

PROSIDING

# Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya 2017

Peranan Matematika dan Sistem Informasi  
di Era Big Data untuk Menunjang  
Perkembangan Iptek di Indonesia

Gedung Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga  
Surabaya, 21 Oktober 2017

**Editor**

Indra Kharisma Raharjana, S.Kom., M.T.

Auli Damayanti, S.Si, M.Si

Indah Werdiningsih, S.Si, M.Kom

Taufik, S.T., M.Kom.

**Penerbit**

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga

Surabaya

**Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya 2017**  
**Peranan Matematika dan Sistem Informasi di Era Big Data untuk Menunjang Perkembangan**  
**Iptek di Indonesia**

**Editor**

Indra Kharisma Raharjana, S.Kom., M.T.

Auli Damayanti, S.Si, M.Si

Indah Werdiningsih, S.Si, M.Kom

Taufik, S.T., M.Kom.

Cetakan Pertama, Oktober 2017

Desain cover : Taufik, S.T, M.Kom

Hak Cipta © 2017 pada Penulis, Diterbitkan oleh Departemen Matematika Fakultas Sains dan  
Teknologi Universitas Airlangga Surabaya

ISBN : 978-602-14413-1-2

Diterbitkan oleh  
Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga  
Surabaya

Kampus C UNAIR  
Jl. Mulyorejo Surabaya (6000115)  
Telp. (031) 5936501, 5924614 Fax (031) 5936502

***Tim Reviewer***

Dr. Herry Suprajitno, M.Si

Dr. Windarto, M.Si

Dr. Liliek Susilowati, M.Si

Dr. Ardi Kurniawan, M.Si

Ira Puspitasari, M.T, Ph.D

Dr. Moh. Imam Utoyo, M.Si

Dr. Fatmawati, M.Si

Dr. Nur Chamidah M.Si

Dr. Rimuljo Hendradi, M.Si

Drs. Eto Wuryanto, DEA

Abdulloh Jaelani, S.Si, M.Si

**SUSUNAN PANITIA  
SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA 2017**

Pelindung	: Rektor Universitas Airlangga
Penasehat	: Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UNAIR Wakil Dekan I Fakultas Sains dan Teknologi UNAIR Wakil Dekan II Fakultas Sains dan Teknologi UNAIR Wakil Dekan III Fakultas Sains dan Teknologi UNAIR
Penanggung Jawab Kegiatan	: Badrus Zaman, S.Kom, M.Cs
Steering Committee	: Dr. Moh. Imam Utoyo, M.Si Drs. Eko Tjahjono, M.Si Dr. Miswanto Dr. Eridani, M.Si
Ketua Panitia	: Dr. Fatmawati, M.Si
Wakil Ketua I	: Dr. Nur Chamidah M.Si
Wakil Ketua II	: Dr. Rimuljo Hendradi, M.Si
Sekretaris	: Eva Hariyanti, S.Si, M.T
Bendahara I	: Ir. Dyah Herawatie, M.Si
Bendahara II	: Siti Zahidah, S.Si, M.Si
Sie Ilmiah	: Dr. Herry Suprajitno, M.Si Dr. Moh. Imam Utoyo, M.Si Dr. Windarto, M.Si Dr. Liliek Susilowati, M.Si Dr. Ardi Kurniawan, M.Si Dr. Nur Chamidah M.Si Drs. Eto Wuryanto, DEA Ira Puspitasari, M.T, Ph.D
Sie Kesekretariatan	: Abdulloh Jaelani, S.Si, M.Si Asri Bakti Pratiwi, S.Si, M.Si Purbandini, S.Si, M.Kom Marisa Rifada, S.Si, M.Si Abdul Latief Indah Sudarwati Khoni Iswantomo
Sie Acara	: Dr. Liliek Susilowati, M.Si Army Justitia, S.Kom, M.Kom Endah Purwanti, S.Si, M.Kom Dra. Inna Kuswandari, M.Si Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si
Sie Dana	: Drs. Kartono, M.Kom (Koordinator) Drs. Sediono, M.Si Abdulloh Jaelani, S.Si, M.Si

- Sie Prosiding : Indra Kharisma Raharjana, S.Kom, M.T.  
Auli Damayanti, S.Si, M.Si  
Indah Werdiningsih, S.Si, M.Kom  
Taufik, S.T, M.Kom  
Azis
- Sie Konsumsi : Dra. Utami Dyah Purwati, M.Si  
Ir. Elly Ana, M.Si  
Dra. Rini Semiati, M.Si  
Yuli Ika Wahyu Utami
- Sie Website : Drs. Edi Winarko, M.Cs  
Indah Yulia, P, S.ST, M.T  
Vega Andi Budiman
- Sie Desain & PubDok : Taufik, S.T, M.Kom  
Rachman Sinatriya M, M.Sc  
Sumilan
- Sie Perlengkapan dan Keamanan : Drs. Eto Wuryanto, DEA  
M. Yusuf, S.Si, M.Si  
Drs. Suliyanto, M.Si  
Kurnia Mahartanto  
Eko Ardianto
- Sie Akomodasi dan Transportasi : Faried Effendy, S.Si, M.Kom  
Barry Nuqoba, S.Si, M.Kom

# Kata Pengantar

---

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT, sehingga buku prosiding hasil dari Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya 2017 (SNMA 2017) dapat diterbitkan. SNMA 2017 ini diselenggarakan oleh Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga pada hari Sabtu, 21 Oktober 2017, bertempat di Gedung Fakultas Sains dan Teknologi, Kampus C, UNAIR Jl. Mulyorejo Surabaya.

Seminar ini dimaksudkan sebagai sarana untuk publikasi penelitian dan karya tulis, serta sebagai upaya untuk menjalin komunikasi antara praktisi, akademisi dan institusi yang turut serta mengoptimalkan dan memanfaatkan hasil-hasil riset dan inovasi dalam berbagai bidang. Makalah yang dimuat terdiri dari beberapa topik yang terpilih oleh Tim Penilai dan telah dipresentasikan dalam SNMA 2017, yaitu dalam bidang Aljabar dan Graf, Analisis, Matematika Terapan, Statistika, Sistem informasi dan Pendidikan Matematika.

Terakhir, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya prosiding SNMA 2017. Semoga prosiding ini memberi manfaat kepada pembaca dan penulis.

Surabaya, Oktober 2017  
Ketua Panitia

Dr. Fatmawati, M.Si

# DAFTAR ISI

## Analisis & Aljabar

<b>KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG KUASI METRIK TAK HOMOGEN TERBOBOTI</b> <i>Mohammad Imam Utoyo</i>	1
<b>CRYPTOGRAPHIC RANDOMNESS TESTING PADA ALGORITMA BLOCK CIPHER CAMELLIA MENGGUNAKAN UJI COVERAGE</b> <i>Adrian Admi</i>	6
<b>KAJIAN OPERATOR ACCRETIVE DAN SIFAT KETERBATASAN PADA RUANG HILBERT</b> <i>Susilo Hariyantoe , Y.D Sumanto , Solikhin, Abdul Aziz</i>	11

