DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

DEKOMPOSISI MATRIKS JARANG DENGAN METODE DOOLITTLE

Ketua Peneliti :

Dra. Rini Semiati

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai Oleh : DIP OPF Unair 1994/1995
SK.Rektor Nomor : 5655/PT03.H/N/1994
Nomor : 170

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

DEKOMPOSISI MATRIKS JARANG DENGAN METODE DOOLITTLE

Ketua Peneliti :

Dra. Rini Semiati

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai Oleh : DIP OPF Unair 1994/1995
SK.Rektor Nomor : 5655/PT03.H/N/1994
Nomor : 170

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

DEKOMPOSISI MATRIKS JARANG DENGAN METODE DOOLITTLE

Ketua Peneliti :

Dra. Rini Semiati

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai Oleh : DIP OPF Unair 1994/1995
SK.Rektor Nomor : 5655/PT03.H/N/1994
Nomor : 170

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS AIRLANGGA

LEMBAGA PENELITIAN

Jl.Darmawangsa Dalam 2 Telp. (031) 42322 Surabaya 60286

IDENTITAS DAN PENGESAHAN
LAPORAN AKHIR HASIL PENELITIAN

1. a.	Judul Penelitian	: Dekomposisi Matriks Jarang Dengan Metode Doolittle
b.	Macam Penelitian	: (V) Fundamental, ( ) Terapan, ( ) Pengembangan
2.	Kepala Proyek Penelitian	
a.	Nama Lengkap Dengan Gelar	: Dra. Rini Semiati
b.	Jenis Kelamin	: W a n i t a
c.	Pangkat/Golongan dan NIP	: Penata Muda TK.I/IIIb/131 287 498
d.	Jabatan Sekarang	: Staf Pengajar
e.	Fakultas / Jurusan	: FMIPA/Matematika
f.	Univ./Inst./Akademi	: Universitas Airlangga
g.	Bidang Ilmu Yang Diteliti	: Aljabar Linier
3.	Jumlah Tim Peneliti	: 5 (lima) orang
4.	Lokasi Penelitian	: Lab. Matematika FMIPA Unair
5.	Kerjasama dengan Instansi Lain	
a.	Nama Instansi	: -
b.	A l a m a t	: -
6.	Jangka Waktu Penelitian	: 5 (lima) bulan
7.	Biaya Yang Diperlukan	: Rp 1.500.000,00
8.	Seminar Hasil Penelitian	:
a.	Dilaksanakan Tanggal	: 5 April 1995
b.	Hasil Penilaian	: ~~( ) Baik Sekali~~ (V) Baik; ( ) Sedang ( ) Kurang

Surabaya, 11 April 1995

Mengetahui/ Mengesahkan :
a.n. Rektor
Ketua Lembaga Penelitian,

Prof. Dr. Noor Cholies Zaini
NIP. 130 355 372

Departemen Pendidikan Dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi
Universitas Airlangga

DEKOMPOSISI MATRIKS JARANG DENGAN METODE DOOLITTLE

PENELITI
Dra. Rini Semiati
Drs. Kartono, M.Kom.
Dra. Utami Dyah Purwati
Drs. Eto Wuryanto
Dra. Inna Kuswandari

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai : DIP/Operasional Perawatan dan Fasilitas Tahun 1994/1995
SK Rektor Nomor : 5655/PT.03.H/N/1994
Tanggal 20 Juli 1994

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR

Penulis panjatkan puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena hanya dengan rahmatNya penulis dapat menyelesaikan laporan penelitian ini.

Dengan selesainya laporan ini, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Ketua Lembaga Penelitian Universitas Airlangga yang telah memberikan biaya penelitian.
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan untuk melakukan penelitian.
3. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah memberikan dorongan untuk melakukan penelitian.
4. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian laporan penelitian ini.

Akhirnya penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi penyempurnaan laporan penelitian ini.

RINGKASAN PENELITIAN

Judul Penelitian	:	Dekomposisi Matriks Jarang dengan Metode Doolittle.
Ketua Peneliti	:	Rini Semiati
Anggota Peneliti	:	- Kartono - Utami Dyah Purwati - Eto Wuryanto - Inna Kuswandari
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Sumber Biaya	:	Dip. Operasional Perawatan dan Fasilitas Universitas Airlangga tahun 1994/1995 SK Rektor Nomor : 5655/PT.03.H/N/1994 Tanggal : 20 Juli 1994

Matriks jarang adalah matriks yang mempunyai sedikit elemen yang tidak nol. Misalnya matriks n x n dengan n besar, mempunyai dua sampai sepuluh elemen tidak nol pada setiap barisnya

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier $Ax = b$, digunakan metode eliminasi Gauss. Eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mereduksi sistem persamaan linier ke dalam bentuk segitiga melalui operasi baris elementer.

