempuan penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART (I_{f2}). Populasi laki-laki rentan HIV akan bertambah karena adanya kelahiran laki-laki dengan laju konstan sebesar b_1 dengan proporsi sebesar p , dan akan berkurang karena laki-laki rentan terinfeksi HIV yang disebabkan oleh perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART dengan laju sebesar β_{11}

dan perempuan penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART dengan laju sebesar β_{12} dengan $\beta_{11} > \beta_{12}$, serta berkurang karena kematian alami manusia dengan laju sebesar μ . Populasi laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART akan bertambah karena adanya populasi laki-laki rentan yang terinfeksi HIV, dan berkurang karena adanya laju transisi dari laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART menjadi terdiagnosa dan diobati ART dengan laju sebesar σ_1 , serta berkurang karena kematian alami dengan laju sebesar μ dan kematian karena HIV dengan laju sebesar α_{11} . Populasi laki-laki penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART akan bertambah karena adanya laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART menjadi terdiagnosa dan diobati ART, dan berkurang karena kematian alami dengan laju sebesar μ dan kematian karena HIV dengan laju sebesar α_{12} , dengan $\alpha_{11} > \alpha_{12}$.

Populasi perempuan rentan HIV akan bertambah karena adanya kelahiran perempuan dengan laju konstan sebesar b_1 dengan proporsi sebesar $(1-p)$, dan akan berkurang karena perempuan rentan terinfeksi HIV yang disebabkan oleh laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART dengan laju sebesar β_{21} dan laki-laki penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART dengan laju sebesar β_{22} dengan $\beta_{21} > \beta_{22}$, serta berkurang karena kematian alami manusia dengan laju sebesar μ . Populasi perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART akan bertambah karena adanya populasi perempuan rentan yang terinfeksi HIV, dan berkurang karena adanya laju transisi dari perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART menjadi terdiagnosa dan diobati ART dengan laju sebesar σ_2 , serta berkurang karena kematian alami dengan laju sebesar μ dan kematian karena HIV dengan laju sebesar α_{21} . Populasi perempuan penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati ART akan bertambah karena adanya perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART menjadi terdiagnosa dan diobati ART, dan berkurang karena kematian alami dengan laju sebesar μ dan kematian karena HIV dengan laju sebesar α_{22} , dengan $\alpha_{21} > \alpha_{22}$.

Berdasarkan penjelasan diatas dan dengan menambahkan kontrol berupa penggunaan kondom (u_1) pada populasi laki-laki dan

perempuan yang rentan terhadap HIV dan *screening* (u_2) pada penderita HIV laki-laki dan perempuan yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati ART. Dengan demikian, dapat dibentuk diagram transmisi yang tertera pada Gambar 2.1 dan model matematika penyebaran penyakit HIV pada populasi heteroseksual dengan menerapkan kontrol optimal yang dapat dilihat pada persamaan (2.1).



Gambar 2. 1 Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV Pada Populasi Heteroseksual dengan Menerapkan Kontrol Optimal

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_m}{dt} &= b_1 p - (1-u_1)(\beta_{11}I_{f1} + \beta_{12}I_{f2})S_m - \mu S_m; \\
 \frac{dI_{m1}}{dt} &= (1-u_1)(\beta_{11}I_{f1} + \beta_{12}I_{f2})S_m - (\mu + \alpha_{11} + u_2\sigma_1)I_{m1}; \\
 \frac{dI_{m2}}{dt} &= u_2\sigma_1 I_{m1} - (\mu + \alpha_{12})I_{m2}; \\
 \frac{dS_f}{dt} &= b_1(1-p) - (1-u_1)(\beta_{21}I_{m1} + \beta_{22}I_{m2})S_f - \mu S_f; \\
 \frac{dI_{f1}}{dt} &= (1-u_1)(\beta_{21}I_{m1} + \beta_{22}I_{m2})S_f - (\mu + \alpha_{21} + u_2\sigma_2)I_{f1}; \\
 \frac{dI_{f2}}{dt} &= u_2\sigma_2 I_{f1} - (\mu + \alpha_{21})I_{f2}; \\
 S_m, I_{m1}, I_{m2}, S_f, I_{f1}, I_{f2} &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Untuk keterangan definisi pada kontrol dan nilai setiap parameter dijelaskan pada Tabel 2.1.