## Matematika Terapan

<b>KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE III DAN PENYAKIT PADA PEMANGSA SUPER</b> <i>A. Muh. Amil Siddik , Syamsuddin Toaha , Kasbawati</i>	16
<b>PENGARUH MAKANAN TAMBAHAN DALAM SISTEM MANGSA-PEMANGSA BEDDINGTON- DEANGELIS</b> <i>Ali Kusnanto, Hani Ammariah, Elis Khatizah</i>	24
<b>EVALUASI SIFAT COMPLETENESS ALGORITMA SNOW 2.0 DENGAN MENGGUNAKAN METODE DIFFUSION TEST</b> <i>A'mas</i>	29
<b>PENGEPAKAN LINGKARAN DALAM PERSEGI PANJANG DENGAN METODE ALGORITMA GENETIKA</b> <i>Bella Ayu Amalia, Herry Suprajitno, Asri Bekti Pratiwi</i>	34
<b>PREDIKSI CUACA MENGGUNAKAN ALGORITMA PARTICLE SWARM OPTIMIZATION-NEURAL NETWORK (PSONN)</b> <i>Dinita Rahmalia</i>	41
<b>ANALISIS KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV PADA POPULASI HETEROSEKSUAL</b> <i>Endrik Mifta Shaiful , Angga Setiawan</i>	49
<b>STRATEGI OPTIMAL PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV PADA INDUSTRI SEKS KOMERSIAL</b> <i>Firman Riyudha, Endrik Mifta Shaiful</i>	53
<b>Model Penyebaran Middle East Respiratory Syndrome (MERS) Dengan Pengaruh Pengobatan</b> <i>Lazarus Kalvein Beay</i>	59
<b>PENYELESAIAN MASALAH DIFUSI PANAS PADA SUATU KABEL PANJANG</b> <i>Moh. Alex Maghfur , Ari Kusumastuti</i>	65
<b>KESTABILAN MODEL POPULASI SATU MANGSA-DUA PEMANGSA DENGAN PEMANENAN OPTIMAL PADA PEMANGSA</b> <i>Muhammad Ikbal, Syamsuddin Toaha, Kasbawati</i>	73
<b>ANALISIS STABILITAS PENYEBARAN VIRUS EBOLA PADA MANUSIA</b> <i>Mutholafatul Alim , Ari Kusumastuti</i>	81
<b>ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOINFEKSI MALARIA-TIFUS</b> <i>Nur Hamidah , Fatmawati , Utami Dyah Purwati</i>	87
<b>FUNGSI BANTU NONPARAMETRIK BARU UNTUK MENYELESAIKAN OPTIMASI GLOBAL</b> <i>Ridwan Pandiya, Emi Iryanti</i>	97

# ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOINFEKSI MALARIA-TIFUS

Nur Hamidah<sup>1)</sup>, Fatmawati<sup>2)</sup>, Utami Dyah Purwati<sup>3)</sup>

<sup>1)2)3)</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga  
Kampus C Unair Mulyorejo, Surabaya

<sup>1)</sup>nur.hamidah-13@fst.unair.ac.id

<sup>2)</sup>fatmawati@fst.unair.ac.id

<sup>3)</sup>utamidyahpurwati@gmail.com

**Abstract**— Malaria disebabkan oleh parasit *Plasmodium* dan disebarkan melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Sementara itu, tifus disebabkan oleh bakteri *Salmonella Typhi* pada makanan maupun air yang terkontaminasi. Meskipun malaria dan tifus memiliki perbedaan dalam penyebab dan rute penyebaran, kedua penyakit ini dapat menginfeksi manusia yang sama, yang dikenal dengan koinfeksi malaria-tifus. Berdasarkan hasil analisis model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus diperoleh *basic reproduction number* dari penyebaran malaria ( $R_{0m}$ ) dan *basic reproduction number* dari penyebaran tifus ( $R_{0t}$ ). Kedua besaran ini menentukan syarat kestabilan titik setimbang model. Titik setimbang non endemik stabil asimtotis lokal jika  $R_{0m} < 1$  dan  $R_{0t} < 1$ . Pada *paper* ini juga dilakukan analisis sensitivitas parameter. Selanjutnya dari hasil simulasi numerik, terlihat bahwa laju infeksi malaria pada manusia, laju kematian alami nyamuk dan laju infeksi tifus memiliki pengaruh yang signifikan terhadap jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus.

**Keywords**— Model Matematika, Malaria, Tifus, Koinfeksi, Kestabilan, Analisis Sensitivitas Parameter

## I. PENDAHULUAN

Malaria merupakan penyakit demam akut yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium*. Penyakit ini menular antar manusia melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Gejala awal yang muncul pada penderita malaria antara lain demam, sakit kepala, menggigil serta muntah-muntah. Pada individu non-imun gejala ini akan muncul minimal tujuh hari setelah gigitan nyamuk *Anopheles*, namun gejala awal tersebut seringkali sangat ringan dan sulit dibedakan dari demam pada umumnya. Malaria mewabah di sub-Sahara Afrika, namun tidak dipungkiri negara-negara berkembang di Asia, Amerika Latin dan Timur Tengah juga beresiko terjangkit malaria. Data terakhir dari WHO pada Desember 2015 menyatakan bahwa telah terjadi 214 juta kasus malaria dengan 438.000 kematian (WHO, 2016).

Berbeda dari malaria, tifus disebabkan oleh bakteri *Salmonella Typhi* yang terdapat pada makanan maupun air yang terkontaminasi. Sementara itu sama halnya dengan malaria, gejala awal pada tifus terkadang tidak spesifik dan tidak dapat dibedakan secara klinis dari penyakit demam yang lain. Tifus yang akut ditandai dengan demam berkepanjangan, sakit kepala, konstipasi atau terkadang diare. Berdasarkan data terakhir tahun 2014, setidaknya setiap tahun terjadi 21 juta kasus dengan 222.000 kematian akibat tifus di seluruh dunia (WHO, 2015).

Meskipun malaria dan tifus memiliki perbedaan dalam penyebab dan rute penyebaran, kedua penyakit ini memiliki hubungan yang menarik yaitu terjadinya koinfeksi dan kesalahan diagnosis. Koinfeksi malaria-tifus diawali dengan munculnya anemia. Individu yang terinfeksi malaria umumnya juga mengidap anemia. Hal ini yang mengakibatkan adanya peningkatan pertumbuhan bakteri *Salmonella*. Kemudian dari peningkatan tersebut terjadilah tifus pada penderita malaria. Selain memang ada kemungkinan terjadinya koinfeksi, hubungan menarik lainnya antara malaria dan tifus adalah adanya kesalahan dalam diagnosis. Kesalahan diagnosis yang terjadi disebabkan oleh gejala awal infeksi dari kedua penyakit ini yang hampir sama yaitu demam, sakit kepala, mual, dan diare (Mutua dkk, 2015).

Penelitian tentang malaria dan tifus telah dikaji dalam berbagai bidang keilmuan, salah satunya bidang matematika yaitu menggunakan model matematika. Adetunde (2008) mengkonstruksi model penyebaran tifus dengan mengasumsikan bahwa tifus ditularkan secara langsung dari individu terinfeksi ke individu rentan. Mushayabasa (2011) melakukan studi tentang model matematika tifus untuk mengetahui pengaruh vaksinasi pada penyebaran tifus. Chitnis dkk (2006) mengkonstruksi model matematika penyebaran malaria dengan asumsi bahwa manusia yang sembuh dari malaria memiliki kekebalan sementara sebelum kembali menjadi rentan. Okosun dan Makinde (2011) melakukan studi tentang model matematika malaria untuk mengetahui pengaruh adanya populasi yang kebal obat terhadap penyebaran malaria. Sementara itu,



model matematika koinfeksi malaria-tifus telah dikembangkan oleh Mushayabasa dkk pada tahun 2014. Hasil dari penelitian tersebut adalah konstruksi model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus dengan asumsi bahwa individu yang terkena koinfeksi dengan menunjukkan gejala dari salah satu penyakit, dapat diobati dengan dua cara yaitu pengobatan koinfeksi atau pengobatan infeksi tunggal. Selain itu, juga diasumsikan bahwa individu yang sembuh dari koinfeksi ataupun salah satu penyakit akan memiliki kekebalan sementara.

Selanjutnya pada tahun 2015, Mutua dkk mengkonstruksi model koinfeksi malaria-tifus dengan asumsi bahwa tifus menyebar melalui bakteri di lingkungan yang mengkontaminasi makanan maupun air. Oleh karena itu perlu ditambahkan kompartemen baru berupa perubahan populasi bakteri di lingkungan. Model yang dikembangkan oleh Mutua dkk tersebut memperhatikan populasi laten baik pada penderita malaria maupun tifus. Pada paper ini, penulis melakukan modifikasi dari model yang telah dikembangkan Mutua dkk (2015) yakni populasi yang laten tidak diperhatikan. Selanjutnya model tersebut akan disimulasikan dan diinterpretasikan untuk mengetahui hubungan dari malaria dan tifus.