Permasalahannya adalah bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier dengan metode Doolittle

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dekomposisi dari matriks jarang dengan metode Doolittle.

Dalam sistem persamaan linier $Ax = b$, A adalah matriks non singular dan merupakan matriks jarang n x n, sedangkan x dan b adalah vektor kolom orde n.
Penyelesaian sistem persamaan linier ini dengan variasi eliminasi Gauss yang didasarkan atas faktorisasi matriks A menjadi matriks segitiga $A = LU$ yaitu metode Doolitte.

Dengan metode Doolittle, matriks L dan U dapat diselesaikan secara langsung, tidak perlu menyelesaikan persamaan simultannya seperti pada metode Eliminasi Gauss.

I PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah.

Suatu matriks dapat digunakan dalam berbagai cabang matematika terapan. Dalam banyak hal matriks itu membentuk koefisien transformasi linier atau muncul dalam sistem persamaan linier, misalnya masalah-masalah jaringan listrik, kerangka makanika, menggambar kurva dalam statistika, transportasi dan sebagainya. Matriks berguna karena matriks memungkinkan kita untuk mengamati suatu susunan dari banyak bilangan sebagai satu kesatuan, yang dinyatakan oleh suatu simbol dan melakukan penghitungan dengan simbol tadi dalam bentuk yang sangat rapi. Jalan pintas matematik yang diperoleh ini sangat baik dan ampuh serta cocok untuk berbagai masalah praktis. Matriks memasuki matematika rekayasa lebih dari enam puluh tahun yang lalu dan bertambah penting dalam berbagai cabang.

Matriks yang hanya mempunyai sedikit elemen tidak nol disebut matriks jarang (sparse matrics). Misalnya matriks n x n dengan n besar, mempunyai dua sampai sepuluh elemen tidak nol pada setiap barisnya. Sebagai contoh matriks yang menggambarkan garis komunikasi dari karyawan-karyawan dalam organisasi besar merupakan matriks jarang, dengan elemen baris ke i dan elemen kolom ke j adalah tidak nol, jika dan hanya jika karyawan i dan karyawan j saling mempengaruhi.

Seringkali, persoalan-persoalan yang menarik dan sangat penting tidak dapat diselesaikan, karena matriks berukuran besar. Untuk matriks semacam ini dapat digunakan komputer dalam packed form. Untuk penggunaan komputer ini, hanya elemen-elemen yang tidak nol dari matriks jarang tersebut yang dimasukkan dalam komputer.

Sistem persamaan linier $Ax = b$ dapat diselesaikan dengan eliminasi Gauss. Eliminasi Gauss merupakan metode baku (standar) untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode ini merupakan proses eliminasi yang sistematik dan sangat penting dalam praktek serta metode ini pantas diterapkan terhadap penghitungan waktu dan permintaan penyimpangan.

Penyelesaian sistem persamaan linier merupakan tugas pokok yang penting dalam aljabar linier karena sistem semacam ini sering muncul sebagai model dari berbagai masalah seperti misalnya jaringan listrik, arus lalu lintas, produksi dan konsumsi, laju pertumbuhan penduduk, statistik, metode numerik dan sebagainya yang memerlukan prosedur eliminasi Gauss beserta variasinya.

Eliminasi Gauss mereduksi sistem persamaan linier ke dalam bentuk segitiga melalui operasi baris elementer yang tidak mengubah penyelesaian. Modifikasi dari eliminasi Gauss adalah metode Doolittle, metode Crout dan metode Cholesky yaitu metode yang mendasarkan pada gagasan pemfaktoran $A = L\ U$

2. Permasalahan.

Permasalahan dalam penelitian ini, bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linier dengan metode Doolittle

3. Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian ini adalah untuk mengetahui dekomposisi matriks jarang dengan metode Doolittle.

4. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah memberi wawasan bahwa sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan metode Doolittle selain dengan metode Eliminasi Gauss.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu sistem n persamaan linier (himpunan n persamaan linier simultan) di dalam n unsur $x_1, \ldots\ldots, x_n$ yang tidak diketahui ialah suatu himpunan persamaan

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array} \qquad (2.1)$$

dengan koefisien-koefisien a_{ij} dan b adalah bilangan yang diketahui. Dengan menggunakan perkalian matriks, (2,1) dapat ditulis sebagai satu persamaan vektor

$$Ax = b \qquad (2.2)$$

dengan matriks koefisien $A = \left[\, a_{ij} \,\right]$ adalah matriks n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

adalah vektor kolom. Matriks gandengan (augmented matriks) A bagi sistem (2.1) adalah

$$[\, A \; b \,] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian sistem (2.1) adalah suatu himpunan $x_1, \ldots, x_n$ yang memenuhi semua n persamaan tersebut.

Metode untuk memecahkan sistem ini melalui determinan (kaidah Cramer) adalah sangat tidak praktis untuk sistem yang besar, meskipun dengan metode penghitungan determinan yang efisien sekalipun.

Metode praktis untuk memperoleh satu penyelesaian bagi suatu sistem persamaan linier adalah apa yang dinamakan metode eliminasi Gauss. Eliminasi Gauss adalah metode baku untuk memecahkan suatu proses eleminasi yang sistematik yang mereduksi (2.1) ke bentuk segitiga sehingga sistem ini dapat dipecahkan secara mudah dengan substitusi langkah mundur (Kreyszig 1988).

M@tode Eliminasi Gauss teriri dari 2 bagian yaitu substitusi langkah maju dan substisusi langkah mundur. Substitusi langkah maju adalah transformasi baris elementer dari matriks A untuk mereduksi ke bentuk segitiga, sedangkan substitusi langkah mundur adalah menjadikan matriks segitiga tersebut ke dalam bentuk invers (Tewarson 1973)

Modifikasi eliminasi Gauss yang didasarkan atas faktorisasi matriks A menjadi matriks segitiga

$$A = L\ U$$

seperti metode Doolitte, metode Crout dan metode Cholesky akan populer dalam bidang numerik modern.

Untuk matriks bujur sangkar yang non singular, baris-barisnya dapat disusun kembali sehingga menghasilkan matriks A yang mempunyai L U - faktorisasi dengan L adalah matriks segitiga bawah dan U matriks segitiga atas (Kreyszig , 1988).

Matriks non singular adalah matriks yang mempunyai invers. Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di atas diagonal utama adalah nol sedangkan matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di bawah diagonal utama adalah nol.(Jeffrey 1990)

III. METODE PENELITIAN

Metode dari penelitian ini adalah dengan studi literatur melalui content analisis :

1. Mengkaji sifat-sifat matriks jarang yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Memahami metode Eliminasi Gauss untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.
3. Menganalisis hasil yang diperoleh Reginald P. Tewarson.
4. Mengetahui dekomposisi matriks jarang dengan metode Doolittle.

IV. PEMBAHASAN

Substitusi langkah maju dari Eliminasi Gauss terdiri dari n langkah. Andaikan $A^{(k)}$ menunjukkan matriks yang dimulai pada langkah ke k dengan

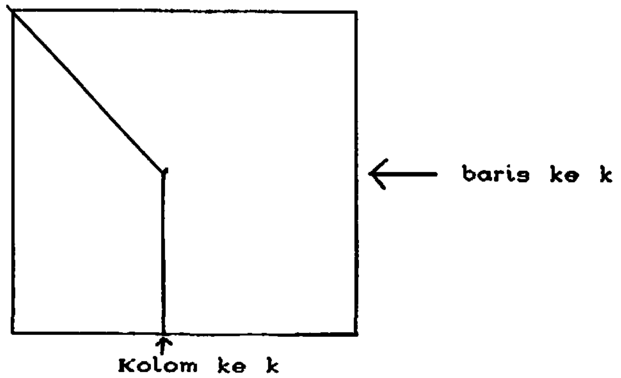
$$A^{(1)} \equiv A$$

$$\text{dan} \quad A^{(n+1)} \equiv U \tag{4.1}$$

Baris ke i dan kolom ke j dari $A^{(k)}$ adalah $a_{ij}^{(k)}$, yaitu

$$a_{ij}^{(k)} = e_i' \, A^{(k)} \, e_j \tag{4.2}$$

dengan e_i adalah kolom ke i dari matriks identitas I_n, matriks $A^{(k)}$ membentuk matriks segitiga atas untuk (k-1) kolom.(Gambar 4.1) Proses dilanjutkan sehingga menghasilkan matriks $A^{(k+1)}$.



