

DISERTASI

**KONSTRUKSI FILTER KALMAN
PADA MODEL TEREDUKSI DENGAN
METODE *LINEAR MATRIX INEQUALITY* (LMI)**



NENIK ESTUNINGSIH

NIM : 081417027308

**PROGRAM STUDI S3 MIPA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2020

LEMBAR PENGESAHAN

Naskah disertasi ini telah disetujui
Pada tanggal

Oleh :

PROMOTOR

Dr. Fatmawati, M.Si.
NIP. 19730704 199802 2001

KO-PROMOTOR

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2001

Mengetahui,
DEKAN
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

Prof. WIN DARMANTO, M.S. Ph.D.
NIP. 19610616 198701 1001

Disertasi ini telah diuji pada Ujian Tertutup

Tanggal : 22 Juli 2020

PANITIA PENGUJI DISERTASI

Ketua : Dr. Miswanto, M.Si.

Anggota :

- 1. Dr. Fatmawati, M.Si. (Promotor)**
- 2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. (Ko-Promotor)**
- 3. Dr. Didik Khusnul Arif, M.Si.**
- 4. Dr. Windarto, M.Si.**
- 5. Herry Suprajitno, M.Si., Ph.D.**
- 6. Cicik Alfiniyah, M.Si., Ph.D.**

Ditetapkan dengan Surat Keputusan Dekan

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga

Nomor :

DAFTAR ISI

JUDUL		i
LEMBAR PENGESAHAN		ii
PANITIA UJIAN DISERTASI TAHAP 1 (UJIAN TERTUTUP)		iii
DAFTAR ISI		iv
PRAKATA		vi
DAFTAR GAMBAR		ix
DAFTAR TABEL		x
DAFTAR SIMBOL		xi
DAFTAR LAMPIRAN		xiv
ABSTRAK		xv
ABSTRACT		xvii
BAB I	PENDAHULUAN	1
	1.1 Latar Belakang	1
	1.2 Rumusan Masalah	4
	1.3 Tujuan Penelitian	5
	1.4 Manfaat Penelitian	5
	1.5. Batasan Penelitian	5
BAB II	TINJAUAN PUSTAKA	6
	2.1 Sistem Linear Waktu Diskrit	6
	2.2 Ketaksamaan Matriks Linear (<i>Linear Matrix Inequality</i>)	14
	2.3 Realisasi Setimbang	16
	2.4 Konstruksi Sistem Setimbang	18
	2.5 Konstruksi Model Tereduksi dengan Metode LMI	21
	2.6 Filter Kalman	35
BAB III	KERANGKA KONSEP DAN HIPOTESIS	40
	3.1 Kerangka Konsep	40
	3.2 Hipotesis	40
BAB IV	METODE PENELITIAN	43

BAB V	HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	45
	5.1 Kestabilan, Keterkendalian dan Keamanan Sistem Tereduksi	47
	5.2 Konstruksi Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tereduksi	51
	5.3 Eksistensi, Stabilitas, dan Konvergensi Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tereduksi	63
	5.4 Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tereduksi pada Masalah Real	73
	5.4.1 Estimasi distribusi konduksi panas	73
	5.4.2 Estimasi konsentrasi polusi air Kali Surabaya	82
	5.4.3 Estimasi ketinggian air sungai	88
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	93
	6.1 Kesimpulan	93
	6.2 Saran	93
	DAFTAR PUSTAKA	94
	LAMPIRAN	

PRAKATA



Dengan menyebut asma Allah Subhanahu wa Ta'ala yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Segala puji syukur tercurahkan kepada Allah Subhanahu wa Ta'ala sumber inspirasi kehidupan yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyusun disertasi ini. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Sholallahu 'alaihi wassalam, rasul pemimpin dan pembawa petunjuk yang telah membimbing manusia keluar dari kegelapan menuju cahaya iman yang terang benderang.