## II. MODEL MATEMATIKA

Asumsi yang digunakan dalam pembentukan model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus adalah sebagai berikut:

1. Populasi manusia, nyamuk dan bakteri bersifat tertutup artinya tidak ada perpindahan dari satu tempat ke tempat lain.
2. Setiap individu manusia atau nyamuk terlahir dalam keadaan rentan.
3. Masa inkubasi diabaikan, sehingga populasi yang terinfeksi dapat langsung menularkan penyakit.
4. Pertambahan bakteri dari manusia yang terinfeksi tifus lebih banyak daripada pertambahan bakteri dari manusia yang *carrier* tifus.
5. Koinfeksi malaria-tifus tidak dapat terjadi secara langsung, namun bertahap dari terinfeksi malaria kemudian terjadi koinfeksi tifus maupun sebaliknya.
6. Kematian akibat penyakit diperhatikan.
7. Individu yang sembuh dari satu atau kedua penyakit menjadi kebal

Notasi serta definisi variabel dan parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus tertera pada Tabel 1 dan Tabel 2. Selanjutnya, model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus adalah sebagai berikut:

$$\frac{dX_{SS}}{dt} = \Lambda_h - \beta B X_{SS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{SS}}{N_h} I_m - \mu_h X_{SS} \quad (1)$$

$$\frac{dX_{SI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{SS}}{N_h} I_m - (\mu_h + \alpha_h + \omega + \psi \beta B) X_{SI} \quad (2)$$

$$\frac{dX_{SR}}{dt} = \alpha_h X_{SI} - (\mu_h + \beta B) X_{SR} \quad (3)$$

$$\frac{dX_{IS}}{dt} = \beta B X_{SS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{IS}}{N_h} I_m - (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) X_{IS} \quad (4)$$

$$\frac{dX_{II}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{IS}}{N_h} I_m + \psi \beta B X_{SI} - (\mu_h + \lambda + \omega + \alpha_t + \theta \alpha_h + \sigma \eta) X_{II} \quad (5)$$

$$\frac{dX_{IR}}{dt} = \theta \alpha_h X_{II} + \beta B X_{SR} - (\mu_h + \lambda + \alpha_t + \eta) X_{IR} \quad (6)$$

$$\frac{dX_{CS}}{dt} = \alpha_t X_{IS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{CS}}{N_h} I_m - (\mu_h + \gamma) X_{CS} \quad (7)$$

$$\frac{dX_{CI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{CS}}{N_h} I_m + \alpha_t X_{II} - (\mu_h + \omega + \theta \alpha_h + \sigma \gamma) X_{CI} \quad (8)$$

$$\frac{dX_{CR}}{dt} = \theta \alpha_h X_{CI} + \alpha_t X_{IR} - (\mu_h + \gamma) X_{CR} \quad (9)$$

$$\frac{dX_{RS}}{dt} = \gamma X_{CS} + \eta X_{IS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{RS}}{N_h} I_m - \mu_h X_{RS} \quad (10)$$

$$\frac{dX_{RI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{RS}}{N_h} I_m + \sigma \gamma X_{CI} + \sigma \eta X_{II} - (\mu_h + \omega + \alpha_h) X_{RI} \quad (11)$$

$$\frac{dX_{RR}}{dt} = \alpha_h X_{RI} + \gamma X_{CR} + \eta X_{IR} - \mu_h X_{RR} \quad (12)$$

$$\frac{dS_m}{dt} = \Lambda_m - \frac{\alpha_1 b_m (X_{SI} + X_{II} + X_{CI} + X_{RI})}{N_h} S_m - \mu_m S_m \quad (13)$$

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{\alpha_1 b_m (X_{SI} + X_{II} + X_{CI} + X_{RI})}{N_h} S_m - \mu_m I_m \quad (14)$$

$$\frac{dB}{dt} = rB \left(1 - \frac{B}{\kappa}\right) + p_i (X_{IS} + X_{II} + X_{IR}) + p_c (X_{CS} + X_{CI} + X_{CR}) - \mu_b B \quad (15)$$

dengan  $X_{SS}, X_{SI}, X_{SR}, X_{IS}, X_{II}, X_{IR}, X_{CS}, X_{CI}, X_{CR}, X_{RS}, X_{RI}, X_{RR}, S_m, I_m, B \geq 0$  dan semua parameter bernilai positif.

Misalkan total populasi manusia dinyatakan dengan  $N_h$ , maka  $N_h = X_{SS} + X_{SI} + X_{SR} + X_{IS} + X_{II} + X_{IR} + X_{CS} + X_{CI} + X_{CR} + X_{RS} + X_{RI} + X_{RR}$ , sehingga laju perubahan dari total populasi manusia adalah  $\frac{dN_h}{dt} = \Lambda_h - \mu_h N_h - \omega(X_{SI} + X_{II} + X_{CI} + X_{RI}) - \lambda(X_{IS} + X_{II} + X_{IR})$ . Kemudian misalkan total populasi nyamuk dinyatakan dengan  $N_m$ , maka  $N_m = S_m + I_m$ , sehingga laju perubahan dari total populasi nyamuk adalah  $\frac{dN_m}{dt} = \Lambda_m - \mu_m N_m$ . Karena laju perubahan dari total populasi manusia dan total populasi nyamuk tidak konstan, maka model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus pada persamaan (1) – (15) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dN_h}{dt} = \Lambda_h - \mu_h N_h - \omega(X_{SI} + X_{II} + X_{CI} + X_{RI}) - \lambda(X_{IS} + X_{II} + X_{IR}) \quad (16)$$

$$\frac{dX_{SI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m (N_h - X_{SI} - X_{SR} - X_{IS} - X_{II} - X_{IR} - X_{CS} - X_{CI} - X_{CR} - X_{RS} - X_{RI} - X_{RR})}{N_h} I_m - (\mu_h + \alpha_h + \omega + \psi \beta B) X_{SI} \quad (17)$$

$$\frac{dX_{SR}}{dt} = \alpha_h X_{SI} - (\mu_h + \beta B) X_{SR} \quad (18)$$

$$\frac{dX_{IS}}{dt} = \beta B (N_h - X_{SI} - X_{SR} - X_{IS} - X_{II} - X_{IR} - X_{CS} - X_{CI} - X_{CR} - X_{RS} - X_{RI} - X_{RR}) - \frac{\alpha_2 b_m X_{IS}}{N_h} I_m - (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) X_{IS} \quad (19)$$

$$\frac{dX_{II}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{IS}}{N_h} I_m + \psi \beta B X_{SI} - (\mu_h + \lambda + \omega + \alpha_t + \theta \alpha_h + \sigma \eta) X_{II} \quad (20)$$

$$\frac{dX_{IR}}{dt} = \theta \alpha_h X_{II} + \beta B X_{SR} - (\mu_h + \lambda + \alpha_t + \eta) X_{IR} \quad (21)$$

$$\frac{dX_{CS}}{dt} = \alpha_t X_{IS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{CS}}{N_h} I_m - (\mu_h + \gamma) X_{CS} \quad (22)$$

$$\frac{dX_{CI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{CS}}{N_h} I_m + \alpha_t X_{II} - (\mu_h + \omega + \theta \alpha_h + \sigma \gamma) X_{CI} \quad (23)$$

$$\frac{dX_{CR}}{dt} = \theta \alpha_h X_{CI} + \alpha_t X_{IR} - (\mu_h + \gamma) X_{CR} \quad (24)$$

$$\frac{dX_{RS}}{dt} = \gamma X_{CS} + \eta X_{IS} - \frac{\alpha_2 b_m X_{RS}}{N_h} I_m - \mu_h X_{RS} \quad (25)$$

$$\frac{dX_{RI}}{dt} = \frac{\alpha_2 b_m X_{RS}}{N_h} I_m + \sigma \gamma X_{CI} + \sigma \eta X_{II} - (\mu_h + \omega + \alpha_h) X_{RI} \quad (26)$$

$$\frac{dX_{RR}}{dt} = \alpha_h X_{RI} + \gamma X_{CR} + \eta X_{IR} - \mu_h X_{RR} \quad (27)$$

$$\frac{dN_m}{dt} = \Lambda_m - \mu_m N_m \quad (28)$$

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{\alpha_1 b_m (X_{SI} + X_{II} + X_{CI} + X_{RI})}{N_h} (N_m - I_m) - \mu_m I_m \quad (29)$$

$$\frac{dB}{dt} = rB \left(1 - \frac{B}{\kappa}\right) + p_i (X_{IS} + X_{II} + X_{IR}) + p_c (X_{CS} + X_{CI} + X_{CR}) - \mu_b B. \quad (30)$$

Untuk selanjutnya, kestabilan titik setimbang model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus yang akan dianalisis berasal dari persamaan (16) – (30).