Gambar 4.1 : Matriks $A^{(k)}$

Dalam substitusi langkah maju dari Eliminasi Gauss akan dilakukan penghitungan

$$A^{(k+1)} = L_k A^{(k)} , k = 1,2, \dots n \qquad (4.3)$$

dengan L_k adalah matriks segitiga bawah yang diketahui sebagai

$$L_k = I_n = (\eta^{(k)} - e_k) e_k' \qquad (4.4)$$

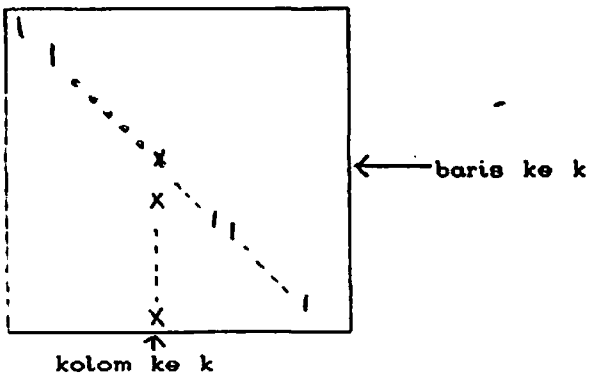
dan elemen-elemen vektor kolom $\eta^{(k)}$ didefinisikan sebagai

$$\eta_i^{(k)} = 0 \quad , \quad i < k$$

$$\eta_i^{(k)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \quad , \quad i = k$$

$$\eta_i^{(k)} = - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad , \quad i > k$$

Jadi elemen-elemen L_k pada diagonal utama adalah 1 dan pada kolom ke k , di bawah dan di atas diagonal utama adalah $\eta_i^{(k)}$, sedangkan elemen-elemen lainnya adalah nol.(Gambar 4.2)



Gambar 4.2 : matriks L_k

Dari persamaan (4.3) yaitu $A^{(k+1)} = L_k A^{(k)}$,
$k = 1, 2, \ldots\ldots n$
untuk $k = 1$, maka

$$A^{(2)} = L_1 A^{(1)}$$
$$= L_1 A$$

untuk $k = 2$, maka

$$A^{(3)} = L_2 A^{(2)}$$
$$= L_2 L_1 A^{(1)}$$
$$= L_2 L_1 A$$

sehingga

$$A^{(n+1)} = L_n L_{n-1} \ldots\ldots L_2 L_1 A^{(1)} \qquad (4.5)$$

Andaikan

$$L = L_n \ldots\ldots\ldots L_2 L_1 \qquad (4.6)$$

dan karena $A^{(1)} \equiv A$ dan $A^{(n+1)} \equiv U$, maka persamaan (4.5) menjadi

$$U = L A \qquad (4.7)$$

Pada sistem persamaan linier $Ax = b$, jika kedua sisi dikalikan dengan L , maka

$$L\,Ax = Lb$$

sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$Ux = Lb \qquad (4.8)$$

Penyelesaian dengan substitusi langkah mundur dari Eliminasi Gauss untuk menyelesaikan (4.8) adalah sebagai berikut :

Andaikan x_i menunjukkan elemen ke i dari x , elemen terakhir x_n sama dengan elemen terakhir dari vektor kolom Lb, karena baris terakhir dari U adalah nol semua kecuali pada elemen terakhir. Nilai x_n disubstitusikan dalam persamaan sebelumnya dan diperoleh x_n dan x_{n-1}. Kemudian x_n dan x_{n-1} disubstitusikan dalam baris ke (n-2) , diperoleh x_{n-2}

Substitusi dilanjutkan ke baris-baris sebelumnya sampai diperoleh x_1

Dalam notasi matriks, substitusi langkah mundur dapat dinyatakan sebagai berikut :

