# LAPORAN AKHIR TAHUN
# PENELITIAN DASAR UNGGULAN PERGURUAN TINGGI
# (PDUPT)



# HUBUNGAN DIMENSI METRIK DENGAN PENGEMBANGAN KONSEP DIMENSI METRIK

## TAHUN KE-2 DARI RENCANA 3 TAHUN

**LILIEK SUSILOWATI, S. Si, M. Si** **0001127004**
**Prof. Drs. SLAMIN, M.COMP.SC., Ph.D** **0020046701**
**Dr. MOHAMMAD IMAM UTOYO, M. Si** **0001036403**

**DIBIAYAI OLEH:**
**DIREKTORAT RISET DAN PENGABDIAN MASYARAKAT**
**DIREKTORAT JENDERAL PENGUATAN RISET DAN PENGEMBANGAN**
**KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI**
**SESUAI DENGAN PERJANJIAN PENDANAAN PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT**
**NOMOR: 122/SP2H/PTNBH/DRPM/2018**

**UNIVERSITAS AIRLANGGA**
**NOVEMBER 2018**

## HALAMAN PENGESAHAN

| | |
|---|---|
| Judul | : Hubungan Dimensi Metrik dengan Pengembangan Konsep Dimensi Metrik |
| **Peneliti/Pelaksana** | |
| Nama Lengkap | : Dr LILIEK SUSILOWATI, S.Si, M.Si |
| Perguruan Tinggi | : Universitas Airlangga |
| NIDN | : 0001127004 |
| Jabatan Fungsional | : Lektor Kepala |
| Program Studi | : Matematika |
| Nomor HP | : 0895335735575 |
| Alamat surel (e-mail) | : liliek-s@fst.unair.ac.id |
| **Anggota (1)** | |
| Nama Lengkap | : Drs SLAMIN M.Comp.Sc, Ph.D |
| NIDN | : 0020046701 |
| Perguruan Tinggi | : Universitas Jember |
| **Anggota (2)** | |
| Nama Lengkap | : Dr. Drs MOHAMMAD IMAM UTOYO M.Si |
| NIDN | : 0001036403 |
| Perguruan Tinggi | : Universitas Airlangga |
| **Institusi Mitra (jika ada)** | |
| Nama Institusi Mitra | : - |
| Alamat | : - |
| Penanggung Jawab | : - |
| Tahun Pelaksanaan | : Tahun ke 2 dari rencana 3 tahun |
| Biaya Tahun Berjalan | : Rp 130,000,000 |
| Biaya Keseluruhan | : Rp 349,200,000 |

| | |
|---|---|
| Mengetahui,<br>Dekan Fakultas Sains dan Teknologi | Kota Surabaya, 12 - 11 - 2018<br>Ketua, |
| (Prof. Win Darmanto, M.Si., Ph. D)<br>NIP/NIK 196106161987011001 | (Dr LILIEK SUSILOWATI, S.Si, M.Si)<br>NIP/NIK 197001121994122002 |

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian dan Inovasi

(Prof. H. Hery Purnobasuki, Drs., M.Si., Ph.D)
NIP/NIK 196705071991021001

# RINGKASAN

Di dalam bidang matematika, dikenal suatu teori yang dapat memodelkan suatu permasalahan dalam bentuk titik dan garis (sisi), teori tersebut adalah teori graf. Salah satu yang berkembang sangat pesat dalam teori graf adalah konsep tentang dimensi metrik. Disebut dimensi metri, karena konsep ini melibatkan jarak. Konsep jarak berkaitan erat dengan masalah transportasi. Efisiensi dan optimalisasi transportasi dapat diperoleh dengan menetapkan titik-titik sebagai basis untuk merancang alur transportasi. Salah satu aplikasi dari konsep ini adalah untuk menentukan kota-kota pusat wilayah sehingga setiap kota lain dapat dideteksi oleh pusat wilayah dan kota-kota pusat wilayah tersebut terhubung yang memudahkan setiap komunikasi dan transportasi.

