

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bagian ini akan diuraikan beberapa hal yang mendasari penelitian, pentingnya penelitian dan tujuan yang diinginkan, serta manfaat yang diharapkan jika penelitian ini telah dilakukan. Uraian disampaikan secara ringkas merujuk pada beberapa hasil penelitian sebelumnya sehingga nampak jelas keberadaan penelitian ini dalam kaitan dengan penelitian yang sudah ada dan pengembangannya di masa yang akan datang.

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika dan termasuk dalam bidang aljabar. Sebuah graf terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi dengan syarat himpunan titik tidak boleh kosong. Awal mula perkembangan teori graf dimulai dari pemecahan masalah jembatan Königsberg di Eropa. Di kota Königsberg terdapat sungai Pregel yang melintasi kota dan memisahkan kota tersebut menjadi empat wilayah daratan. Di antara empat daratan tersebut dibangun tujuh jembatan yang menghubungkan wilayah daratan. Diawali dengan ide merancang cara bagaimana seseorang dapat berjalan di empat daratan kota Königsberg dengan menyeberangi tujuh jembatan hanya sekali, apakah mungkin hal itu dapat dilakukan? Meskipun tidak ada warga Königsberg yang bisa menemukan rute yang memungkinkan mereka untuk menyeberangi setiap jembatan hanya satu kali, tetapi mereka juga tidak dapat membuktikan bahwa itu tidak mungkin.

Pada tahun 1736, Leonard Euler, seorang ahli matematika dari kota St. Petersburg menyajikan makalah yang berisi solusi untuk masalah jembatan Königsberg. Leonard Euler memecahkan masalah ini dengan memisalkan daratan sebagai titik (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*). Terkait masalah jembatan Königsberg ini, Leonard Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui tujuh jembatan masing-masing hanya satu kali untuk menuju ke empat daratan di kota Königsberg. Makalah ini disebut 'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis' yang kemudian diterbitkan pada 1741. Konsep yang digunakan untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg ini kemudian dikenal sebagai awal perkembangan teori graf (Paoletti, 2011).

Salah satu topik penelitian pada teori graf yang telah berkembang adalah dimensi metrik. Dalam Rodriguez-Velazquez, dkk (2014) konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater (1975) dan secara terpisah oleh Harary dan Melter (1976). Representasi titik pada graf secara umum dinamakan *metric generator*, Harary dan Melter

menyebutnya sebagai *resolving set* sedangkan Slater menyebutnya sebagai *location set*. Harary dan Melter (1976) telah membangun konsep basis dan dimensi pada graf. Basis pada graf adalah himpunan titik dengan kardinalitas minimal yang mengakibatkan setiap titik pada graf mempunyai penyajian berbeda (*resolving set*) terhadap basis tersebut, sedangkan dimensi adalah banyaknya elemen pada basis. Karena penyajian setiap titik ditentukan berdasarkan jarak (metrik) antara dua titik, maka dimensi yang dimaksud dinamakan dimensi metrik. Pesatnya perkembangan penelitian tentang dimensi metrik tidak terlepas dari perluasan objek penelitian yaitu graf yang merupakan hasil operasi sehingga menghasilkan graf baru serta perluasan konsep dimensi metrik yang meliputi dimensi metrik lokal, dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan serta dimensi metrik fraksional dan dimensi metrik fraksional lokal.

Penelitian terkait dimensi metrik pada graf telah dilakukan oleh banyak peneliti. Chartrand, dkk (2000) menemukan karakterisasi dimensi metrik pada graf lintasan, pengelompokan nilai dimensi metrik pada graf terhubung, serta karakterisasi dimensi metrik suatu graf yang bernilai $n - 2$ dengan memertimbangkan banyak titik dan diameter dari graf. Iswadi, dkk (2010) meneliti dimensi metrik pada graf yang memiliki titik berderajat satu, sedangkan Kousar, dkk (2010) meneliti beberapa graf terhubung yang mempunyai diameter 2 dan dimensi metrik yang sama. Selanjutnya Baca, dkk (2011) berhasil menemukan dimensi metrik pada graf k -partit reguler dan Ali, dkk (2012) meneliti dimensi metrik beberapa graf yang memuat siklus dan nilai dimensi metriknya konstan.

Konsep dimensi metrik lokal pertama kali diperkenalkan oleh Okamoto, dkk (2010) dengan memertimbangkan himpunan pembeda dua titik yang bertetangga sehingga diperoleh nilai dimensi metrik lokal suatu graf. Okamoto, dkk (2010) berhasil mendapatkan karakterisasi graf dengan nilai dimensi metrik lokal sama dengan 1, selanjutnya Rinurwati, dkk (2017) meneliti dimensi metrik lokal pada graf hasil operasi korona sisi antara graf dengan graf berordo 1.