Elemen (i,j) dari U adalah $a_{ij}^{(i+1)}$. Dalam persamaan (4.3) yaitu

$$A^{(k+1)} = L_k\, A^{(k)}$$

diselesaikan sampai $k = i$, sehingga baris ke i dari $A^{(i+1)}$ dan U identik

Substitusi langkah mundur dapat ditentukan sebagi berikut

$$U_2 \; \cdots \cdots \; U_{n-1} \, U_n \, U = I_n \qquad (4.9)$$

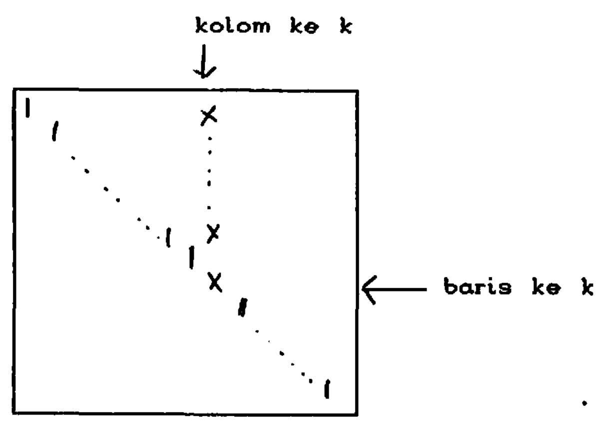
dengan $U_k = I_n + \xi^{(k)} e'_k$, $k = n, n-1, \ldots, 2$ (4.10)

dan elemen dari vektor kolom $\xi^{(k)}$ diketahui sebagai

$$\xi_i^{(k)} = - a_{ik}^{(i+1)} \qquad , \quad i < k$$

$$\xi_i^{(k)} = 0 \qquad , \quad i \geq k$$

Jadi elemen-elemen U_k pada diagonal utama adalah 1 dan $\xi_i^{(k)}$ di atas diagonal utama dalam kolom ke k , sedangkan elemen-elemen lainnya adalah nol.



Gambar 4.3 : Matriks U_k

Substitusi langkah maju dan substitusi langkah mundur dari

Eliminasi Gauss pada A dapat diuraikan sebagai berikut :
Dari persamaan (4.9) , yaitu

$$U_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; U_{n-1}\, U_n\, U \;=\; I_n$$

$$U^{-1} \;=\; U_2 \;.\;.\;.\; U_{n-1}\, U \qquad (4.11)$$

dan dari persamaan (4.8)

$$Ux \;=\; Lb$$

$$x \;=\; U^{-1}\, Lb \qquad (4.12)$$

Karena $L = Ln \;.\;.\;.\;.\;.\; L_2\, L_1$, maka persamaan (4.12) menjadi

$$x \;=\; U_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; U_{n-1}\, U_n\, L_n \;.\;.\;.\;.\;.\; L_2\, L_1\, b \qquad (4.13)$$

Modifikasi dari metode Eliminasi Gauss yaitu metode Doolittle. Metode ini didasarkan pada faktorisasi-LU matriks A. Untuk matriks non singular A, baris-baris matriks tersebut dapat diurutkan kembali sehingga matriks A yang dihasilkannya mempunyai faktorisasi LU, yaitu

$$A = LU \tag{4.14}$$

dengan L adalah matriks segitiga bawah, sedangkan U adalah matriks segitiga atas. Ini dapat dihasilkan dari Eliminasi Gauss. Ternyata L adalah matriks pengganda l_{ij} dengan diagonal utama 1, ... ,1 ; sedangkan U adalah matriks dari sistem segitiga di akhir proses Eliminasi Gauss. Gagasan krusialnya adalah bahwa L dan U di dalam persamaan (4.14) dapat dihitung secara langsung, tanpa menyelesaikan persamaan simultannya (tanpa menggunakan Eliminasi Gauss).

Persamaan (4.14) dapat digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linier Ax = b.

Karena A = LU , maka sistem persamaan linier Ax = b menjadi

$$Ax = L\,Ux = b \tag{4.15}$$

sehingga dapat dituliskan sebagai

$$Ly = b \tag{4.16}$$

dengan $$Ux = y \tag{4.17}$$

Untuk metode Doolittle ini, mula-mula diselesaikan persamaan (4.16), kemudian persamaan (4.17) untuk memperoleh x. Dekomposisi dari (4.14) diperoleh dari

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Secara umum unsur-unsur matriks $L = [\, l_{ij} \,]$ dan $U = [\, u_{ij} \,]$ pada metode Doolittle dapat dihitung dengan rumus-rumus berikut

$$u_{1j} = a_{1j} \qquad , j = 1, \ldots, n$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is}\, u_{sj} \quad , j = i, \ldots , n \; ; \; i \geq 2$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad , i = 2, \ldots, n$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is}\, u_{sj} \right), \; i = j+1, \ldots n, j \geq 2$$

Sebagai contoh akan diselesaikan suatu sistem persamaan linier dengan metode Eliminasi Gauss dan dengan metode Doolittle. Di sini diberikan matriks non singular 3 x 3 , karena jika matriks dengan n besar, tidak dapat dikerjakan secara manual, melainkan dengan menggunakan komputer.