Penelitian merupakan kelanjutan dari penelitian-penelitian yang sudah dilakukan oleh penulis dan para peneliti lainnya. Penelitian ini mempunyai target publikasi karya ilmiah pada jurnal internasional bereputasi dan pemakalah pada seminar nasional maupun internasional. Untuk menunjang target yang dicanangkan, penelitian ini juga menyediakan materi tugas akhir mahasiswa, sebagai bagian dari penelitian, sehingga penelitian ini melibatkan beberapa mahasiswa. Hal ini memberikan kontribusi dalam membangun atmosfir akademik kampus, karena meningkatkan pengembangan penelitian kelompok yang melibatkan mahasiswa dan terbentuk diskusi-diskusi keilmuan di lingkungan kampus. Lebih lanjut, upaya desiminasi hasil juga dilakukan bersama tim mahasiswa pada seminar-seminar nasional atau seminar internasional. Hal ini senada dalam mencapai Renstra Lembaga Penelitian UNAIR, yaitu upaya menjalin jejaring keilmuan dengan perguruan tinggi lain. Penelitian ini juga sejalan dengan peta jalan penelitian perguruan tinggi, yang salah satunya menjadikan publikasi ilmiah sebagai outputnya. Penelitian ini juga merupakan bagian riset unggulan perguruan tinggi di bidang Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan tema riset unggulan Pemodelan di bidang life science, ekonomi dan industri berbasis ict.

Pada tahun pertama, capaian dari penelitian ini adalah publikasi paper di jurnal internasional bereputasi yaitu di Journal of Mathematical and Fundamental Sciences serta menjadi pemakalah pada dua seminar nasional dan 1 pemakalah pada seminar internasional. Hasil pada tahun kedua adalah submit dua publikasi pada jurnal internasional bereputasi serta menjadi pemakalah pada seminar nasional maupun seminar internasional.

# PRAKATA

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan menyebut asma Allah Subhanahu wa ta'ala yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Segala puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah Subhanahu wa ta'ala yang menguasai jagat raya, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyusun Laporan Akhir Penelitian Unggulan Perguruan Tinggi yang berjudul Hubungan Dimensi Metrik dengan Pengembangan Konsep Dimensi Metrik Tahun ke-2 ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad Sholallahu alaihi wassalam, pemimpin sekaligus sebaik-baik suri tauladan bagi kehidupan umat manusia, yang telah membimbing manusia dari kegelapan menuju kehidupan yang penuh petunjuk.

Terima kasih kepada Prof. Drs. Slamin, M. Comp. Sc. Ph. D dan Dr. Moh. Imam Utoyo, M.Si sebagai tim peneliti serta para mahasiswa sebagai tim pendukung penelitian ini. Terima kasih juga disampaikan kepada Menristekdikti dan LPI Universitas Airlangga atas kepercayaan dan kesempatan yang diberikan kepada peneliti.

Harapan penulis, semoga Laporan Kemajuan ini dapat segera disempurnakan menjadi Laporan Akhir penelitian dengan luaran publikasi internasional sebagaimana yang telah direncanakan.

Surabaya,
Penulis.

# DAFTAR ISI

# DAFTAR LAMPIRAN

1. Personalia tenaga pelaksana beserta kualifikasinya.
2. Bukti sumit paper berjudul "The Local Strong Metric Dimension and the Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-$k$" di Journal of Mathematical and Fundamental Sciences.
3. Naskah paper berjudul "The Local Strong Metric Dimension and the Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-$k$".
4. Bukti submit di Journal of Mathematical and Fundamental Sciences (FJMS).
5. Naskah Paper yang disubmit di FJMS berjudul "On Commutative of Graph Operations with Respect to the Local Metric Dimension"
6. Sertifikat mengikuti Seminar internasional.
7. Sertifikat mengikuti Seminar Nasional.

# BAB I. PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Di dalam bidang matematika, dikenal suatu teori yang dapat memodelkan suatu permasalahan dalam bentuk titik dan garis (sisi), teori tersebut adalah teori graf. Graf dari konsep dan aplikasinya mengalamai perkembangan yang sangat pesat. Salah satu yang berkembang sangat pesat adalah konsep tentang dimensi metrik. Dimensi metrik menjadi sesuatu yang sangat menarik karena aplikasinya yang sangat banyak, antara lain pada navigasi robot, suatu robot harus dapat memindahkan dirinya dari satu titik ke titik lainnya tanpa adanya kerancuan dengan menerjemahkan petunjuk yang didapat dari titik–titik yang berbeda. Pemilihan koordinat titik – titik yang berbeda dan paling efisien itulah yang membutuhkan konsep himpunan pembeda yang merupakan cikal bakal dari basis, dimana kardinalitas dari basis tersebut disebut dengan dimensi, sedangkan basis adalah himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Karena pembahasan basis pada graf ini melibatkan definisi jarak (metrik) maka dimensinya disebut dimensi metrik. Konsep jarak berkaitan erat dengan masalah transportasi. Efisiensi dan optimalisasi transportasi dapat diperoleh dengan menetapkan titik-titik sebagai basis untuk merancang alur transportasi. Aplikasi lainnya adalah pada graf kimia yaitu molekul kimia yang dapat disajikan dalam bentuk graf. Molekul-molekul kimia seringkali memerlukan data base untuk menyimpan strukturnya, dengan menemukan basis dan dimensi metriknya, maka struktur molekul tidak perlu disimpan semua, tetapi cukup hanya dengan menyimpan basisnya sudah dapat mewakili semua strukturnya. Dengan demikian maka akan terjadi efisiensi data.

