

ANALISIS SISTEM DINAMIK DAN KENDALI OPTIMAL PADA PENYEBARAN POPULASI ANJING RABIES DI KOTA AMBON

Zeth Arthur Leleury¹⁾, Mozart Winston Talakua²⁾, Julia Anggraini Papilaya³⁾

*Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka - Ambon*

¹⁾zetharthur82@gmail.com

²⁾mw.talakua@gmail.com

³⁾juliapapilaya12@gmail.com

Abstrak — Rabies merupakan penyakit infeksi tingkat akut pada susunan saraf pusat yang disebabkan oleh virus rabies. Penyakit ini bersifat zoonotik, yaitu dapat ditularkan dari hewan ke manusia. Data yang diperoleh menunjukkan bahwa kota Ambon terdeteksi sebagai daerah endemis rabies dengan jumlah kasus penularan rabies terbanyak di provinsi Maluku. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis titik kesetimbangan model matematika populasi anjing rabies di kota Ambon. Model yang digunakan adalah model matematika SIR (*Susceptibles, Infected, Recovered*). Penelitian ini juga dilakukan sebagai suatu upaya untuk mengatasi jumlah anjing yang terinfeksi rabies dengan biaya vaksinasi yang minimal. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode langsung dengan pendekatan pada parameter keadaan dan variabel kendali yang diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian masalah pemrograman nonlinier, yang selanjutnya disimulasikan dengan *software* MISER3. Data yang digunakan diperoleh dari Dinas Pertanian, Kehutanan dan Peternakan (Disperhutnak) Provinsi Maluku. Berdasarkan penelitian yang dilakukan diperoleh bahwa jika tidak ada pemberian vaksin maka populasi anjing yang terinfeksi rabies di kota Ambon akan endemik dengan titik kesetimbangan endemik $(S, I, R) = (703, 139, 0)$. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian vaksin oral secara teratur selama 20 hari pertama akan menekan jumlah anjing yang terinfeksi virus rabies di kota Ambon.

Kata Kunci - Model matematika, rabies, titik kesetimbangan, kendali optimal

I. PENDAHULUAN

Rabies adalah penyakit hewan yang disebabkan oleh virus yang dikelompokkan dalam keluarga *Rhabdoviridae* dan genus *Lyssavirus*. Virus ini akan menyerang sistem saraf pusat sehingga berakibat fatal (Wang & Lou 2008). Virus ini juga bersifat menular dan terdapat dalam air liur hewan penular rabies dan dapat menyerang semua hewan berdarah panas termasuk manusia. Virus rabies ditularkan ke manusia melalui gigitan hewan misalnya oleh anjing, kucing, kera, dan rakun (Madigan et al, 2009).

Berdasarkan data yang dipublikasi oleh Departemen Kesehatan jumlah kasus GHPR (Gigitan Hewan Penular Rabies) di Indonesia mengalami peningkatan dari tahun 2014 sampai tahun 2015. Tahun 2014 kasus GHPR berjumlah 42.958 kasus. Dari jumlah tersebut hanya 34.095 kasus yang mampu ditangani dengan jumlah kasus positif rabies yang menyebabkan kematian berjumlah 81 kasus. Tahun 2015 kasus GHPR meningkat menjadi 80.433, dari jumlah tersebut kasus yang dapat ditangani berjumlah 57.929 dengan kasus positif rabies yang menyebabkan kematian berjumlah 118 kasus. Sementara jumlah kasus rabies di provinsi Maluku berdasarkan laporan Dinas Kesehatan Provinsi Maluku pada tahun 2014, jumlah kasus mencapai 1.650 kasus yang mengakibatkan 6 korban meninggal dunia. Dari jumlah tersebut hanya 1.200 kasus yang dapat diberikan vaksin. Dari total kasus tersebut, kota Ambon menjadi Kabupaten/Kota dengan jumlah kasus terbanyak yaitu 701 kasus.

Berdasarkan data tersebut dapat dilihat bahwa kasus rabies menjadi salah satu ancaman kesehatan yang harus dapat diatasi. Berbagai macam cara telah dilakukan pemerintah untuk menanggulangi masalah tersebut, salah satunya memberikan vaksin terhadap anjing liar maupun anjing rumahan yang statusnya masih belum terinfeksi rabies (Putra, 2011). Vaksinasi merupakan salah satu cara pemberantasan rabies di Indonesia yang telah ditetapkan. Vaksinasi juga telah digalakkan dan diperluas, namun dalam pelaksanaannya masih terdapat kendala. Hal ini dikarenakan vaksinasi secara parental tidak dapat diterapkan pada populasi anjing liar yang besar.