TABEL 1. KETERANGAN VARIABEL PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOINFESI MALARIA-TIFUS

Variabel	Keterangan
$X_{SS}(t)$	Populasi manusia rentan tifus dan rentan malaria pada saat $t$
$X_{SI}(t)$	Populasi manusia rentan tifus dan terinfeksi malaria pada saat $t$
$X_{SR}(t)$	Populasi manusia rentan tifus dan sembuh malaria pada saat $t$
$X_{IS}(t)$	Populasi manusia terinfeksi tifus dan rentan malaria pada saat $t$
$X_{II}(t)$	Populasi manusia terinfeksi tifus dan terinfeksi malaria pada saat $t$
$X_{IR}(t)$	Populasi manusia terinfeksi tifus dan sembuh malaria pada saat $t$
$X_{CS}(t)$	Populasi manusia <i>carrier</i> tifus dan rentan malaria pada saat $t$
$X_{CI}(t)$	Populasi manusia <i>carrier</i> tifus dan terinfeksi malaria pada saat $t$
$X_{CR}(t)$	Populasi manusia <i>carrier</i> tifus dan sembuh malaria pada saat $t$
$X_{RS}(t)$	Populasi manusia sembuh tifus dan rentan malaria pada saat $t$
$X_{RI}(t)$	Populasi manusia sembuh tifus dan terinfeksi malaria pada saat $t$
$X_{RR}(t)$	Populasi manusia sembuh tifus dan sembuh malaria pada saat $t$
$S_m(t)$	Populasi nyamuk rentan malaria pada saat $t$
$I_m(t)$	Populasi nyamuk terinfeksi malaria pada saat $t$
$B(t)$	Populasi bakteri di lingkungan pada saat $t$
$N_h(t)$	Total populasi manusia pada saat $t$
$N_m(t)$	Total populasi nyamuk pada saat $t$

TABEL 2. KETERANGAN PARAMETER PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOINFEKSI MALARIA-TIFUS

Parameter	Keterangan	Parameter	Keterangan
$\Lambda_h$	Laju penambahan manusia	$\alpha_t$	Laju kemajuan dari terinfeksi tifus ke <i>carrier</i> tifus
$\Lambda_m$	Laju penambahan nyamuk	$\gamma$	Laju penyembuhan dari <i>carrier</i> tifus
$\alpha_1$	Probabilitas transmisi malaria pada nyamuk	$\beta$	Laju infeksi tifus
$\alpha_2$	Probabilitas transmisi malaria pada manusia	$p_i$	Laju penambahan bakteri dari manusia yang terinfeksi tifus
$b_m$	Jumlah maksimum gigitan nyamuk	$p_c$	Laju penambahan bakteri dari manusia yang <i>carrier</i> tifus
$\mu_h$	Laju kematian alami pada manusia	$\mu_b$	Laju kematian bakteri
$\mu_m$	Laju kematian alami pada nyamuk	$r$	Laju reproduksi bakteri
$\alpha_h$	Laju kesembuhan dari malaria	$\kappa$	Kapasitas pendukung bakteri
$\omega$	Laju kematian karena malaria	$\psi$	Laju peningkatan kerentanan tifus pada infeksi malaria
$\lambda$	Laju kematian karena tifus	$\theta$	Laju penyembuhan lambat dari malaria pada koinfeksi
$\eta$	Laju kesembuhan dari tifus	$\sigma$	Laju penyembuhan lambat dari tifus pada koinfeksi

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model

Pada Model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus diperoleh titik setimbang non endemik  $E_{0k}$ . **Titik setimbang non endemik koinfeksi** merupakan kondisi ketika tidak terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus, yaitu saat subpopulasi  $X_{II} = I_m = B = 0$ . Dari sini diperoleh titik setimbang non endemik  $E_{0k} = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_m}{\mu_m}, 0, 0\right)$ .

Untuk mendapatkan kestabilan lokal dari titik setimbang non endemik ( $E_{0k}$ ), maka perlu dilakukan linierisasi model matematika penyebaran malaria menggunakan matriks Jacobian. Kestabilan pada titik setimbang non endemik ( $E_{0k}$ ) dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan titik setimbang  $E_{0k}$  pada matriks Jacobian dari persamaan (16) – (30). Kemudian dibentuk persamaan karakteristik dari  $\det(\xi I - J_{E_{0k}}) = 0$  yaitu sebagai berikut:

$$(\xi + \mu_h)^4(\xi + \mu_m)(\xi + l_3)(\xi + l_2)(\xi + l_4)(\xi + l_1)(\xi + \mu_h + \gamma)(\xi^2 + \xi l_5 + l_6)(\xi^3 + \xi^2 l_7 + \xi l_8 + l_9) = 0 \quad (31)$$

dengan

$$l_5 = (\mu_m + l_1),$$

$$l_6 = l_1 \mu_m - j_{21} \alpha_2 b_m,$$

$$l_7 = \mu_b - r + \mu_h + \gamma + l_2,$$

$$l_8 = (\mu_h + \gamma + l_2)(\mu_b - r) + l_2(\mu_h + \gamma) - p_i \beta \frac{\Lambda_h}{\mu_h},$$

$$l_9 = (\mu_b - r)(\mu_h + \gamma) l_2 - \frac{\beta \Lambda_h}{\mu_h} (p_i(\mu_h + \gamma) + p_c \alpha_t).$$

Pada persamaan karakteristik (31) diperoleh nilai eigen dari matriks  $J_{E_{0k}}$  adalah  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = -\mu_h$ ,  $\xi_5 = -\mu_m$ ,  $\xi_6 = -l_3$ ,  $\xi_7 = -l_2$ ,  $\xi_8 = -l_4$ ,  $\xi_9 = -l_1$ ,  $\xi_{10} = -(\mu_h + \gamma)$ , dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan karakteristik berikut:

$$(\xi^2 + \xi l_5 + l_6)(\xi^3 + \xi^2 l_7 + \xi l_8 + l_9) = 0 \quad (32)$$

Titik setimbang non endemik stabil asimtotik jika dan hanya jika semua akar-akar dari persamaan (31) bernilai negatif atau mempunyai bagian real yang negatif. Dari persamaan karakteristik tersebut terlihat bahwa nilai eigen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9, \xi_{10} < 0$ , karena semua parameter bernilai positif. Selanjutnya ditentukan syarat persamaan (32) agar memiliki akar-akar dengan bagian real yang negatif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, syarat agar akar-akar dari persamaan karakteristik (32) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif adalah  $l_5, l_6 > 0$  dan  $l_7, l_8, l_9 > 0$  serta  $l_7 l_8 - l_9 > 0$ . Dengan demikian didapatkan syarat

- i.  $R_{0m} < 1$ ,
- ii.  $R_1 = \frac{r}{\mu_b + l_2 + \mu_h + \gamma} < 1$ ,
- iii.  $R_2 = \frac{(\mu_h + \gamma + l_2)r\mu_h + p_i \beta \Lambda_h}{(\mu_h + \gamma + l_2)\mu_b \mu_h + \mu_h l_2 (\mu_h + \gamma)} < 1$ ,
- iv.  $R_{0t} < 1$ ,
- v.  $(1 - R_1)m_1(1 - R_2)m_2 > (1 - R_{0t})m_3$ ,

dengan  $R_{0m} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2 b_m^2 \Lambda_m \mu_h}{\mu_m^2 \Lambda_h (\mu_h + \alpha_h + \omega)}}$  merupakan bilangan reproduksi dasar yang menyatakan rasio banyaknya kasus baru dari manusia terinfeksi malaria akibat gigitan nyamuk yang terinfeksi

terhadap manusia yang rentan, sedangkan  $R_{0t} = \frac{\mu_h r (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma) + (p_i (\mu_h + \gamma) + p_c \alpha_t) \beta \Lambda_h}{\mu_h \mu_b (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma)}$  merupakan n bilangan reproduksi dasar yang menyatakan rasio banyaknya kasus baru dari manusia terinfeksi tifus akibat interaksi bakteri terhadap manusia yang rentan.