Salah satu hal yang menarik lagi dalam teori graf adalah terkait himpunan pembeda terhubung dan dimensi partisi. Jika dalam pembahasan dimensi metrik, cukup ditentukan himpunan titik pembeda dengan kardinalitas minimal yang menyebabkan setiap titik pada graf mempunyai representasi jarak yang berbeda, maka dalam himpunan pembeda terhubung harus dipastikan himpunan titik pembeda tersebut harus membentuk graf terhubung. Aplikasi dari konsep ini adalah untuk menentukan kota-kota pusat wilayah sehingga setiap kota lain dapat dideteksi oleh pusat wilayah dan kota-kota pusat wilayah tersebut terhubung yang memudahkan setiap komunikasi dan transportasi.

Dari sisi dimensi partisi, jika dalam pembahasan dimensi metrik dan himpunan pembeda terhubung, yang dilibatkan dalam basis adalah titik, maka dalam dimensi partisi yang dilibatkan adalah himpunan titik yang membentuk partisi sehingga setiap titik dalam graf mempunyai penyajian yang berbeda terhadap partisi tersebut. Pembahasan yang menarik disini adalah menentukan partisi dengan kardinalitas minimum. Salah satu aplikasi dari dimensi partisi ini adalah menentukan pembagian wilayah yang optimal sehingga setiap bagian yang lebih kecil dari wilayah dapat dengan mudah dideteksi, yang akibatnya jika ada tempat yang membutuhkan pertolongan dapat segera ditangani.

Penelitian tentang beberapa sifat dimensi metrik untuk graf secara umum, sudah dilakukan oleh Klein, D.J., Yi, E. (2012) yang meneliti perbandingan dimensi metrics antara suatu graf dengan graf baru bentukkannya, Kousar, I. dkk. (2010) meneliti graf-graf yang mempunyai dimensi metrik yang sama., penelitian Glenn G. Chappel di atas banyak membantu untuk pengembangan penelitian lebih lanjut, terutama untuk penelitian dimensi metrik dari graf khusus.

Dalam teori graf terdapat banyak jenis graf khusus, antara lain graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf bipartit, dan graf bintang. Sebagaimana dalam matematika secara umum, dalam teori graf juga dikenal adanya operasi dua graf. Operasi pada graf yang menggunakan istilah yang sama dengan operasi pada aljabar antara lain adalah gabungan, penjumlahan, perkalian. Lebih lanjut operasi pada graf berkembang, antara lain corona dua graf dan amalgamasi graf. Dalam hal dimensi metrik pada graf yang merupakan hasil kali dua graf, telah dilakukan oleh I. G. Yero and Juan A. Rodr'ıguez-Vel'azquez (2010), Iswadi (2010) untuk amalgamasi graf siklus, sedangkan I.G. Yero (2010) meneliti dimensi metrik untuk graf hasil corona.

Penelitian tentang berbagai sifat graf-graf hasil operasi dari graf-graf khusus juga banyak dilakukan baik dari sisi pelabelan ataupun dimensi metrik. Juan A. Rodr'ıguez (2011) meneliti dimensi partisi dari graf yang tidak memuat siklus. Dari sisi dimensi metrik, penelitian graf sebagai hasil operasi dua graf khusus telah dilakukan oleh Iswadi H. (2010) untuk amalgamasi graf siklus, Khalil, A.A., dan Khalil, O.A. (2010) meneliti tentang graf buku (yang merupakan hasil kali graf bintang dengan graf lintasan dengan panjang 2). Iswadi (2011) meneliti dimensi metrik hasil corona dua graf dengan membandingkannya terhadap dimensi metrik graf-graf penyusunnya dan graf-graf yang sudah diketahui dimensi metriknya.