Disertasi dengan judul “Konstruksi Filter Kalman pada Model Tereduksi dengan Metode *Linear Matrix Inequality*” ini dipilih karena ketertarikan penulis pada topik-topik dalam teori sistem yang berkaitan dengan matriks, dalam hal ini adalah tentang algoritma estimasi filter Kalman dan metode reduksi menggunakan metode ketaksamaan matriks linear (*Linear Matrix Inequality*). Sejauh penulis ketahui penelitian topik algoritma estimasi filter Kalman berkembang dengan pesat, demikian juga dengan penelitian topik *Linear Matrix Inequality*, namun penelitian yang berkaitan dengan kolaborasi algoritma filter Kalman dengan metode reduksi menggunakan metode *Linear Matrix Inequality* masih belum terlalu banyak. Oleh karena perkembangan dan modifikasi algoritma estimasi filter Kalman cukup banyak, begitu pula perkembangan metode reduksi, serta aplikasi *Linear Matrix Inequality*, maka penulis berharap penelitian tentang kolaborasi algoritma filter Kalman dengan metode reduksi menggunakan metode *Linear Matrix Inequality* dapat terus dikembangkan bahkan setelah disertasi ini selesai.

Besar harapan penulis agar disertasi ini menjadi titik awal penulis dalam pengembangan modifikasi algoritma estimasi filter Kalman, yakni dengan melakukan kolaborasi algoritma estimasi filter Kalman dengan metode reduksi menggunakan metode *Linear Matrix Inequality*, serta memberi kemanfaatan untuk pengembangan teori estimasi pada umumnya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan saran dan masukan demi peningkatan kualitas tulisan ini.

Surabaya, Mei 2020

Penulis

UCAPAN TERIMAKASIH

Alhamdulillah robbil ‘alamin, puji syukur ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta’ala sehingga penulisan disertasi ini dapat penulis selesikan sebagai bagian akhir dari pendidikan pada Program Studi S3 Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Airlangga. Sebagai pihak-pihak yang mendukung penulis dalam menjalankan studi, penulis menyampaikan terima kasih tak terhingga kepada :

1. Rektor, Dekan, Ketua Program Studi Matematika dan Ketua Departemen Matematika Universitas Airlangga yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk menempuh pendidikan pada Program Studi S3 MIPA Universitas Airlangga.
2. Dr. Alfinda Novi Kristanti DEA selaku Ketua Program Studi S3 MIPA Universitas Airlangga.
3. Dr. Fatmawati, M.Si. dan Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku promotor dan ko-promotor yang banyak memberikan bimbingan, arahan, dukungan, dan motivasi yang tiada terbatas.
4. Teman-teman dosen dan tenaga kependidikan pada Departemen Matematika Universitas Airlangga yang sangat memberikan dukungan moril, materil, langsung maupun tidak langsung.
5. Teman seperjuangan mahasiswa Program Studi S3 MIPA Universitas Airlangga angkatan 2014/2015 yang selalu mengobarkan semangat.
6. Suami tercinta, Ahmad Mujahid Muzhaffiruddin dan anak-anakku tersayang ‘Iffah Nurul ‘Izzati, Naailah Zahroh Ramadhona, Hafidzoturahmi Muthmainnah, dan Zaimah Husnul Khotimah, terimakasih tiada terhingga atas pengertian, kesabaran, dan dorongannya.
7. Ibunda tercinta, Ngadinem Sudarmi, terimakasih atas doa-doanya.
8. Kakak-kakakku tersayang, mas Git-mbak Nanik, mas Untung-mbak Maining, mas Pung-mbak Yul, mas Lik-mbak Rini, dan mas Is-mbak Indah, terimakasih atas dukungan dan doa-doanya.
9. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan doa-doanya.

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram blok untuk operasi penjumlahan pada sistem	12
Gambar 2.2	Diagram blok dari error hasil reduksi	23
Gambar 2.3	Skema algoritma metode reduksi dengan metode LMI	32
Gambar 2.4	Algoritma filter Kalman pada sistem diskrit	39
Gambar 3.1	Skema konsep ilmiah	42
Gambar 4.1	Skema alur penelitian	44
Gambar 5.1	Skema algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi	62
Gambar 5.2	Konduksi panas pada batang kawat	74
Gambar 5.3	Grafik distribusi panas sistem asli	78
Gambar 5.4	Grafik distribusi panas sistem tereduksi dengan order 11	79
Gambar 5.5	Grafik respon frekuensi sistem asli	79
Gambar 5.6	Grafik respon frekuensi sistem tereduksi dengan order 11	80
Gambar 5.7	Grafik nilai MSE distribusi panas pada sistem asli dan sistem tereduksi dengan order 11	81
Gambar 5.8	Volume kontrol aliran sistem <i>plug flow</i>	82
Gambar 5.9	Lokasi sampling kualitas air Kali Surabaya	84
Gambar 5.10	Grafik estimasi konsentrasi polusi air Kali Surabaya sistem asli	86
Gambar 5.11	Grafik estimasi konsentrasi polusi air Kali Surabaya sistem tereduksi dengan order 10	87
Gambar 5.12	Grafik estimasi ketinggian air sungai sistem asli	91
Gambar 5.13	Grafik estimasi ketinggian air sungai sistem tereduksi	91