TABEL 2. 1 DEFINISI DAN NILAI PARAMETER

Parameter	Definisi	Nilai
b_1	Laju kelahiran	20 (Asumsi)
p	Proporsi kelahiran laki-laki	[0,1] (Asumsi)
β_{11}	Laju penularan HIV dari perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati	0,4 (Asumsi)
β_{12}	Laju penularan HIV dari perempuan penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati	0,25 (Asumsi)
β_{21}	Laju penularan HIV dari laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati	0,3 (Asumsi)
β_{22}	Laju penularan HIV dari laki-laki penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati	0,15 (Asumsi)
μ	Laju kematian alami	0,02 (Okosun dkk., 2013)
σ_1	Laju transmisi pada laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati menjadi terdiagnosa dan terobati	0,02 (Okosun dkk., 2013)
σ_2	Laju transmisi pada perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati menjadi terdiagnosa dan terobati	0,03 (Okosun dkk., 2013)
α_{11}	Laju kematian karena HIV pada laki-laki penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati	0,3 (Asumsi)
α_{12}	Laju kematian karena HIV pada laki-laki penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati	0,23 (Asumsi)
α_{21}	Laju kematian karena HIV pada perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati	0,25 (Asumsi)
α_{22}	Laju kematian karena HIV pada perempuan penderita HIV yang terdiagnosa dan diobati	0,13 (Asumsi)
u_1	Kontrol berupa penggunaan kondom	[0,1] (Asumsi)
u_2	Kontrol berupa <i>screening</i>	[0,1] (Asumsi)

Fungsi ongkos pada model penyebaran penyakit HIV pada populasi heteroseksual dengan kontrol

berupa penggunaan kondom dan *screening* adalah :

$$J(u_1, u_2) = \min_{u_1, u_2} \int_0^{t_f} (I_{m1} + I_{f1} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i u_i^2) dt, \quad (2.2)$$

dengan $t_f = 50$ tahun, $m_1 = \$0.002$, $m_2 = \$0.016$

III. ANALISIS KONTROL OPTIMAL

Metode yang digunakan untuk analisis kontrol optimal pada penelitian ini adalah prinsip maksimum Pontryagin (Pontryagin dkk., 1962). Konversi persamaan (2.1) dan (2.2) ke dalam fungsi Hamiltonian (H) dengan memperhatikan kontrol u_1, u_2 :

$$H = I_{m1} + I_{f1} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i$$

dengan :

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 p - (1 - u_1)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2}) S_m - \mu S_m; \\ f_2 &= (1 - u_1)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2}) S_m - (\mu + \alpha_{11} + u_2 \sigma_1) I_{m1}; \\ f_3 &= u_2 \sigma_1 I_{m1} - (\mu + \alpha_{12}) I_{m2}; \\ f_4 &= b_1 (1 - p) - (1 - u_1)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2}) S_f - \mu S_f; \\ f_5 &= (1 - u_1)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2}) S_f - (\mu + \alpha_{21} + u_2 \sigma_2) I_{f1}; \\ f_6 &= u_2 \sigma_2 I_{f1} - (\mu + \alpha_{21}) I_{f2}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ merupakan variabel co - state

Fungsi Hamiltonian (3.1) akan mengalami kondisi stasioner ketika :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2) didapatkan solusi dari u_1, u_2 yang tertera pada persamaan (3.3).

$$u_1 = \frac{(\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_2 - \lambda_1) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_5 - \lambda_4)}{m_1} \quad (3.3)$$

$$u_2 = \frac{\sigma_1 I_{m1}(\lambda_3 - \lambda_2) + \sigma_2 I_{m2}(\lambda_6 - \lambda_5)}{m_2}$$

Solusi dari u_1, u_2 pada persamaan (3.3) masih mengandung variable co-state, maka variable co-state didapatkan dari solusi persamaan co-state (3.4) sampai (3.9).