Dimensi metrik fraksional merupakan topik bahasan terbaru dalam dimensi metrik. Konsep dimensi metrik fraksional pertama kali diinisiasi oleh Currie dan Oellermann (dalam Benish, dkk (2018)) dengan mendefinisikannya sebagai solusi optimal dari masalah relaksasi linear problem *integer programming* pada dimensi metrik suatu graf. Selanjutnya Arumugam dan Mathew (2012) mengembangkan konsep tersebut dengan mendefinisikan persekitaran pembeda, fungsi pembeda, dan nilai minimum dari fungsi pembeda. Setiap titik pada elemen fungsi pembeda diberi bobot bilangan pecahan antara 0 dan 1, dan pembobotan inilah yang membedakan konsep dimensi metrik fraksional dengan dimensi metrik. Satu

tahun kemudian Arumugan, dkk (2013) meneliti dimensi metrik fraksional pada hasilkali kartesian antara dua graf terhubung yang diakhiri dengan 4 *open problem*. Selanjutnya Feng, dkk (2014) meneliti dimensi metrik fraksional pada graf Hamming dan graf Johnson serta menyelesaikan *open problem* yang disampaikan oleh Arumugan, dkk (2013). Feng dan Wang (2014) juga melakukan penelitian dimensi metrik fraksional pada graf hasil operasi korona dan hasilkali *lexicographic* dua graf, sedangkan Yi (2015) meneliti dimensi metrik fraksional pada graf permutasi, serta Krismanto dan Saputro (2015) meneliti dimensi metrik fraksional graf pohon dan graf *unicyclic*.

Perkembangan terbaru penelitian dimensi metrik fraksional adalah dimensi metrik fraksional lokal. Benish, dkk (2018) mendefinisikan persekitaran pembeda lokal dari dua titik yang bertetangga dan fungsi pembeda lokal. Dalam penelitiannya, Benish, dkk (2018) mendapatkan beberapa karakterisasi batas nilai dimensi metrik fraksional lokal pada beberapa graf dan mendapatkan nilai dimensi metrik fraksional lokal pada hasilkali kartesian (kuat) dari graf. Sementara itu Aisyah, dkk (2019) mendapatkan nilai dimensi metrik fraksional lokal pada graf hasil operasi korona dan *comb*, serta Liu, dkk (2019) mendapatkan nilai dimensi metrik fraksional lokal pada graf Jahangir $J_{m,k}$ untuk $k \geq 0$ dan $m = 5$.

Sebagaimana ilmu pada umumnya, perkembangan teori graf tidak terlepas dari perkembangan ilmu lain yaitu matematika, khususnya aljabar. Objek graf dapat diperluas ke sistem aljabar yang sudah dikenal selama ini dengan membuat definisi titik dan sisi yang *well-defined*. Sebagai contoh, dari struktur grup (himpunan tak kosong dengan satu operasi biner) atau ring (himpunan tak kosong dengan dua operasi biner) dapat dibangun graf dengan membuat definisi baru terkait titik dan sisi, selanjutnya dilakukan analisis sifat-sifat graf berdasarkan sifat-sifat grup/ring pembentuknya.

Penelitian yang mengaitkan sifat graf dengan sifat grup/ring penyusunnya telah banyak dilakukan oleh banyak peneliti. Beck (1988) memperkenalkan pengertian graf pembagi nol dari sebarang ring komutatif dengan mendefinisikan titik adalah elemen dari ring, sedangkan dua titik bertetangga jika hasil perkaliannya adalah nol. Dengan definisi di atas, Beck meneliti beberapa sifat graf dan menerapkannya pada beberapa ring komutatif (termasuk hasilkali silang dua ring). Selanjutnya Anderson dan Livingston (1999) menggunakan definisi yang sama dan menemukan beberapa sifat terkait diameter, *girth*, dan isomorfisma pada graf pembagi nol. Redmond (2002, 2006) juga menggunakan definisi Beck (1988) untuk meneliti graf pembagi nol dari ring tak komutatif dan menentukan radius, diameter, himpunan dominasi; sedangkan Akbari dan Mohammadian (2007) meneliti graf pembagi nol yang dibangun dari ring komutatif berhingga. Selanjutnya Azimi, dkk (2012) meneliti