Di beberapa negara, vaksinasi rabies secara oral diusulkan sebagai kebijakan pengganti terhadap vaksinasi parental, dengan harapan dapat meningkatkan cakupan vaksinasi secara menyeluruh pada populasi anjing. Penggunaan vaksin rabies oral telah berhasil dalam upaya pengendalian pemberantasan di sejumlah wilayah Eropa dan Amerika Utara (Muller et al, 1998). Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) telah menyusun panduan yang meliputi perencanaan dan pelaksanaan uji lapang penggunaan vaksin

rabies oral (*Oral Vaccination of Dogs*). Uji lapang vaksin rabies oral ini telah dilakukan di Turki, Afrika Selatan, Sri Lanka, dan Thailand (Meslin et al, 2000).

Vaksin oral memiliki keunggulan dibandingkan pemberian vaksin secara parental utamanya pada target yang sangat sulit, yaitu anjing liar. Pemberian vaksin secara oral pun tidak perlu mencari, menghandel, dan menginjeksi target, akan tetapi perlu umpan sebagai tempat diletakkannya vaksin. Umpan yang digunakan adalah jenis umpan yang konsistensinya kenyal dan disukai oleh target. Di Filipina vaksin oral telah berhasil diterapkan di Desa Mindoro dengan menggunakan umpan sebagai media (usus babi) tempat vaksin diletakkan (Estrada et al, 2001). Umpan lain dapat digunakan adalah dengan menggunakan baso urat. Umpan baso urat dapat digunakan karena baso urat memiliki konsistensi kenyal, sangat cocok dengan syarat umpan. Dengan tekstur yang kenyal ini target (anjing) akan menggigit serta mengunyah umpan yang diharapkan vaksin di dalamnya juga akan tergigit di mulutnya. Dengan demikian, konsep penerapan vaksin oral ini dianggap mudah dan efektif tanpa pemaksaan kepada hewan target.

Akan tetapi penentuan waktu dan tingkat distribusi vaksin secara optimal juga perlu diperhatikan guna keefektifan dari pelaksanaan program tersebut. Melalui perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena penyebaran suatu penyakit. Fenomena penyebaran penyakit disajikan dalam bentuk model matematika yang merepresentasikan suatu permasalahan di dunia nyata ke dalam persamaan matematika. Oleh karena itu, diperlukan suatu penelitian untuk menganalisis seberapa besar capaian program vaksinasi sehingga dapat mengetahui perkembangan populasi anjing rabies. Untuk itu diperlukan suatu model matematika agar dapat diketahui keefektifan dari program vaksinasi tersebut. Model matematika merupakan suatu cara sederhana untuk menerjemahkan suatu masalah ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi. Dengan pengertian tersebut, maka model matematika dapat menjadi solusi untuk menganalisis seberapa besar capaian program vaksinasi yang diberlakukan untuk mengurangi dampak virus rabies.

Berdasarkan kenyataan di atas maka peneliti tertarik untuk menganalisa bentuk model matematika dengan pemberian vaksin oral pada anjing rabies. Penelitian tentang Rabies sendiri sudah banyak diteliti. Pada tahun 2008, Wang dan Lou mengkaji model dinamik antara anjing rabies dan manusia. Selanjutnya penelitian Rumlawang dan Nanlohy tahun 2011 membahas tentang

analisis kestabilan model penyebaran rabies. Model tersebut menggunakan model dua variabel yaitu *Susceptible* (S) dan *Infective* (I). Hasil analisis yaitu pada saat endemik populasi (I) meningkat dan setelah endemik populasi (S) akan meningkat. Pada penelitian Fitri, dkk tahun 2014 membahas model matematika (linier) populasi anjing rabies dengan vaksinasi, model tersebut menggunakan sistem persamaan diferensial linier. Hasil yang didapatkan jumlah populasi Anjing rabies tidak akan meningkat jika laju kelahiran dari populasi anjing sehat dibatasi.