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_2 - \lambda_1) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_5 - \lambda_4))}{m_1} \\ &\quad - \frac{(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2)}{m_1} + (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})^2 (\lambda_1 - \lambda_2) S_m}{m_1} + \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{(\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)}{m_1} \right) (\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \mu + \frac{S_f}{m_1} (\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_5) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= -1 - \frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \\ &\quad - \beta_{21} S_f (\lambda_4 - \lambda_5) - \frac{\sigma_1}{m_2} (\sigma_1 I_{m1}(\lambda_2 - \lambda_3) + \sigma_2 I_{f1}(\lambda_3 - \lambda_6))(\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{S_m \beta_{22} S_f}{m_1} (\lambda_4 - \lambda_5) \\ &\quad - (\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sigma_1^2 I_{m1}(\lambda_2 - \lambda_3)(\sigma_1 I_{m1}(\lambda_2 - \lambda_3) + \sigma_2 I_{f1}(\lambda_3 - \lambda_6))}{m_2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \lambda_2 (\alpha_{11} + \mu) + (\lambda_4 - \lambda_5) \left(\frac{S_f^2 \beta_{21} (\lambda_4 - \lambda_5)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})}{m_1} + \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \right) \beta_{21} S_f \right) \\ &\quad + (\lambda_5 - \lambda_6) \frac{\sigma_1 \sigma_2 I_{f1}(\lambda_2 - \lambda_3)}{m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\beta_{22} S_f}{m_1} (\lambda_4 - \lambda_5)(\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5) \\ &\quad + \frac{\lambda_2 S_f S_f \beta_{22} (\lambda_4 - \lambda_5)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})}{m_1} + \lambda_3 (\alpha_{22} + \mu) + \left(\frac{S_f^2 \beta_{22} (\lambda_4 - \lambda_5)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})}{m_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \right) \beta_{22} S_f \right) (\lambda_4 - \lambda_5) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_4 &= -\frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) (\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2}) \\ &\quad - (\lambda_4 - \lambda_5) + \frac{S_m (\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2)}{m_1} + \left(\frac{S_f (\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})^2 (\lambda_4 - \lambda_5)}{m_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \right) \right. \\ &\quad \left. (\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2}) \right) (\lambda_4 - \lambda_5) + \lambda_4 \mu \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_5 &= -1 - \frac{\beta_{22} S_m}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) (\lambda_4 - \lambda_5) \\ &\quad - \sigma_2 (\lambda_5 - \lambda_6)(\sigma_1 I_{m1}(\lambda_2 - \lambda_3) + \sigma_2 I_{f1}(\lambda_3 - \lambda_6)) + \left(\frac{S_m^2 \beta_{11} (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})}{m_1} + \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{1}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \right) \beta_{11} S_m \right) \\ &\quad - (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\sigma_1 \sigma_2 I_{m1}(\lambda_3 - \lambda_6)}{m_2} (\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{\beta_{11} S_m S_f (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})}{m_1} (\lambda_4 - \lambda_5) \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2 I_{f1}(\lambda_3 - \lambda_6) + \sigma_2 (\sigma_1 I_{m1}(\lambda_2 - \lambda_3) + \sigma_2 I_{f1}(\lambda_3 - \lambda_6))}{m_2} (\lambda_4 - \lambda_6) + \lambda_5 (\alpha_{21} + \mu) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_6 &= -\frac{\beta_{22} S_m}{m_1} ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \\ &\quad - (\lambda_1 - \lambda_2) + \left(\frac{S_m^2 \beta_{12} (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_{11} I_{f1} + \beta_{12} I_{f2})}{m_1} + \left(1 + \frac{1}{m_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. ((\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_1 - \lambda_2) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_4 - \lambda_5)) \right) \beta_{12} S_m \right) \\ &\quad - (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{S_m S_f \beta_{22} (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_{21} I_{m1} + \beta_{22} I_{m2})}{m_1} (\lambda_4 - \lambda_5) + \lambda_6 (\alpha_{22} + \mu) \end{aligned} \quad (3.9)$$

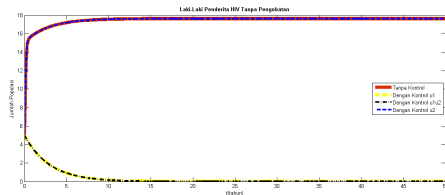
Karena persamaan co-state (3.4) sampai (3.9) sulit dicari solusinya secara analitik dan $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$ maka solusi dari u_1, u_2 dari (3.3) adalah :

$$\begin{aligned} u_1 &= \max(0, \min(1, \frac{(\beta_{11} S_m I_{f1} + \beta_{12} S_m I_{f2})(\lambda_2 - \lambda_1) + (\beta_{21} S_f I_{m1} + \beta_{22} S_f I_{m2})(\lambda_5 - \lambda_4)}{m_1})) \\ u_2 &= \max(0, \min(1, \frac{\sigma_1 I_{m1}(\lambda_3 - \lambda_2) + \sigma_2 I_{m2}(\lambda_6 - \lambda_5)}{m_2})) \end{aligned} \quad (3.10)$$