*Analisis Sensitivitas Parameter*

Analisis sensitivitas parameter dilakukan dengan menghitung indeks sensitivitas dari parameter tersebut. Indeks sensitivitas  $R_0$  diperoleh dari  $\frac{\partial R_0}{\partial P} \frac{P}{R_0}$ , dengan  $P$  merupakan parameter yang akan dianalisis (Mutua dkk, 2015). Pada  $R_{0m} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2 b_m^2 \Lambda_m \mu_h}{\mu_m^2 \Lambda_h (\mu_h + \alpha_h + \omega)}}$  terdapat sembilan parameter yang akan dicari indeks sensitivitasnya yaitu  $\alpha_1, \alpha_2, b_m, \Lambda_m, \mu_h, \mu_m, \Lambda_h, \alpha_h,$  dan  $\omega$ . Sementara itu,  $R_{0t} = \frac{\mu_h r (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma) + (p_i (\mu_h + \gamma) + p_c \alpha_t) \beta \Lambda_h}{\mu_h \mu_b (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma)}$  terdapat sebelas parameter yang akan ditentukan indeks sensitivitasnya yaitu  $\mu_h, r, \lambda, \eta, \alpha_t, \gamma, p_i, p_c, \beta, \Lambda_h,$  dan  $\mu_b$ . Nilai parameter yang digunakan untuk analisis sensitivitas parameter dapat dilihat pada tabel 3.

Berdasarkan hasil perhitungan sensitivitas parameter dari  $R_{0m}$  dan  $R_{0t}$  yang tertera pada Tabel 4 dapat disimpulkan bahwa parameter yang paling berpengaruh terhadap  $R_{0m}$  adalah  $b_m$  dan  $\mu_m$ , sedangkan parameter yang paling berpengaruh terhadap  $R_{0t}$  adalah  $\mu_h, \mu_b, \beta,$  dan  $\Lambda_h$ . Dari nilai indeks sensitivitas parameter dapat diketahui bahwa apabila laju gigitan nyamuk ( $b_m$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai  $R_{0m}$  juga akan bertambah (berkurang) sebesar 10%. Namun, apabila laju kematian alami nyamuk ( $\mu_m$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai  $R_{0m}$  akan berkurang (bertambah) sebesar 10%. Selanjutnya, apabila laju infeksi tifus ( $\beta$ ) dan laju penambahan manusia ( $\Lambda_h$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai  $R_{0t}$  akan bertambah (berkurang) sebesar 9,9%. Sementara itu, apabila laju kematian alami manusia ( $\mu_h$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai  $R_{0t}$  akan berkurang (bertambah) sebesar 11,039%. Begitu juga apabila laju kematian alami bakteri ( $\mu_b$ ) bertambah (berkurang) sebesar 10%, maka nilai  $R_{0t}$  akan berkurang (bertambah) sebesar 10%.

TABEL 3. NILAI PARAMETER UNTUK ANALISIS SENSITIVITAS

Parameter	Nilai Parameter	Sumber	Parameter	Nilai Parameter	Sumber
$\Lambda_h$	467	Mutua dkk (2015)	$\alpha_t$	0,04	Mutua dkk (2015)
$\Lambda_m$	442.113	Mutua dkk (2015)	$\gamma$	0,000315	Mutua dkk (2015)
$\alpha_1$	0,000408	Mutua dkk (2015)	$\beta$	$1,917 \times 10^{-5}$	Mushayabasa (2011)
$\alpha_2$	0,15096	Mutua dkk (2015)	$p_i$	10	Mutua dkk (2015)
$b_m$	12	Mutua dkk (2015)	$p_c$	1	Mutua dkk (2015)
$\mu_h$	0,00004	Mutua dkk (2015)	$\mu_b$	0,0345	Mutua dkk (2015)
$\mu_m$	0,033	Mutua dkk (2015)	$r$	0,014	Mutua dkk (2015)
$\alpha_h$	0,038	Mutua dkk (2015)	$\kappa$	700.000	Asumsi
$\omega$	0,0019	Mutua dkk (2015)	$\psi$	1,5	Mutua dkk (2015)
$\lambda$	0,002	Mutua dkk (2015)	$\theta$	0,5	Mutua dkk (2015)
$\eta$	0,0357	Mutua dkk (2015)	$\sigma$	0,5	Mutua dkk (2015)

TABEL 4. INDEKS SENSITIVITAS PARAMETER

Parameter	Indeks Sensitivitas $R_{0m}$	Parameter	Indeks Sensitivitas $R_{0t}$
$\Lambda_h$	-0,5	$\mu_h$	-1,1039
$\Lambda_m$	0,5	$r$	$3,964 \times 10^{-8}$
$\alpha_1$	0,5	$\lambda$	-0,0257
$\alpha_2$	0,5	$\eta$	-0,4592
$b_m$	1	$\alpha_t$	0,4039
$\mu_h$	0,4995	$\gamma$	-0,8149
$\mu_m$	-1	$p_i$	0,0815
$\alpha_h$	-0,4757	$p_c$	0,9184
$\omega$	-0,0238	$\beta$	0,9999
		$\Lambda_h$	0,9999
		$\mu_b$	-1

*Simulasi Numerik*

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik dan interpretasi model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Selain itu juga akan dilakukan simulasi pengaruh laju infeksi malaria pada manusia, laju kematian alami nyamuk, dan laju infeksi tifus pada model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* MATLAB. Simulasi numerik model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus dilakukan dalam dua kondisi yaitu kondisi non endemik dan kondisi endemik. Nilai awal yang digunakan dalam simulasi numerik untuk setiap kondisi adalah  $N_h = 2000$ ,  $X_{SI} = 80$ ,  $X_{SR} = 80$ ,  $X_{IS} = 100$ ,  $X_{II} = 100$ ,  $X_{IR} = 180$ ,  $X_{CS} = 80$ ,  $X_{CI} = 180$ ,  $X_{CR} = 160$ ,  $X_{RS} = 100$ ,  $X_{RI} = 90$ ,  $X_{RR} = 150$ ,  $N_m = 1000$ ,  $I_m = 200$ , dan  $B = 20000$ . Simulasi ini dilakukan untuk  $t = 0$  sampai  $t = 100$  hari.

**Kondisi non endemic koinfeksi** merupakan kondisi ketika tidak ada penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Hal ini terjadi jika  $R_{om} < 1$  dan  $R_{ot} < 1$ . Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik kondisi non endemik tertera pada Tabel 5. Dari nilai parameter tersebut diperoleh  $R_{om} = 0,3554$  dan  $R_{ot} = 0,4118$ . Berikut adalah hasil simulasi untuk populasi manusia, populasi nyamuk dan populasi bakteri.