Pada penelitian ini, model yang digunakan yaitu model pada Panjeti dan Real, 2011. Model matematika yang dimaksud adalah model matematika SIR (*Susceptibles, Infected, Recovered*). Adapun tujuan penelitian ini adalah menganalisis titik kesetimbangan model matematika populasi anjing rabies. Penelitian ini juga dilakukan sebagai suatu upaya untuk mengatasi jumlah anjing yang terinfeksi rabies di kota Ambon dengan biaya vaksinasi yang minimal. Tingkat kontrol melalui pemberian vaksin oral ini akan relatif mudah untuk dilaksanakan di kota Ambon karena kepadatan populasi anjing di kota Ambon tidak menyebar secara luas tetapi berada pada beberapa titik kawasan tertentu.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Model matematika adalah uraian secara matematika dari fenomena dunia nyata. Tujuan model adalah memahami suatu fenomena dan mungkin membuat prakiraan tentang perilaku di masa depan. Salah satu penerapan model matematika yaitu dapat membantu untuk memberikan solusi dalam upaya pencegahan penyakit rabies. Misalnya model matematika yang diberikan oleh Panjeti dan Real, 2011 dimana model matematika yang diberikan merupakan model matematika dengan persamaan nonlinier. Pada model yang diberikan dikembangkan dengan menerapkan metode kendali optimum dimana tingkat distribusi vaksin berperan sebagai fungsi kendali dengan tujuan untuk meminimalkan biaya vaksinasi dan meningkatkan populasi yang rentan terkena virus.

Dalam menggunakan model matematika dengan persamaan nonlinier, terkadang sulit dalam menentukan titik kestabilannya, sehingga digunakan metode *Routh-Hurwitz* dalam mencari nilai reproduksi awal dengan memperhatikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari suatu model. Begitu juga dalam melakukan kendali optimum, ada beberapa bentuk metode sebagai fungsi tujuan yang digunakan, salah satunya adalah bentuk Lagrange. Metode ini adalah cara menentukan titik maksimum dan minimum suatu fungsi yang diiringi dengan persyaratan atau kendala yang harus dipenuhi.

2.1. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut.

- 1) Persamaan polinom orde ditulis dalam bentuk:
 $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$
dengan koefisien-koefisien adalah konstanta real dan $a_n \neq 0$.
- 2) Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.
- 3) Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti yang ditunjuk pada Tabel 1.

Tabel 1 Tabel *Routh*

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\dots$	a_{n-1}
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\dots$	a_n
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$	b_n
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\dots$	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^0						

dimana nilai $b_i, c_i, \dots$ didefinisikan sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} \quad c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

- 4) Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama tabel *Routh*.
- 5) Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel *Routh* bertanda positif.

2.2. Bilangan Reproduksi Dasar

Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi tergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks Jacobian pada titik setimbang bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik

setimbang endemik (*endemic equilibrium*). Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi penyakit berkurang, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah (Hethcote, 2008).

III. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode langsung (*direct method*). Metode langsung merupakan dasar dari transformasi masalah kendali optimum, dimana dasar diskritisasi variabel keadaan dan kendali dengan metode langsung dapat dikategorikan dalam 3 pendekatan berbeda (Subchan, 2009).

- (a) Pendekatan pertama berdasarkan pada parameter keadaan dan variabel kendali. Variabel kendali dan keadaan didiskretkan dan kemudian menghasilkan diskretisasi yang diselesaikan menggunakan suatu penyelesaian pemrograman nonlinier.
- (b) Pendekatan kedua adalah parameter kendali, sehingga variabel keadaan dan fungsi tujuan dapat diselesaikan oleh integrasi numerik.
- (c) Pendekatan ketiga hanya berdasarkan pada parameter keadaan.

Melalui penggunaan metode langsung dengan pendekatan pada parameter keadaan dan variabel kendali yang diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian masalah pemrograman nonlinier, maka selanjutnya disimulasikan dengan software MISER3, yaitu suatu *toolbox* matlab untuk optimasi dinamik. Data yang digunakan diperoleh dari Dinas Pertanian, Kehutanan dan Peternakan (Disperhutanak) Provinsi Maluku.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan hasil penelitian meliputi model matematika dari rabies, analisis sistem dinamik model, masalah kontrol optimum serta simulasi secara numerik.

4.1. Model Matematika Rabies

Model matematika rabies yang dideskripsikan pada penelitian ini didasarkan pada (Panjeti dan Real, 2011) untuk meminimalkan Persamaan Lagrange: $J(\delta) = \int_0^T \left(I + \frac{\theta}{2} \delta_i^2 \right) dt$ dengan persamaan keadaan (*state-variable*) non-linier sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}(t) = -\beta SI - \epsilon \delta S + (a - b)S \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I}(t) = \beta SI - (b + \alpha)I \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R}(t) = \epsilon \delta S - bR \quad (3)$$

Variabel Keadaan :

$S(t)$ adalah Populasi yang rentan terinfeksi virus

$I(t)$ adalah Populasi yang terinfeksi virus

$R(t)$ adalah Populasi yang pulih/yang sudah kebal terhadap virus rabies

Variabel Kendali :

δ : Tingkat distribusi vaksin

Parameter :

β : Parameter penularan penyakit/ laju kontak antara anjing rentan dengan anjing yang terinfeksi rabies

ε : Kemanjuran distribusi vaksin

a : Laju kelahiran per kapita

b : Laju kematian alami

α : Laju populasi yang terkena virus rabies hingga mampu menginfeksi

Pada model matematika Rabies di atas melibatkan kontrol vaksinasi. Konsep distribusi vaksin yang dikembangkan adalah dalam bentuk distribusi vaksin oral. Penggunaan vaksinasi oral sebagai manajemen pendekatan untuk mengendalikan rabies.