Dari sisi pengembangan konsep, jika konsep dimensi metrik diperoleh dengan memandang setiap titik mempunyai penyajian yang berbeda terhadap suatu himpunan titik, maka dengan memandang setiap dua titik yang bertetangga (membentuk garis) mempunyai penyajian yang berbeda terhadap suatu himpunan titik, Okamoto, *et al.* (2010) mendefinisikan dimensi metrik lokal. Okamoto mendefinisikan himpunan titik dengan kardinalitas minimum yang mengakibatkan setiap dua titik yang bertetangga mempunyai penyajian yang berbeda terhadap himpunan titik tersebut, sebagai basis lokal dan kardinalitasnya disebut dimensi metrik lokal. Dalam penelitiannya, Okamoto berhasil menemukan karakterisasi dimensi metrik lokal sama dengan satu. Rodriguez, *et al.* (2013) juga meneliti dimensi metrik lokal untuk graf hasil operasi korona. Rodriquez, *et al.* (2014) melanjutkan penelitiannya untuk graf hasil kali akar, dengan menggunakan definisi operasi kali akar yang dibangun oleh Godsil dan McKay (1978). Graf hasil kali akar merupakan perumuman dari operasi kali *comb.* Dalam penelitiannya ini, Rodriguez (2014) juga meneliti dimensi metrik lokal graf perumuman hasil operasi korona. Cynthia dan Ramya (2014) meneliti dimensi metrik lokal untuk graf hasil operasi dengan graf siklus yang disebut *cyclic Split Graph.*

Konsep dimensi metrik dikembangkan lebih lanjut oleh Rodriquez dan Fernau (2013), yang membangun definisi dimensi metrik ketetanggaan dan dimensi metrik lokal ketetanggaan. Definisi ini dibangun dengan memandang jarak dua titik hanya 0, 1, dan 2 yang secara berturut-turut menyatakan jarak titik terhadap dirinya sendiri, dua titik yang bertetangga, dan dua titik yang tidak bertetangga. Salah satu pengembangan konsep dimensi metrik juga dilakukan oleh Sebo dan Tannier (2004), yaitu dimensi metrik kuat (*strong metric dimension*), yang ditindaklanjuti aplikasinya pada graf hasil kali kuat (*strong products of graph*) oleh Kuziak, D., *et al.* (2015). Ramirez-Cruz *et al.* (2015), mengembangkan konsep dimensi metrik untuk keluarga graf, yaitu dimensi metrik simultan. Konsep dimensi metrik simultan melibatkan keluarga graf yang mempunyai himpunan titik yang sama.

Dari sejarah perkembangan konsep dimensi metrik, merupakan hal yang menarik untuk dikaji adalah hubungan dimensi metrik dengan pengembangan konsep dimensi metrik, yang meliputi dimensi metrik lokal, dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan dan dimensi metrik kuat. Rodriguez, V., *et al.* (2013) telah meneliti hubungan dimensi metrik dengan dimensi metrik ketetanggaan dan lokal ketetanggaan. Hubungan yang diperoleh oleh Rodriguez adalah hubungan lebih besar sama dengan antara dimensi metrik suatu graf dengan dimensi metrik ketanggaan dan ketetanggaan lokal suatu graf. Susilowati, L., *et al* (2015) meneliti hubungan dimensi metrik dan dimensi metrik lokal. khususnya graf hasil operasi akar.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk menindaklanjuti penelitian tentang hubungan antara dimensi metrik dengan pengembangan konsep dimensi metrik. Hubungan antara dimensi metrik dengan pengembangan konsep dimensi metrik ini dikenakan pada graf atau pada graf hasil operasi. Lebih jauh, diteliti kapan dimensi metrik suatu graf sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuat.

## 1.2. Rumusan Masalah

Yang menjadi rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Apa syarat suatu graf agar dimensi metrik suatu graf tersebut sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya.
2. Bagaimana membangun konsep dimensi metrik fraksional lokal dan dimensi metrik kuat lokal.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini merupakan penelitian berkelanjutan, yakni sejak dalam penelitian SKIM PUPT (2014-2016) dan berlanjut pada penelitian SKIM PDUPT (2017-2019). Penelitian ini termasuk dalam penelitian dasar yang tercakup dalam layanan bidang penelitian Lembaga Penelitian dan Inovasi (LPI) UNAIR, serta sesuai dengan arah penelitian UNAIR yaitu penguatan penelitian dasar. Target luaran penelitian ini adalah publikasi pada jurnal internasional bereputasi, serta diseminasi hasil penelitian pada seminar nasional atau internasional, hal ini sesuai dengan renstra penelitian UNAIR. Lebih lanjut, penelitian ini juga membangun atmosfir akademik yang kondusif karena melibatkan mahasiswa untuk bahan tugas akhir (skripsi), serta meningkatkan kemampuan kominikasi mahasiswa dalam forum yang relevan dengan materi penelitian. Semua ini merujuk pada tercapainya visi misi Universitas Airlangga.