Gambar 1 merupakan hasil simulasi pada populasi manusia terinfeksi malaria ketika tidak terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi manusia yang terinfeksi tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{II}$ ), *carrier* tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{CI}$ ) serta

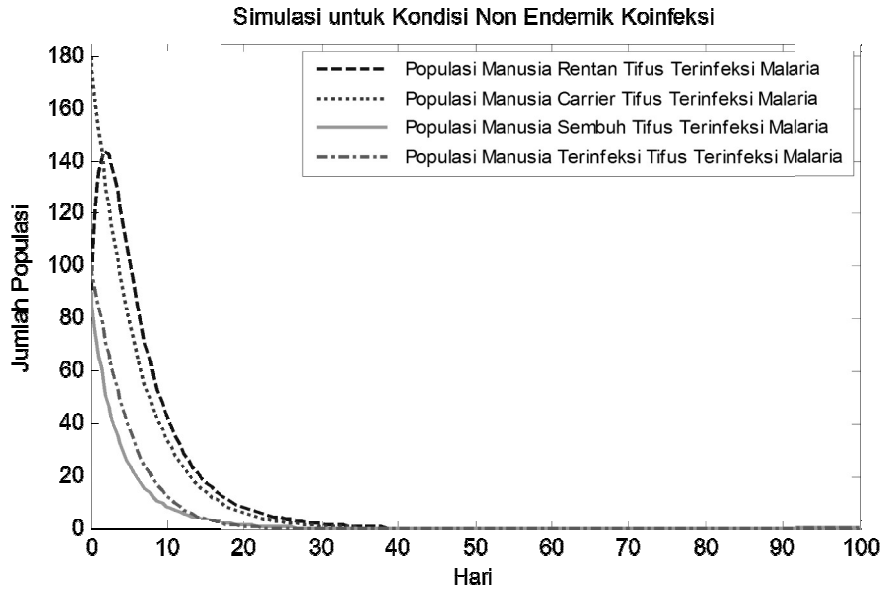
sembuh dari tifus namun terinfeksi malaria ( $X_{RI}$ ), dalam jangka waktu tertentu bergerak menuju nol atau mengalami kepunahan. Sementara untuk populasi manusia rentan tifus namun terinfeksi malaria ( $X_{SI}$ ) mengalami kenaikan pada awal simulasi, kemudian mengalami penurunan hingga menuju nol pada akhir simulasi.

Gambar 2 merupakan hasil simulasi pada populasi manusia terinfeksi tifus ketika tidak terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa populasi manusia yang terinfeksi tifus namun rentan malaria ( $X_{IS}$ ) serta populasi manusia yang terinfeksi tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{II}$ ) dalam jangka waktu tertentu bergerak menuju nol atau mengalami kepunahan. Sementara untuk populasi manusia terinfeksi tifus namun sembuh malaria ( $X_{IR}$ ) mengalami kenaikan pada awal simulasi, kemudian mengalami penurunan hingga menuju nol sampai akhir simulasi.

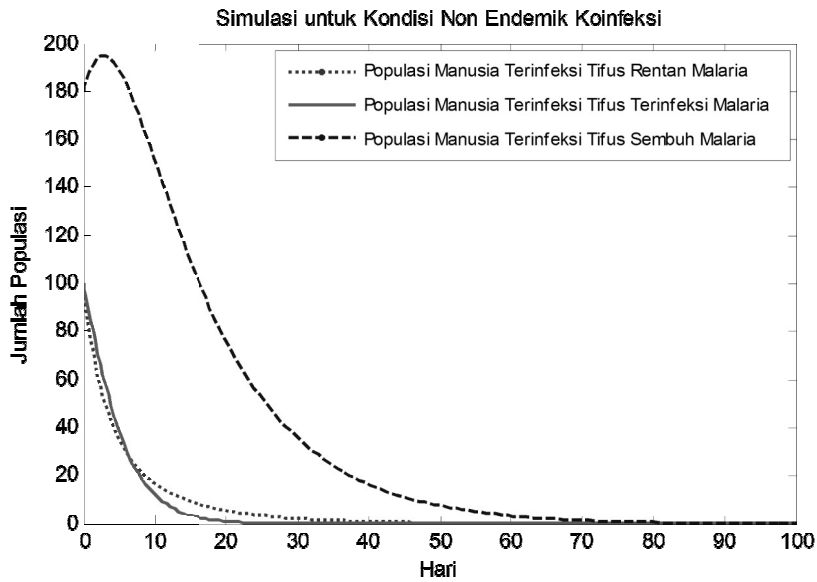
Gambar 3 merupakan hasil simulasi pada populasi nyamuk ketika tidak terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa populasi nyamuk terinfeksi pada waktu tertentu bergerak menuju nol atau mengalami kepunahan, berbanding terbalik dengan total populasi nyamuk yang mengalami kenaikan dan kemudian konstan. Gambar 4 merupakan hasil simulasi pada populasi bakteri ketika tidak terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi bakteri di awal simulasi mengalami kenaikan hingga hari ke-25. Kemudian, pada hari selanjutnya populasi bakteri mengalami penurunan hingga akhir simulasi.

TABEL 5. NILAI PARAMETER UNTUK SIMULASI NUMERIK KONDISI NON ENDEMIK KOINFEKSI MALARIA-TIFUS

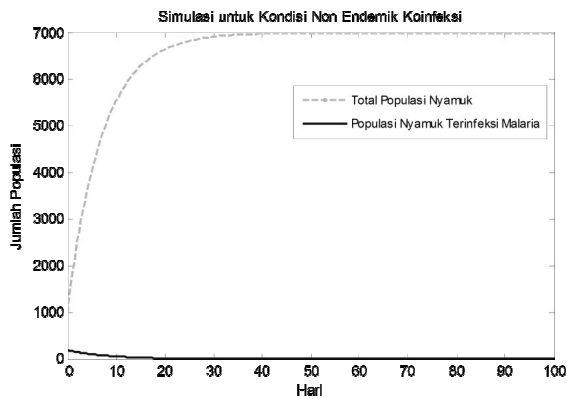
Parameter	Nilai Parameter	Sumber	Parameter	Nilai Parameter	Sumber
$\Lambda_h$	0,274	Seidu dkk (2015)	$\alpha_t$	0,04	Mutua dkk (2015)
$\Lambda_m$	1.000	Seidu dkk (2015)	$\gamma$	0,000315	Mutua dkk (2015)
$\alpha_1$	0,000408	Mutua dkk (2015)	$\beta$	$1,97 \times 10^{-11}$	Mutua dkk (2015)
$\alpha_2$	0,15096	Mutua dkk (2015)	$p_i$	10	Mutua dkk (2015)
$b_m$	12	Mutua dkk (2015)	$p_c$	1	Mutua dkk (2015)
$\mu_h$	0,00004	Mutua dkk (2015)	$\mu_b$	0,0345	Mutua dkk (2015)
$\mu_m$	0,1429	Seidu dkk (2015)	$r$	0,014	Mutua dkk (2015)
$\alpha_h$	0,5	Seidu dkk (2015)	$\kappa$	700.000	Asumsi
$\omega$	0,0019	Mutua dkk (2015)	$\psi$	1,5	Mutua dkk (2015)
$\lambda$	0,002	Mutua dkk (2015)	$\theta$	0,5	Mutua dkk (2015)
$\eta$	0,0357	Mutua dkk (2015)	$\sigma$	0,5	Mutua dkk (2015)



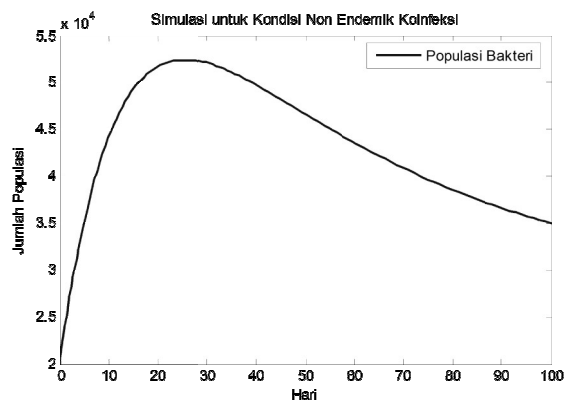
Gambar 1. Dinamika Populasi Manusia Terinfeksi Malaria saat  $R_{0m} < 1$  dan  $R_{0t} < 1$