4.2. Analisis Sistem Dinamik

Sistem dinamik dari persamaan 1 - 3 dapat ditentukan titik tetapnya atau titik setimbangnya dan ditentukan karakteristik stabilitasnya. Titik setimbangnya adalah titik invariant terhadap waktu. Dengan demikian titik-titik setimbang diperoleh $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$. Ada dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang endemik.

Jika diambil $I = 0$, maka akan diperoleh titik setimbang bebas penyakit dimana pada keadaan ini semua populasi yang terinfeksi virus rabies sudah tidak ada. Untuk mendapatkan titik setimbang diperoleh dari dua persamaan singular, $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$. Sehingga dari persamaan 1 diperoleh $S = 0$ sehingga titik setimbang bebas penyakit yaitu $E_0(S, I) = (0, 0)$.

Sedangkan titik setimbang endemik dipengaruhi oleh populasi yang terinfeksi virus rabies dengan $I \neq 0$. Dengan demikian dari persamaan (1) diperoleh :

$$I = \frac{a - b - \varepsilon\delta}{\beta} \quad (4)$$

Selanjutnya untuk persamaan (2) menjadi :

$$S = \frac{(b + \alpha)}{\beta} \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 5 ke persamaan 3 maka diperoleh :

$$R = \frac{\varepsilon\delta(b + \alpha)}{b\beta} \quad (6)$$

Dengan demikian diperoleh satu titik setimbang pada sistem model matematika untuk penyakit rabies yang diberikan melalui persamaan (1) - (3) yaitu titik setimbang endemik :

$$(S, I, R) = \left\{ \left(\frac{(b + \alpha)}{\beta} \right), \left(\frac{(a - b - \varepsilon\delta)}{\beta} \right), \left(\frac{\varepsilon\delta(b + \alpha)}{b\beta} \right) \right\}$$

Untuk analisa kestabilan titik kesetimbangan, dapat dibentuk matriks Jacobian dari model sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \dot{S}(t)}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{I}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \dot{I}(t)}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{R}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \dot{R}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \dot{R}(t)}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I - \varepsilon\delta + a - b & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - (b + \alpha) & 0 \\ \varepsilon\delta & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dilakukan analisa kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh, maka dapat dibentuk matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\varepsilon\delta + a - b & 0 & 0 \\ 0 & -(b + \alpha) & 0 \\ \varepsilon\delta & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut, dengan menggunakan $\det(\lambda I - J_0) = 0$, maka diperoleh :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a + b + \varepsilon\delta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + b + \alpha & 0 \\ -\varepsilon\delta & 0 & \lambda + b \end{pmatrix} = 0$$

Selanjutnya dengan menggunakan prinsip matriks segitiga bawah, maka dapat dinyatakan bahwa :

$$(\lambda - a + b + \varepsilon\delta)(\lambda + b + \alpha)(\lambda + b) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = a - b - \varepsilon\delta$$

$$\lambda_2 = -(b + \alpha)$$

$$\lambda_3 = -b$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka λ_2 dan λ_3 bernilai negatif. Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit ($I = 0$) akan stabil asimtotik lokal jika :

$$a < b + \varepsilon\delta \quad (7)$$

Ketika $\delta = 0$ (Tidak ada vaksinasi), maka dengan menggunakan nilai-nilai estimasi parameter yang diberikan pada Tabel 3 diperoleh bahwa hasilnya tidak akan memenuhi ketaksamaan (7) karena parameter $a > b$ atau dengan kata lain laju kelahiran per kapita pasti lebih besar dari laju kematian alami. Tetapi ketika $\delta = 1$ maka diperoleh bahwa titik-titik $S = 0$ dan $I = 0$ merupakan titik tetap stabil karena $a < b + \varepsilon$. Hal ini mengindikasikan bahwa jika distribusi vaksin diterapkan secara optimal pada waktu yang tepat maka kesetimbangan populasi anjing yang terinfeksi rabies akan semakin stabil atau menuju titik kesetimbangan nol.

Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan titik kesetimbangan endemik yang diperoleh, maka dapat dibentuk matriks jacobian sebagai berikut :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -(b + \alpha) & 0 \\ -(\varepsilon\delta + b) + a & 0 & 0 \\ \varepsilon\delta & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut, dengan menggunakan $\det(\lambda I - J_1) = 0$, maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2(\lambda + b) - (\varepsilon\delta + b - \alpha)(\lambda + b)(b + \alpha) = 0$$

atau

$$\lambda^3 + \lambda^2 b + \lambda(-\varepsilon\delta b - \varepsilon\delta\alpha - b^2 - b\alpha + ab + a\alpha) + b(-\varepsilon\delta b - \varepsilon\delta\alpha - b^2 - b\alpha + ab + a\alpha) = 0$$

Kestabilan untuk persamaan karakteristik dapat dicari dengan membuat tabel *Routh-Hurwitz*, dimana setiap nilainya diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan karakteristik pada Tabel 1 yang hasilnya seperti yang disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. <i>Routh-Hurwitz</i> kasus rabies		
λ^3	m_0	m_2
λ^2	m_1	m_3
λ^1	n_1	n_2
λ^0	m_3	0

dimana :

$$m_0 = 1$$

$$m_1 = b$$

$$m_2 = \varepsilon\delta b - \varepsilon\delta\alpha - b^2 - b\alpha + ab + a\alpha$$

$$m_3 = b(-\varepsilon\delta b - \varepsilon\delta\alpha - b^2 - b\alpha + ab + a\alpha)$$

$$n_1 = n_2 = 0$$

Semua suku pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* harus bertanda positif agar persamaan menjadi stabil, karena koefisien pada persamaan karakteristik bertanda positif, maka syarat perlu untuk stabil terpenuhi. Terlihat bahwa sistem akan stabil jika $m_3 > 0$ yang menyebabkan $\frac{b+\varepsilon\delta}{a} < 1$ sehingga bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk penyakit rabies adalah $\frac{b+\varepsilon\delta}{a}$. Titik keseimbangan endemik

$(S, I, R) = \left\{ \left(\frac{(b+\alpha)}{\beta} \right), \left(\frac{(a-b-\varepsilon\delta)}{\beta} \right), \left(\frac{(\varepsilon\delta(b+\alpha))}{b\beta} \right) \right\}$ stabil jika

$$\frac{b+\varepsilon\delta}{a} < 1 \quad (8)$$

Apabila $\delta = 1$ maka diperoleh bahwa titik kesetimbangan endemik tidak akan memenuhi ketaksamaan (8) karena $\frac{b+\varepsilon}{a} > 1$ jika nilai-nilai estimasi yang diberikan pada Tabel 3 diterapkan.

Ketika $\delta = 0$ (Tidak ada distribusi vaksin), diperoleh :

$$S = \frac{b+\alpha}{\beta} \quad (9)$$

$$I = \frac{a-b}{\beta} \quad (10)$$

$$R = 0 \quad (11)$$

dimana pada titik-titik kesetimbangan 9 – 11 ini memenuhi ketaksamaan 8. Hal ini mengindikasikan bahwa jika tidak ada pemberian vaksin maka populasi anjing yang terinfeksi rabies akan endemik sebanding dengan pertumbuhan per kapita $r = a - b$. Pada persamaan 9 terlihat bahwa pada saat tidak ada distribusi vaksin yang terjadi, maka jumlah populasi yang rentan terinfeksi virus tergantung pada jumlah nilai laju

kematian alami dengan angka kematian populasi yang terkena rabies per nilai parameter penularan penyakit. Kemudian berdasarkan persamaan 10 jumlah populasi yang terinfeksi tergantung pada selisih positif antara nilai laju kelahiran per kapita dengan laju kematian alami per nilai parameter penularan penyakit. Sedangkan pada persamaan 11 pada saat tidak ada distribusi vaksin yang terjadi, maka tidak akan ada populasi yang kebal / imun.

4. 3 Masalah Kendali Optimum

Varibel δ mewakili tingkat distribusi vaksin. Dalam formulasi ini, δ_{max} merupakan batas atas biasanya ditetapkan menjadi 1, yang akan mewakili tingkat maksimum distribusi vaksin. Masalah kendali optimum yang akan dioptimalkan adalah meminimalkan jumlah anjing yang terinfeksi serta biaya vaksinasi. Bentuk kendali optimum yang diteliti adalah bentuk kendali kuadratik, yang tepat pada interval waktu $[0, T]$. Fungsi objektif (indeks performa) yang akan diminimumkan dengan bentuk kendali kuadratik adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimize } J(\delta) = \int_0^T \left(1 + \frac{\theta}{2} \delta_i^2 \right) dt$$

4. 4 Simulasi Numerik dan Analisa Hasil Simulasi

Simulasi dari model matematika rabies diselesaikan dengan menggunakan program MISER3 yaitu suatu *toolbox* matlab untuk optimisasi dinamik (Jennings dkk, 2002). Sebelum melakukan simulasi terlebih dahulu ditentukan turunan dari persamaan keadaan dan persamaan Lagrange, baik terhadap semua variabel keadaan maupun terhadap variabel kendali.