Contoh : Sistem persaaan linier

$$\begin{aligned} x_2 - 4\,x_3 &= 2 \\ x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 &= 4 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

1. Metode Eliminasi Gauss :

Untuk memperoleh persamaan yang mengandung x_1 pada persamaan pertama, maka persamaan pertama ditukar dengan persamaan kedua, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 + 3\,x_2 - 2\,x_3 &= 4 \\ x_2 - 4\,x_3 &= 2 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan perkalian matriks, persamaan linier di atas dapat ditulis sebagai satu persamaan vektor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \; ; \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriks gandengan (augmented matrix)

$$[\,A\ b\,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Substitusi langkah maju

Langkah pertama. Eliminasi x_1

Untuk menghitung x_1 dari persamaan ketiga, maka baris ketiga dikurangi 2 kali baris pertama, hasilnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Persamaan linier menjadi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_2 - 4x_3 &= 2 \\ -x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Langkah ke dua. Eliminasi x_2

Untuk menghilangkan x_2 dari persamaan kedua dan ketiga, maka baris ketiga dijumlahkan dengan baris pertama, hasilnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan liniernya menjadi

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4 \\
x_2 - 4x_3 &= 2 \\
-7x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Ternyata menghasilkan sistem segitiga dan inilah akhir substitusi langkah maju.

Substitusi langkah mundur. Penentuan x_3, x_2, x_1

Dari sistem segitiga yang diperoleh pada langkah kedua, maka dengan pertama-tama mengambil persamaan terakhir, kemudian persamaan kedua dan akhirnya persamaan pertama, dapat diperoleh penyelesaian

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 0 \\
x_2 &= 2 \\
x_1 &= -2
\end{aligned}
$$

2. Metode Doolittle

Dekomposisi persamaan (4.14) untuk sistem persamaan linier yang diketahui diperoleh dari

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan rumus-rumus pada metode Doolittle diperoleh

$$u_{11} = a_{11} = 1 \; ; \; u_{12} = u_{12} = 3 \; ; \; u_{13} = a_{23} = -2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{32}} \quad (a_{32} - l_{31} \, u_{13}) = 1(5 - 2.3) = -1$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \, u_{12} = 1 - 0.3 = -1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \, u_{13} = -4 - 0.-2 = -4$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} \, u_{13} - l_{32} \, u_{23} = -7 - 2.(-2) - (-1)(-4) = -7$$

Jadi faktorisasi $A = LU$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Pertama, diselesaikan $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\quad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selanjutnya diselesaikan $Ux = y$, dengan menentukan x_3 , kemudian x_2 dan x_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $\quad x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

V. KESIMPULAN

Modifikasi dari Eliminasi Gauss yaitu metode Doolittle yang mendasarkan pada gagasan pemfaktoran

$$A = L\,U$$

dengan L matriks segitiga bawah dan U matriks segitiga atas, menggunakan $Ux = y$ dan kemudian menyelesaikan $Ax = LUx = Ly = b$ dengan mula-mula menyelesaikan $Ly = b$ untuk y dan kemudian $Ux = y$ untuk x

Dalam metode Doolittle, L dan U dapat dihitung secara langsung, tanpa menyelesaikan persamaan simultannya (tanpa menggunakan Eliminasi Gauss).

DAFTAR PUSTAKA

1. Goult, R.J.,(1978), APPLIED LINEAR ALGEBRA, John Wiley & Sons, New York .

2. Jeffrey,A.,(1990),LINEAR ALGEBRA AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, Blackwell Scientific Publications Inc., London.

3. Kolman, Bernard, (1976), INTRODUCTORY LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS, Macmillan Publishing Co, Inc., New York.

4. Kreyszig,E., (1988), ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS, John Wiley & Sons, Sixth Edition, New York.

5. Tewarson, Reginald.P., (1973), SPARSE MATRICES, Academic Press, New York and London.