Gambar 2. Dinamika Populasi Manusia Terinfeksi Tifus saat  $R_{0m} < 1$  dan  $R_{0t} < 1$



Gambar 3. Dinamika Populasi Nyamuk saat  $R_{0m} < 1$  dan  $R_{0t} < 1$



Gambar 4. Dinamika Populasi Bakteri ketika  $R_{0m} < 1$  dan  $R_{0t} < 1$

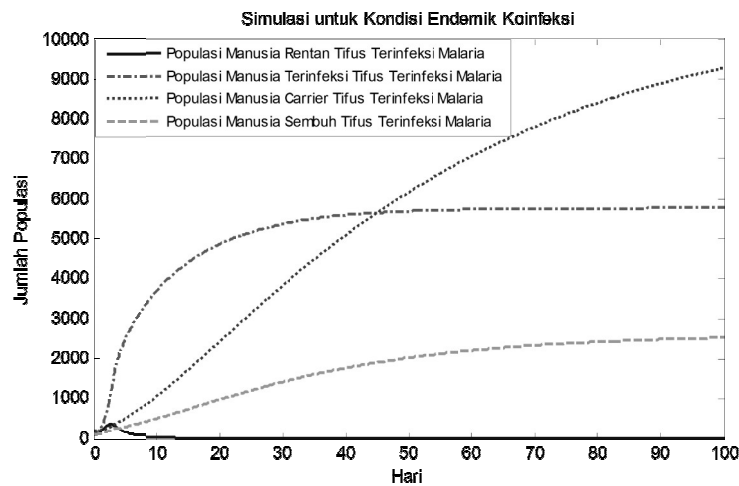
**Kondisi endemik** merupakan kondisi ketika ada penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Hal ini terjadi jika  $R_{0m} > 1$  dan  $R_{0t} > 1$ . Nilai parameter yang digunakan tertera pada Tabel 3. Dari parameter pada Tabel 3 diperoleh  $R_{0m} = 2,7788$  dan  $R_{0t} = 1,0237 \times 10^7$ . Berikut adalah hasil simulasi untuk populasi manusia, populasi nyamuk dan populasi bakteri.

Gambar 5 merupakan hasil simulasi pada populasi manusia terinfeksi malaria ketika terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi manusia yang *carrier* tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{CI}$ ) serta sembuh dari tifus namun terinfeksi malaria ( $X_{RI}$ ), mengalami kenaikan hingga akhir simulasi. Untuk populasi manusia yang terinfeksi tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{IT}$ ) juga mengalami kenaikan dan kemudian konstan. Sementara itu, populasi manusia rentan tifus namun terinfeksi malaria ( $X_{SI}$ ) mengalami kenaikan pada awal simulasi, kemudian bergerak menuju nol sampai akhir simulasi.

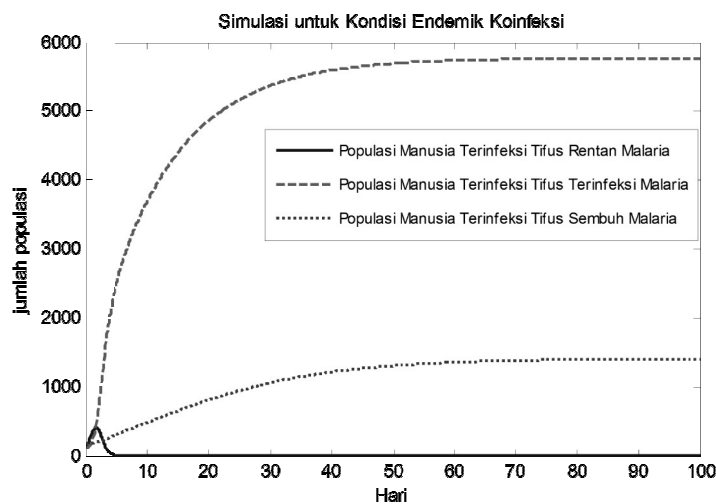
Gambar 6 merupakan hasil simulasi pada populasi manusia terinfeksi tifus ketika terjadi

penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa populasi manusia yang terinfeksi tifus dan terinfeksi malaria ( $X_{IT}$ ) serta terinfeksi tifus namun sembuh dari malaria ( $X_{IR}$ ) mengalami kenaikan dan kemudian konstan hingga akhir simulasi. Sementara itu, untuk populasi manusia yang terinfeksi tifus namun rentan malaria ( $X_{IS}$ ), mengalami kenaikan pada awal simulasi, kemudian bergerak menuju nol sampai akhir simulasi.

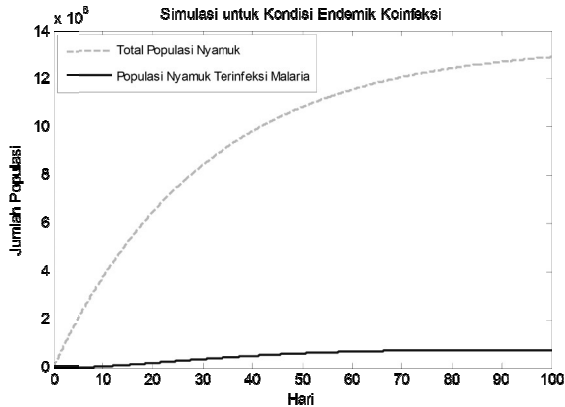
Gambar 7 merupakan hasil simulasi pada populasi nyamuk ketika terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi nyamuk terinfeksi dan total populasi nyamuk mengalami kenaikan hingga akhir simulasi, meskipun kenaikan yang terjadi pada populasi nyamuk terinfeksi tidak sebanyak kenaikan yang terjadi pada total populasi nyamuk. Gambar 8 merupakan hasil simulasi pada populasi bakteri ketika terjadi penyebaran koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi bakteri mengalami kenaikan hingga akhir simulasi..



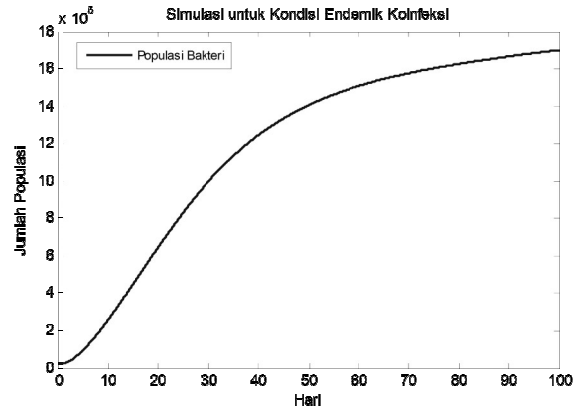
Gambar 5. Dinamika Populasi Manusia Terinfeksi Malaria saat  $R_{0m} > 1$  dan  $R_{0t} > 1$



Gambar 6. Dinamika Populasi Manusia Terinfeksi Tifus saat  $R_{0m} > 1$  dan  $R_{0t} > 1$