IV. SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik pada (2.1) dilakukan dengan beberapa skenario antara lain ketika tidak ada kontrol yang bekerja dengan optimal pada model ($u_1 = 0, u_2 = 0$), hanya penggunaan kondom yang bekerja ($u_1 \neq 0, u_2 = 0$), hanya *screening* yang bekerja ($u_1 = 0, u_2 \neq 0$), dan semua kontrol bekerja ($u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$) dengan memberi nilai awal dalam ribuan untuk setiap

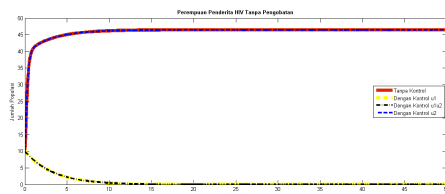
populasi adalah $S_m = 10, I_{m1} = 5, I_{m2} = 1,$
 $S_f = 30, I_{f1} = 10, I_{f2} = 4.$



Gambar 4. 1 Grafik Populasi Laki-laki Penderita HIV yang Tidak Terdiagnosa dan Tidak Diobati

4.1 Kontrol Optimal dengan Penggunaan Kondom

Kontrol optimal dengan penggunaan kondom dapat bekerja dengan baik pada populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 4.1 dan 4.2. Pada tahun ke-50 populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati sebelum diberikan kontrol berupa penggunaan kondom sejumlah 17630 orang dan 4650 orang. Setelah diberikan kontrol berupa penggunaan kondom dengan biaya sebesar \$ 48,08 jumlahnya menurun sehingga membuat populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati menuju ke nol.



Gambar 4. 2 Grafik Populasi Perempuan Penderita HIV yang Tidak Terdiagnosa dan Tidak Diobati

4.2 Kontrol Optimal dengan *Screening*

Kontrol optimal dengan penggunaan kondom tidak dapat bekerja dengan baik pada populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 4.1 dan 4.2. Pada tahun ke-50 populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati sebelum dan sesudah diberikan kontrol berupa *screening* jumlahnya tidak berubah yaitu sejumlah 17630 orang dan 4650 orang.

4.3 Kontrol Optimal dengan Penggunaan Kondom dan *Screening*

Kontrol optimal dengan penggunaan kondom dan *screening* secara bersamaan dapat bekerja dengan baik pada populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak

diobati untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 4.1 dan 4.2. Pada tahun ke-50 populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati sebelum diberikan kontrol berupa penggunaan kondom dan *screening* sejumlah 17630 orang dan 4650 orang. Setelah diberikan kontrol berupa penggunaan kondom dan *screening* dengan biaya sebesar \$ 48,24 jumlahnya menurun sehingga membuat populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati menuju ke nol.

V. KESIMPULAN

Pada penelitian ini dilakukan analisis kontrol optimal pada model penyebaran penyakit HIV pada populasi heteroseksual. Berdasarkan hasil analisis kontrol optimal pada model, kontrol berupa penggunaan kondom terbukti efektif untuk menurunkan jumlah populasi laki-laki dan perempuan penderita HIV yang tidak terdiagnosa dan tidak diobati dengan biaya yang minimal yaitu \$48,08.

DAFTAR PUSTAKA

- Departemen Kesehatan R.I., 2006, Situasi HIV/AIDS di Indonesia Tahun 1987-2006, Pusat Data dan Informasi Departemen Kesehatan RI, Jakarta.
- Kimbir, R.A., Udoo, M.J.I., dan Aboiyar, T., 2012, A Mathematical Model For The Transmission Dynamics Of HIV/AIDS in A Two-Sex Population Considering Conseling and Antiretroviral Therapy (ART), J. Math. Comput, Nigeria.
- L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, New York, 1962.
- Okosun, K.O., Markinde, O.D., dan Takaidza, I., 2013, Impact of Optimal Control On The Treatment Of HIV/AIDS and Screening of Unaware Infectives, Applied Mathematical Modelling, Afrika Selatan.
- UNAIDS, 2017, *AIDS DATA 2017*, Joint United Nations Programme on HIV/AIDS, Switzerland.
- WHO, 2017, <http://www.who.int/features/factfiles/hiv/en/>, diakses pada tanggal 09 september 2017, pukul 20.40.