DAFTAR TABEL

Tabel 5.1	Error $\ G(z) - G_r(z)\ _\infty$ yang diperoleh dengan metode LMI pada masalah konduksi panas	78
Tabel 5.2	Nilai MSE, waktu komputasi reduksi dan waktu komputasi estimasi distribusi panas pada sistem asli dan sistem tereduksi	82
Tabel 5.3	Error $\ G(z) - G_r(z)\ _\infty$ yang diperoleh dengan metode LMI pada masalah kualitas air Kali Surabaya	86
Tabel 5.4	Nilai MSE dan waktu estimasi pada sistem asli dan tereduksi pada masalah kualitas air Kali Surabaya	87
Tabel 5.5	Error $\ G(z) - G_r(z)\ _\infty$ yang diperoleh dengan metode LMI pada masalah ketinggian air sungai	90
Tabel 5.6	Nilai MSE dan waktu estimasi pada sistem asli dan tereduksi pada masalah ketinggian air sungai	92

DAFTAR SIMBOL

(A, B, C, D)	Sistem diskrit <i>linear time invariant</i> (LTI) dengan order n	6
x_k	Variabel keadaan (state) pada sistem (A, B, C, D)	6
u_k	Vektor masukan (input) pada sistem (A, B, C, D)	6
y_k	Vektor keluaran(output) pada sistem (A, B, C, D)	6
\mathbb{R}^n	Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas \mathbb{R}	6
$\mathbb{R}^{n \times r}$	Himpunan semua matriks berukuran $n \times r$ atas \mathbb{R}	6
A, B, C, D	Matriks-matriks konstan pada sistem diskrit (A, B, C, D) dengan ukuran yang bersesuaian	6
\mathbb{C}	Himpunan bilangan kompleks	7
$X(z)$	Transformasi z dari $x(t)$	7
$Y(z)$	Transformasi z dari $y(t)$	7
$U(z)$	Transformasi z dari $u(t)$	7
$G(z)$	Matriks transfer dari sistem diskrit (A, B, C, D)	7
$ \lambda_i $	Modulus dari setiap nilai eigen dari matriks A .	8
A^T	Transpose dari matriks A .	9
W	Gramian keterkendalian sistem diskrit (A, B, C, D) .	9
\mathcal{C}	Matriks keterkendalian sistem diskrit (A, B, C, D)	9
M	Gramian keteramatan sistem diskrit (A, B, C, D)	10
\mathcal{O}	Matriks keteramatan sistem diskrit (A, B, C, D)	10
$G_1 + G_2$	Hubungan parallel antara sistem (A_1, B_1, C_1, D_1) dengan matriks transfer G_1 dan sistem (A_2, B_2, C_2, D_2) dengan matriks transfer G_2 .	11
$\ \cdot\ $	Suatu norma pada ruang vektor V	12
\mathcal{H}_∞	Ruang Hardy tak hingga	13
\mathcal{RH}_∞	Ruang bagian dari ruang \mathcal{H}_∞	13
$\sigma[(A)]$	Nilai singular terbesar dari matriks A	13
σ_i	Nilai singular Hankel sistem (A, B, C, D)	13
$\ \cdot\ _\infty$	Norm \mathcal{H}_∞ .	13
$A > 0$	Matriks A definit positif	14