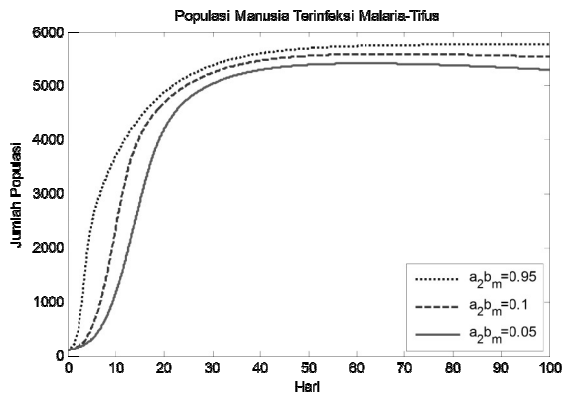


Gambar 7. Dinamika Populasi Nyamuk saat  $R_{0m} > 1$  dan  $R_{0t} > 1$



Gambar 8. Dinamika Populasi Bakteri saat  $R_{0m} > 1$  dan  $R_{0t} > 1$

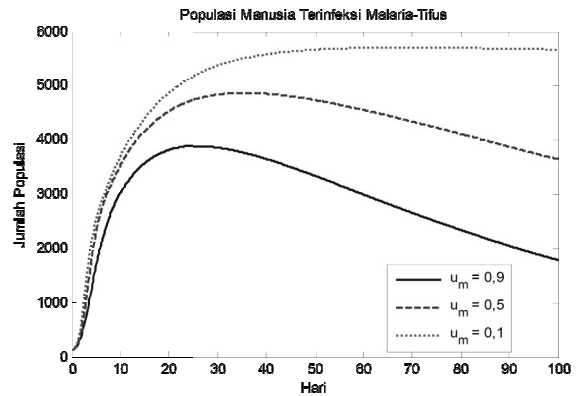
Telah diketahui pada pembahasan sebelumnya bahwa terdapat beberapa parameter yang berpengaruh terhadap  $R_{0m}$  dan  $R_{0t}$ . Oleh karena itu dilakukan simulasi untuk mengetahui pengaruh parameter-parameter tersebut pada populasi manusia yang terinfeksi koinfeksi malaria-tifus. Simulasi dilakukan pada  $t = 0$  sampai  $t = 100$  hari. Nilai parameter yang digunakan dapat dilihat di Tabel 3. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas, akan dilakukan simulasi terhadap laju infeksi malaria pada manusia ( $a_2b_m$ ) dan laju kematian alami nyamuk ( $\mu_m$ ) untuk mengetahui pengaruh parameter tersebut pada populasi manusia yang terkena koinfeksi malaria-tifus. Hasil simulasi pengaruh laju infeksi malaria pada manusia ( $a_2b_m$ ) dan laju kematian alami nyamuk ( $\mu_m$ ) dengan  $a_2b_{m1} = 0,95$ ;  $a_2b_{m2} = 0,1$ ;  $a_2b_{m3} = 0,05$ , serta  $\mu_{m1} = 0,9$ ;  $\mu_{m2} = 0,5$ ;  $\mu_{m3} = 0,1$  adalah sebagai berikut:



Gambar 9. Pengaruh Laju Infeksi Malaria pada Manusia terhadap Populasi Manusia Koinfeksi Malaria-Tifus

Gambar 9 merupakan hasil simulasi pengaruh laju infeksi malaria pada manusia ( $a_2b_m$ ) terhadap populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa semakin besar nilai  $a_2b_m$  semakin besar pula jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Oleh karena itu dapat disimpulkan

bahwa  $a_2b_m$  memiliki pengaruh terhadap jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus.

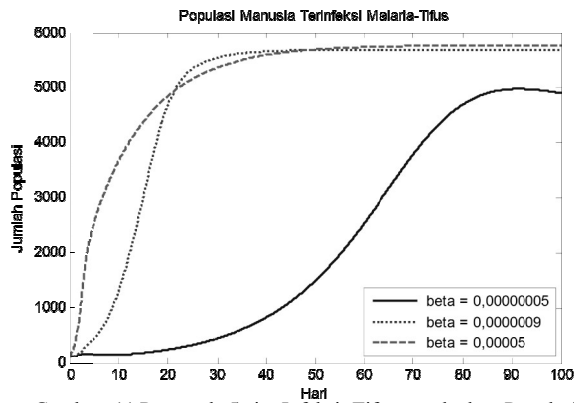


Gambar 10. Pengaruh Laju Kematian Alami Nyamuk terhadap Populasi Manusia Koinfeksi Malaria-Tifus

Gambar 10 merupakan hasil simulasi pengaruh laju kematian alami nyamuk ( $u_m$ ) terhadap populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa semakin besar nilai  $u_m$  maka semakin kecil jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa nilai  $u_m$  memiliki pengaruh yang besar terhadap jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus.

Berdasarkan hasil analisis sensitivitas pula, akan dilakukan simulasi terhadap laju infeksi tifus ( $\beta$ ) untuk mengetahui pengaruh parameter tersebut pada populasi manusia terkena koinfeksi malaria-tifus. Hasil simulasi pengaruh laju infeksi tifus ( $\beta$ ) dengan  $\beta_1 = 0,000005$ ;  $\beta_2 = 0,0000009$ ; dan  $\beta_3 = 0,00000005$ , sebagai berikut:





Gambar 11. Pengaruh Laju Infeksi Tifus terhadap Populasi Manusia Koinfeksi Malaria-Tifus

Gambar 11 merupakan hasil simulasi pengaruh laju infeksi tifus ( $\beta$ ) terhadap populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Dari grafik terlihat bahwa semakin besar nilai  $\beta$  semakin besar pula jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa nilai  $\beta$  memiliki pengaruh terhadap jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus.

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada model matematika penyebaran koinfeksi malaria-tifus diperoleh titik setimbang non endemik  $E_{0k}$  yang bersifat stabil asimtotis lokal jika  $R_{0m} < 1, R_1 < 1, R_2 < 1, R_{0t} < 1$  dan  $(1 - R_1)m_1(1 - R_2)m_2 > (1 - R_{0t})m_3$ , dengan

- i.  $R_{0m} = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2 b_m^2 \Lambda_m \mu_h}{\mu_m^2 \Lambda_h (\mu_h + \alpha_h + \omega)}}$
- ii.  $R_1 = \frac{r}{\mu_b + l_2 + \mu_h + \gamma}$
- iii.  $R_2 = \frac{(\mu_h + \gamma + l_2)r \mu_h + p_i \beta \Lambda_h}{(\mu_h + \gamma + l_2) \mu_b \mu_h + \mu_h l_2 (\mu_h + \gamma)}$
- iv.  $R_{0t} = \frac{\mu_h r (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma) + (p_i (\mu_h + \gamma) + p_c \alpha_t) \beta \Lambda_h}{\mu_h \mu_b (\mu_h + \lambda + \eta + \alpha_t) (\mu_h + \gamma)}$

Berdasarkan hasil simulasi, terlihat bahwa laju infeksi malaria pada manusia, laju kematian alami nyamuk dan laju infeksi tifus memiliki pengaruh yang besar terhadap jumlah populasi manusia yang menderita koinfeksi malaria-tifus.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Adetunde, I.A., 2008, "Mathematical Models for the Dynamics of Typhoid Fever in Kassena-Nankana District of Upper East Region of Ghana", *Journal of Modern Mathematics and Statistics*, **2**(2): 45-49.
- Chitnis, N., Cushing, J.M., dan Hyman, J.M., 2006, "Bifurcation Analysis of a Mathematical Model for Malaria Transmission", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **Vol. 67**, No. 1, pp. 24-45.
- Mushayabasa, S., 2011, "Impact of Vaccines on Controlling Typhoid Fever in Kassena-Nankana District of Upper East Region of Ghana: Insights from a Mathematical Model", *Journal of Modern Mathematics and Statistics*, **5**(2): 54-59.
- Mushayabasa, S., Bhunu, C.P., dan Mhlanga, N.A., 2014, "Modeling the Transmission Dynamics of Typhoid in Malaria Endemic Settings", *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, **Vol. 9**, Issue 1, pp. 121-140.
- Mutua, J.M., Feng-Bin Wang, dan V.aidya, N.K., 2015, "Modelling Malaria and Typhoid Fever co-infection Dynamics", *Mathematical Bioscience*, **Vol. 264**: 128-144
- Okosun, K.O. dan Makinde, O.D., 2011, "Modelling the Impact of Drug Resistance in Malaria Transmission and its Optimal Control Analysis", *International Journal of the Physical Sciences*, **Vol. 6**(28), pp 6479-6487.
- Seidu, B., Makinde, O.D., dan Seini, L.Y., 2015, "Mathematical Analysis of the Effect of HIV-Malaria Co-infection on Workplace Productivity", *Acta Tropica*, **145**, 55-60
- WHO, 2016. Malaria [Online] Available at: <http://who.int/mediacentre/factsheets/fs094/en> [Accessed 19 April 2016]
- WHO, 2015. Typhoid [Online] Available at: <http://www.who.int/immunization/diseases/typhoid/en/> [Accessed 19 April 2016]