Hasil simulasi ini bertujuan untuk mendapatkan nilai optimasi secara numerik dari fungsi kendali yang mengindikasikan investasi pada distribusi vaksinasi, dengan menggunakan estimasi nilai parameter pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3 Estimasi Nilai Parameter

Parameter	Nilai Estimasi
β	0,0001 hewan / hari
ε	0,5
a	0,14
b	0,00025 /hari
α	0,07 / hari

Laju kelahiran anjing per kapita (a) dapat dihitung berdasarkan angka kelahiran anjing per tahun. Berdasarkan data dari Bidang Peternakan, Dinas Pertanian Provinsi Maluku jumlah populasi anjing di kota Ambon tahun 2014 adalah 10.956 sedangkan pada tahun 2015 berjumlah 12.875 sehingga selisihnya sebesar 1.919. Dengan demikian, laju kelahiran anjing per kapita dapat diestimasi sebagai berikut:

$$a = \frac{12875 - 10956}{12875} = 0,14$$

Sedangkan untuk laju kematian (b) dapat dihitung berdasarkan angka harapan hidup. Jika rata-rata waktu hidup anjing sehat adalah 11 tahun maka laju kematian anjing secara alami adalah :

$$b = \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} = 0,00025/\text{hari}$$

Parameter $\frac{1}{\alpha}$ menunjukkan periode infeksi dimana berdasarkan Panjeti dan Real (2011), periode infeksi adalah 14 hari. Dengan demikian laju perubahan anjing sejak pertama kali terkena virus rabies hingga ia mampu menginfeksi adalah:

$$\alpha = \frac{1}{14 \text{ hari}} = 0,07/\text{hari}$$

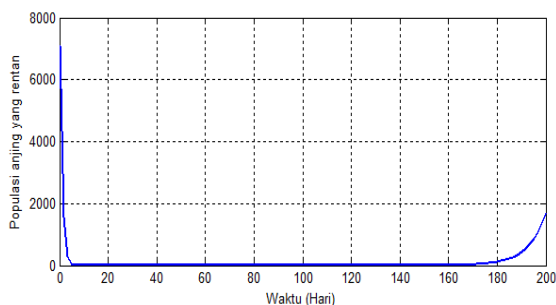
Sedangkan parameter penularan penyakit atau laju kontak antara anjing terinfeksi dengan anjing sehat adalah 0,0001 hewan / hari.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai numerik yang diberikan di atas maka model rabies di Kota Ambon berdasarkan persamaan 1 - 3 menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -0,0001SI - 0,5\delta S + 0,13975S \\ \frac{dI}{dt} &= 0,0001SI - 0,07025I \\ \frac{dR}{dt} &= 0,5\delta S - 0,00025R\end{aligned}$$

Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal $t_0 = 0$ dan waktu akhir tetap $t_f = 200$ hari. Nilai variabel kontrol untuk distribusi vaksin δ_i berkisar antara 0 dan 1. Kondisi awal masing-masing variabel keadaan sebagai berikut: populasi yang rentan terinfeksi virus sebanyak 7116, populasi yang terinfeksi virus sebanyak 3840 dan diasumsikan bahwa tidak ada populasi yang pulih/ yang sudah kebal terhadap virus rabies.

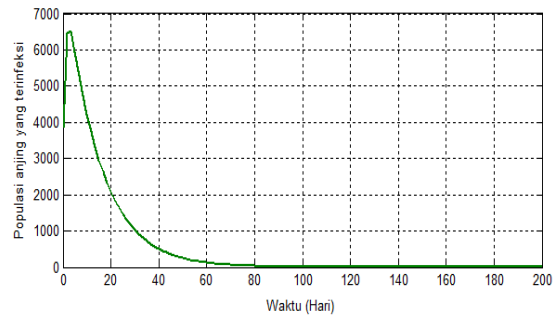
Pada tahap berikut ini dilakukan simulasi model dengan pemberian kendali untuk mengetahui pengaruh vaksinasi terhadap jumlah populasi anjing terinfeksi virus rabies. Selain itu, akan ketahu hubungan antara waktu dan konsentrasi vaksin yang harus diberikan. Teknik pengontrolan pada model penyebaran virus rabies dengan fungsi kuadrat. Nilai parameter yang digunakan estimasi parameter yang disajikan dalam Tabel 3.