sifat-sifat graf Jacobson yang dibangun dari sebarang ring komutatif dengan elemen satuan tak nol, dalam hal ini definisi titik dan sisi dibangun dari pengertian radikal jacobson dan unit pada ring. Selanjutnya, Gaur dan Sharma (2013) meneliti graf maksimal yang dibangun dari sebarang ring komutatif dengan elemen satuan, yang mana definisi titik dan sisi dibangun dari pengertian ideal maksimal; Pathak (2015) meneliti graf pembagi nol dari ring komutatif bilangan bulat modulo n hingga menentukan bilangan kromatik pada graf; sedangkan Dorbidi (2016) meneliti graf koprime yang dibangun dari sebarang grup dan mengelompokkan grup tersebut berdasarkan sifat graf lengkap k -partit dan graf planar. Pada tahun 2017, Shafieil, dkk meneliti graf *annihilating* dari sebarang ring yang mempunyai elemen satuan, dengan memanfaatkan definisi ideal dan *annihilator* (pengenol) untuk membangun titik dan sisi, serta Novictor, dkk (2020) meneliti graf Jacobson yang dibentuk dari ring komutatif Z_3^n dan diperoleh beberapa sifat yang mengaitkan antara graf dengan ring pembentuknya.

Beberapa penelitian dengan objek grup atau ring seperti dikemukakan di atas sangat menginspirasi penulis untuk melakukan penelitian tentang dimensi metrik dan dimensi metrik fraksional pada graf yang dikembangkan dari ring komutatif. Sebagai objek penelitian, pada kesempatan ini dipilih ring bilangan bulat modulo n dengan komponen titik adalah elemen selain nol, sedangkan kriteria keberterangaan dua titik didasarkan pada sifat prima relatif dari kedua titik tersebut. Salah satu alasan dipilihnya ring bilangan bulat modulo n didasarkan pada banyaknya elemen ring yang berhingga sehingga diharapkan definisi baru yang dibuat tentang titik dan sisi akan terdefinisi dengan baik (*well-defined*).

1.1. Rumusan Masalah

Penelitian ini fokus pada penentuan nilai dimensi metrik, dimensi metrik lokal, dimensi metrik fraksional, dan dimensi metrik fraksional lokal dari graf prima relatif yang dibentuk dari ring bilangan bulat modulo n . Berdasarkan uraian sub bab 1.1, permasalahan yang timbul dan akan diselesaikan dalam penelitian ini adalah:

- a. Bagaimana menentukan dimensi metrik dari graf prima relatif?
- b. Bagaimana menentukan dimensi metrik lokal dari graf prima relatif?
- c. Bagaimana menentukan dimensi metrik fraksional dari graf prima relatif?
- d. Bagaimana menentukan dimensi metrik fraksional lokal dari graf prima relatif?

1.2. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

- a. Menentukan dimensi metrik dari graf prima relatif.
- b. Menentukan dimensi metrik lokal dari graf prima relatif.
- c. Menentukan dimensi metrik fraksional dari graf prima relatif.
- d. Menentukan dimensi metrik fraksional lokal dari graf prima relatif.

1.3. Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini akan diperoleh nilai dimensi metrik, dimensi metrik lokal, dimensi metrik fraksional, dan dimensi metrik fraksional lokal dari graf prima relatif yang dibangun dari ring bilangan bulat modulo n . Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi bahan kajian dalam penelitian dimensi metrik dengan objek penelitian yang dibangun dari sistem aljabar. Pengembangan ke arah topik penelitian dapat dilakukan dengan meneliti bilangan dominasi, pewarnaan graf, atau pelabelan graf. Di sisi lain, objek penelitian dapat dikembangkan pada ring/grup selain ring bilangan bulat modulo n dengan definisi titik dan sisi mengacu pada karakteristik tertentu dalam ring/grup tersebut. Dengan demikian akan semakin terbuka topik penelitian di bidang teori graf yang dapat dikaji dengan pengembangan konsep atau perluasan objek penelitian.

Secara umum manfaat penelitian ini lebih bersifat pengembangan ilmu yang mengombinasikan antara konsep dalam teori graf dengan karakteristik tertentu dari sistem aljabar yang telah dikenal selama ini. Dengan mengombinasikan konsep pada graf dengan konsep pada grup/ring, akan didapatkan nuansa baru pengembangan teori graf yang lebih komprehensif dan lebih aplikatif. Dengan demikian diharapkan akan semakin banyak penelitian di bidang ini dan semakin terbuka lebar topik-topik penelitian yang dapat diteliti nantinya.