$A \geq 0$	Matriks A semi definit positif	14
A^{-1}	Invers dari matriks A .	16
T	Matriks transformasi nonsingular berukuran $n \times n$	17
$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$	Sistem setimbang	17
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$	Matriks-matriks konstan pada sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ dengan ukuran yang bersesuaian	17
\tilde{W}	Gramian keterkendalian sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$.	18
\tilde{M}	Gramian keteramatan sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$.	18
\tilde{x}_k	Variabel keadaan (state) pada sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$	18
\tilde{u}_k	Vektor masukan (input) pada sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$	18
\tilde{z}_k	Vektor keluaran (output) pada sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$	19
Σ	Gramian kesetimbangan	20
(A_r, B_r, C_r, D_r)	Sistem diskrit tereduksi LTI dengan order $r < n$	22
A_r, B_r, C_r, D_r	Matriks-matriks konstan pada sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r) dengan ukuran yang bersesuaian	22
x_{r_k}	Variabel keadaan sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r)	22
z_{r_k}	Vektor pengukuran sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r)	22
$G_r(z)$	Matriks transfer dari sistem tereduksi (A_r, B_r, C_r, D_r)	23
$E(z)$	Error reduksi order model	23
$G_e(z)$	Matriks transfer dari $E(z)$	23
I_{k_i}	Matriks identitas berukuran $k_i \times k_i$	24
\mathcal{S}_n	Himpunan matriks-matriks definit positif berukuran $n \times n$.	27
w_k	Noise sistem pada sistem (A, B, C, D)	36
v_k	Noise pengukuran pada sistem (A, B, C, D)	36
G	Matriks koefisien noise sistem (A, B, C, D)	36
Q	Kovariansi noise sistem pada sistem (A, B, C, D)	36
R	Kovariansi noise pengukuran pada sistem (A, B, C, D)	36
$E(\cdot)$	Ekspektasi	37
\hat{x}_0	Estimasi awal	37

P_0	Kovariansi kesalahan estimasi awal	37
\hat{x}_k^-	Estimasi variabel keadaan x_k pada tahap prediksi	37
P_k^-	Kovariansi kesalahan estimasi pada tahap prediksi	37
\hat{x}_k	Estimasi variabel keadaan x_k pada tahap koreksi	37
P_k	Kovariansi kesalahan estimasi pada tahap koreksi	37
K_k	Kalman Gain	37
G_r	Matriks koefisien noise sistem tereduksi	51
Q_r	Kovariansi noise sistem pada sistem tereduksi	51
R_r	Kovariansi noise pengukuran pada sistem tereduksi	51
w_{r_k}	Noise sistem pada sistem tereduksi	51
v_{r_k}	Noise pengukuran pada sistem tereduksi	51
\hat{x}_{r_k}	Estimasi variabel keadaan x_{r_k} pada sistem tereduksi pada tahap prediksi	52
$P_{x_{r_k}}$	Kovariansi kesalahan estimasi variabel keadaan x_{r_k} pada sistem tereduksi pada tahap prediksi	52
\hat{z}_{r_k}	Estimasi untuk vektor pengukuran z_{r_k}	55
$P_{z_{r_k}}$	Kovariansi kesalahan estimasi vektor pengukuran z_{r_k}	55
$P_{x_{r_k} z_{r_k}}$	Kovariansi silang (<i>cross covariance</i>) variabel keadaan x_{r_k} dan vektor pengukuran z_{r_k}	55
$P_{z_{r_k} x_{r_k}}$	Kovariansi silang (<i>cross covariance</i>) variabel keadaan x_{r_k} dan vektor pengukuran z_{r_k}	56
$P_{x_{r_{k+1}}}^+$	Kovariansi kesalahan estimasi variabel keadaan x_{r_k} pada sistem tereduksi pada tahap koreksi	56
$\hat{x}_{r_{k+1}}^+$	Estimasi variabel keadaan x_{r_k} pada sistem tereduksi pada tahap koreksi	57
$K_{x_{r_{k+1}}}$	Matriks Kalman Gain dari sistem tereduksi stokastik	61
$e_{x_{r_{k+1}}}$	Error estimasi sistem tereduksi	61

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN I	PERSAMAAN DAN PERBEDAAN METODE REDUKSI
LAMPIRAN II	REDUKSI MODEL DENGAN METODE <i>LINEAR</i> <i>MATRIX INEQUALITY</i> (LMI)
LAMPIRAN III	HASIL SIMULASI MASALAH KONDUKSI PANAS
LAMPIRAN IV	HASIL SIMULASI MASALAH KUALITAS AIR KALI SURABAYA
LAMPIRAN V	HASIL SIMULASI MASALAH KETINGGIAN AIR SUNGAI
LAMPIRAN VI	DAFTAR RIWAYAT HIDUP
LAMPIRAN VII	HASIL PUBLIKASI