Gambar 1. Grafik Populasi Anjing yang Rentan

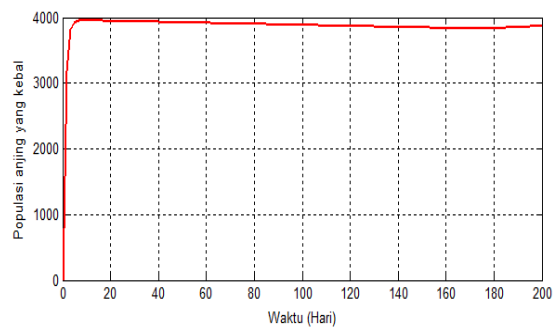
Berdasarkan Gambar 1 dapat disimpulkan bahwa trayektori populasi anjing yang rentan akan menurun atau berkurang drastis pada awal periode

($t < 5$) dan setelah $t > 5$ hari trayektori sudah berada pada titik keseimbangan nol.



Gambar 2. Grafik Populasi Anjing Yang Terinfeksi

Dari Gambar 2 di atas dapat dijelaskan bahwa trayektori populasi anjing yang terinfeksi virus rabies akan meningkat pada awal pendistribusian vaksin ($t < 3$). Namun akan menurun atau berkurang drastis pada saat $3 < t < 80$ dan setelah $t > 80$ hari trayektori sudah berada pada titik keseimbangan nol.



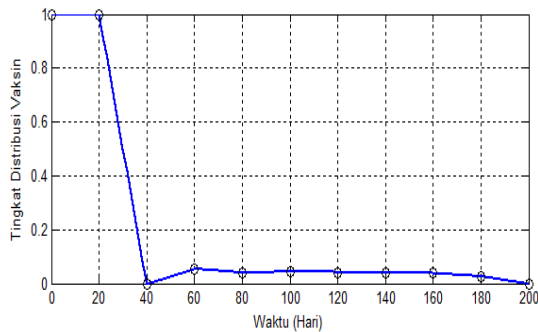
Gambar 3. Grafik Populasi Anjing Yang Kebal

Selanjutnya, berdasarkan Gambar 3 di atas dapat disimpulkan bahwa trayektori populasi anjing yang kebal akan meningkat drastis pada awal periode ($t < 3$). Namun setelah $t > 8$ hari populasi anjing yang kebal akan berkurang secara perlahan. Hal tersebut terjadi karena ketika populasi anjing mengalami kematian secara alami maka populasi anjing yang kebal juga akan semakin berkurang.

Dari hasil simulasi numerik perlu dicermati bahwa mulai dari hari ke-170 dan seterusnya terlihat bahwa populasi anjing yang rentan mengalami peningkatan (Gambar 1) karena populasi anjing mulai meningkat dengan adanya angka kelahiran anjing. Dengan demikian pemberian vaksin perlu ditambah dan tidak boleh dihentikan.

Pada Gambar 4, variabel kendali diwakili dosis atau konsentrasi vaksin yang digunakan dalam proses pengobatan sehingga dapat dilihat bahwa trayektori kendali akan berada pada titik optimal (titik $\delta = 1$) pada awal distribusi vaksin yaitu pada 20 hari. Selanjutnya trayektori semakin menurun drastis diantara $20 < t < 40$ hari dan

kemudian akan meningkat lagi pada saat $40 < t < 60$. Namun, trayektori akan menurun secara perlahan pada saat $60 < t < 72$ hari. Kemudian pada saat $t = 72$ trayektori akan mengalami sedikit saja peningkatan hingga pada saat $t = 168$ trayektori akan semakin menurun secara perlahan menuju ke titik keseimbangan nol.



Gambar 4. Grafik Tingkat Distribusi Vaksin

Dengan demikian dari grafik dapat dilihat bahwa pemberian vaksin pada 20 hari pertama akan sangat berpengaruh terhadap populasi anjing rabies. Jika pemberian vaksin pada 20 hari pertama berlangsung dengan baik dan teratur maka populasi anjing rabies akan berkurang, tetapi jika pemberian vaksin pada 20 hari pertama tidak berjalan dengan baik maka dapat meningkatkan populasi anjing rabies serta pemborosan vaksin.

