

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan matematika, khususnya aljabar abstrak, grup merupakan salah satu pembahasan menarik yang mendapatkan perhatian dari para peneliti, khususnya pada grup berhingga. Grup merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner, yang memenuhi beberapa kondisi, diantaranya asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Jika operasi biner pada suatu grup berlaku sifat komutatif maka grup tersebut disebut grup komutatif (**Pinter, 1990**). Dari sisi banyaknya elemen, grup dibagi menjadi dua bagian yaitu grup berhingga dan grup tak hingga. Grup berhingga adalah grup yang banyak anggotanya berhingga (**Adkins dan Weinrub, 1999**). Beberapa contoh grup berhingga adalah grup  $Z_n$ , grup klein, grup quarternian, dan grup simetrik.

Grup yang anggotanya berisikan hasil semua permutasi dari suatu himpunan tak kosong, dengan operasi komposisi disebut grup simetrik di himpunan tersebut. Untuk suatu bilangan bulat positif  $n$ , grup simetrik atas himpunan  $\{1,2,\dots,n\}$  disebut grup simetrik atas  $n$  elemen. Terdapat bentuk-bentuk khusus dalam grup simetrik, antara lain grup dihedral, grup tetrahedral, grup octahedral, dan grup icosahedral (**Durbian, 2005**). Grup dihedral adalah grup yang dibentuk dari dua permutasi khusus dengan operasi komposisi seperti pada grup simetrik (**Pinter, 1990**). Selanjutnya, **Conrad (2019)** menyajikan kembali grup dihedral dengan pendekatan geometri yaitu dengan memandang elemen penyusunnya sebagai rotasi dan refleksi. Dengan menggunakan pendekatan geometri ini, **Conrad (2019)** berhasil membuktikan sifat-sifat yang ada pada grup dihedral antara lain banyaknya elemen pada grup dihedral, invers dari setiap elemen pada grup dihedral dan kesamaan hasil komposisi dua elemen pada grup dihedral. Terdapat beberapa sifat pada grup dihedral yang di tuliskan oleh **Conrad (2019)** tetapi belum dibuktikan menggunakan permutasi, maka dari itu menarik untuk disajikan kembali bukti beberapa sifat pada grup dihedral menggunakan permutasi.

Pada tahun 1973, terdapat pengembangan definisi baru terkait penelitian grup berhingga yaitu tentang derajat kekomutatifan suatu grup berhingga. Misalkan  $a, b$  adalah suatu elemen dari suatu grup berhingga dan berlaku  $ab = ba$  maka  $a, b$  disebut elemen yang saling komutatif. Derajat kekomutatifan pada grup  $G$  adalah banyaknya pasangan elemen terurut  $(a, b)$  pada himpunan  $G \times G$  dibagi dengan banyaknya anggota himpunan  $G \times G$  dengan  $a, b$  merupakan elemen yang saling komutatif. Dengan kata lain, derajat kekomutatifan suatu grup merupakan peluang untuk sebarang elemen di grup tersebut untuk saling komutatif dengan sebarang elemen di grup tersebut (**Gustafson, 1973**). Selain memberikan definisi baru terkait derajat kekomutatifan suatu grup, **Gustafson (1973)** juga berhasil untuk menentukan batas atas dari derajat kekomutatifan suatu grup.

Dalam perkembangannya, **Erfanian dan Erzanian (2007)** membangun konsep baru terkait derajat kekomutatifan, yaitu derajat kekomutatifan relatif. Derajat kekomutatifan relatif pada grup  $G$  adalah banyaknya pasangan elemen terurut  $(a, b)$  pada himpunan  $H \times G$  dibagi dengan banyaknya anggota himpunan  $H \times G$  dengan  $a, b$  merupakan elemen yang saling komutatif dan  $H$  adalah subgrup dari  $G$ .

Penelitian mengenai derajat kekomutatifan suatu grup berhingga dan derajat kekomutatifan relatif pada suatu grup berhingga telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya adalah yang telah dilakukan oleh **Yahya dkk (2012)** dan **Hamid dkk (2013)**. Hasil dari penelitian **Yahya dkk (2012)** adalah teorema untuk menentukan derajat kekomutatifan pada grup dihedral. Dalam penelitiannya, **Yahya dkk (2012)** hanya menentukan derajat kekomutatifan grup dihedral tanpa menyebutkan pasangan elemen mana saja yang memiliki sifat saling komutatif. Sedangkan **Hamid dkk (2013)** berhasil menyajikan dari derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral. Tetapi, derajat kekomutatifan relatif yang telah diteliti oleh **Hamid dkk (2013)** hanya terbatas sampai  $D_{13}$  saja.

Dari uraian di atas menarik untuk diteliti lebih lanjut adalah bagaimana menyajikan kembali pembuktian terkait sifat-sifat yang ada pada grup dihedral

yang telah di tulis oleh **Conrad (2019)**, menggunakan permutasi. Selanjutnya adalah melanjutkan penelitian **Yahya dkk (2012)** dan **Hamid dkk (2013)** tentang derajat kekomutatifan grup dihedral dan derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral yaitu membangun teorema untuk menentukan pasangan elemen pada grup dihedral yang memiliki sifat saling komutatif, dan program untuk membantu menentukan derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian di atas maka permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah penyajian bukti untuk sifat-sifat dalam grup dihedral dengan menggunakan permutasi?
2. Bagaimanakah cara mengkonstruksi dan membuktikan sifat kekomutatifan elemen pada grup dihedral?
3. Bagaimanakah langkah-langkah untuk menghitung derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral
4. Bagaimanakah prosedur pembuatan program untuk menghitung derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan ini adalah:

1. Menyajikan bukti terkait sifat-sifat yang ada dalam grup dihedral menggunakan permutasi.
2. Mengkonstruksi serta membuktikan sifat kekomutatifan elemen pada grup dihedral.
3. Menyajikan Langkah-langkah untuk menghitung derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral
4. Membuat dan menyusun program untuk menghitung derajat kekomutatifan relatif pada grup dihedral.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah wawasan tentang aljabar abstrak khususnya grup dihedral dan tentang sifat-sifat derajat kekomutatifan serta derajat kekomutatifan relatif.
2. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memperluas kajian mengenai sifat-sifat pada grup berhingga khususnya grup dihedral.