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai dari setiap parameter seperti yang disajikan pada Tabel 3 ke persamaan titik setimbang endemik : $(S, I, R) = \left\{ \left(\frac{(b+\alpha)}{\beta} \right), \left(\frac{(a-b-\epsilon\delta)}{\beta} \right), \left(\frac{(\epsilon\delta(b+\alpha))}{b\beta} \right) \right\}$ dengan asumsi tidak ada pemberian vaksin maka populasi anjing yang terinfeksi rabies di kota Ambon akan endemik dengan titik kesetimbangan endemik $(S, I, R) = (703, 1398, 0)$.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa sistem dinamik dan hasil simulasi secara numerik maka dapat disimpulkan bahwa:

- Berdasarkan analisis kestabilan model matematika rabies diperoleh bahwa titik setimbangan bebas penyakit yaitu $E_0(S, I) = (0, 0)$ sedangkan titik setimbangan endemik adalah:

$$(S, I, R) = \left\{ \left(\frac{(b+\alpha)}{\beta} \right), \left(\frac{(a-b-\epsilon\delta)}{\beta} \right), \left(\frac{(\epsilon\delta(b+\alpha))}{b\beta} \right) \right\}.$$
- Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $a < b + \epsilon\delta$ sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil jika $\frac{b+\epsilon\delta}{a} < 1$.
- Jika tidak ada pemberian vaksin maka populasi anjing yang terinfeksi rabies di kota Ambon akan endemik dengan titik kesetimbangan endemik $(S, I, R) = (703, 1398, 0)$.

- Hasil model SIR rabies menunjukkan bahwa populasi anjing rabies di kota Ambon akan bebas penyakit jika tingkat distribusi vaksin dilakukan secara rutin pada 20 hari pertama, dengan dosis yang optimal.

5.2 Saran

Model ini perlu dikembangkan dengan memperhatikan faktor lain seperti penyebaran virus rabies kepada manusia ditinjau dari tingkat interaksi antara hewan yang terkena rabies dengan manusia.

DAFTAR PUSTAKA

- Dinas Kesehatan Provinsi Maluku, *Profil Maluku 2014*, 2015, Dinas Kesehatan Provinsi Maluku (kemenkes.go.id), Ambon.
- Estrada, R., Vos A., Leon, R.D., and Mueller, T., 2001. "Field Trial with Oral Vaccination of Dogs Against Rabies in the Philippines", BMC infectious Diseases BioMed Central, ISSN 1471-2334 November 2001.
- Fitri, A., Oka, T. B., dan Widana, I. N., 2014, "Model Matematika (Linier) Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi", Jurnal Matematika, ISSN 1693-1394 Vol 4, No. 2, Desember 2014 p.70-79.
- Hethcote, H.W. 2008. *The Basic Epidemiology Models: Models, Expression for R_0 , Parameter Estimation and Application*. In Mathematical Under Standing of Infectious Disease Dynamics, Lecture Note Series Institute For Mathematical Sciences, National University Of Singapore, 1-61.
- Kementrian Kesehatan Republik Indonesia (Kemenkes), *Profil Kesehatan Idonesia 2015*, 2016, Kementrian Kesehatan Republik Indonesia (kemenkes.go.id), Jakarta.
- Madigan, M.T., Martinko, J.M., Dunlap. P.V, Clark, D.P. 2009, *Brock Biology of Microorganisms, 12th Edition*. Pearson Benjammin Cummings. pp. 1003–1005
- Meslin, F.X., Miles, M.A., Vaxenat, A., and Gemmel, M.A., 2000, "Zoonoses Control in Dogs. In: *Dogs, Zoonoses dan Public Helath*". CABI Publishing, Wallingford 2000333-372.
- Muller, W., Guzel, T., Aylan, O., Kaya, C., Cox, J, and Schneider, L., 1998, "The Feasibility of Oral Vaccination of Dogs in Turkey - an European Union Supported Project", J. Etlik Vet microbiol. 9: 61-71
- Panjeti, V. G., and Real, L. A. 2011, *Mathematical Models for Rabies*. Departemen of Biology and Center for Disease Ecology, Emory University, Atlanta, Georgia, USA.

- Putra, A.A.G., 2011, "*Epidemiologi Rabies di Bali: Analisis Kasus Rabies "Semi free- Ranging Dog" dan Signifikasinya Dalam Siklus Penularan Rabies dengan Pendekatan Ekosistem*", Buletin Veteriner, BBVet Denpasar, ISSN 0854 – 901X, Vol. XXIII, No. 78, Juni 2011 p.45-55.
- Rumlawang, F., dan Nanlohy, M. I., 2011, "*Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Rabies*". Jurnal Barekang, ISSN 1978-7227 Vol. 5, No. 2, Desember 2011 p.39-44.
- Subchan, S., dan Zbikowski, R. 2009, *Computational Optimal Control Tools and Practise*, John Willey and Sons, Ltd, publication, United Kingdom.
- Wang, X., and Lou, J., 2008, "*Two Dynamic Models About Rabies Between Dogs and Human*", Journal of Biological System, Vol. 16, No. 4, July 2008 519-529.