Hasil penelitian ini adalah ditemukannya konsep dan rumusan baru terkait dimensi metric, dan berpotensi ditemukannya algoritma atau pemrograman computer terkait teori yang dihasilkan. Oleh karena itu, materi penelitian ini juga menjadi bagian dari riset unggulan Universitas Airlangga, yaitu bidang Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan tema riset pemodelan di bidang life science, ekonomi dan industry berbasis ict.

Konsep graf pertama kali dikenalkan oleh Leonhard Euler, ahli matematika Swiss pada tahun 1736. Dalam salah satu bukunya, Chartrand dan Oellerman (1993) mendifinisikan Graf G sebagai suatu struktur yang terdiri dari himpunan berhingga yang tidak kosong yang disebut sebagai himpunan titik (*vertex*) dengan sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan yang tidak terurut yang berbeda pada himpunan titik (*vertex*) dari G yang disebut dengan himpunan sisi (*edge*). Himpunan titik (*vertex*) dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisinya dinotasikan dengan $E(G)$. Dalam buku tersebut juga dijelaskan beberapa istilah dalam graf yang digunakan dalam penelitian ini. *Perjalanan* (*walk*) adalah barisan bergantian titik dan garis yang diawali dan diakhiri oleh titik sehingga setiap sisinya insiden dengan dua titik terdekat sebelum dan sesudahnya, yang dinotasikan dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ , sedangkan *panjangnya perjalanan* adalah banyaknya sisi dalam perjalanan tersebut. *Lintasan* (*path*) adalah perjalanan yang semua titiknya berbeda. *Siklus (Cycle)* adalah perjalanan $v_0, v_1, \ldots, v_n$ , dengan $n \geq 3$ dimana $v_0 = v_n$ dan semua titiknya berbeda, siklus dengan panjang n dinotasikan dengan $C_n$. Jarak (*distance*) dari titik $u$ ke titik $v$ pada graf $G$, yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang path terpendek dari $u$ ke $v$.

Khalil, A.A dan Khalil,O.A (2010) mendefinisikan graf buku $B_n$ sebagai graf yang merupakan hasil kali kartesian dari graf bintang $S_n$ dan graf lintasan $P_2$. Sedangkan graf buku bertumpuk $B_{n,m}$ graf yang merupakan hasil kali kartesian dari graf bintang $S_n$ dan graf lintasan $P_m$.

Chartrand dkk (2000) menjelaskan definisi dimensi metric dan definisi himpunan pembeda. Misalkan $V(G) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ merupakan himpunan titik – titik pada graf G, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ merupakan himpunan terurut dan $v$ adalah sebuah titik pada graf $G$. Representasi dari $v$ terhadap $W$ adalah pasangan berurut $k-$ *tuple*, $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$

dengan $d(v, w_1)$ adalah jarak antara titik $v$ dan titik $w_1$. Himpunan $W$ disebut himpunan pembeda dari $G$ jika setiap titik di $G$ memiliki representasi yang berbeda. Himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas paling minimal disebut himpunan pembeda minimal atau **basis**. Banyaknya titik pada basis dari graf $G$ disebut **dimensi**. dilambangkan $dim(G)$. Lebih lanjut, karena konsep dimensi dibangun dengan menggunakan konsep jarak, disebut dengan dimensi metric. Misalkan $S \subseteq V(G)$ dan titik $v \in V(G)$, **jarak antara $v$ dengan $S$** yang dinotasikan $d(v, S)$ didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan $S_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ adalah himpunan partisi dari $V(G)$, $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dan $v$ adalah *vertex* di $G$, maka **representasi $v$ pada $\pi$** didefinisikan sebagai :

$$r(v|\pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$$

Partisi $\pi$ disebut sebagai ***partisi resolving*** jika $r(v|\pi), v \in V(G)$ mempunyai representasi yang berbeda. **Dimensi partisi** pada graf $G$ adalah kardinalitas minimum dari resolving partisi dari $V(G)$ dan dinotasikan dengan $pd(G)$. Herolistra (2009) mendefinisikan sebuah himpunan pembeda W dari G terhubung jika subgraf yang dibangun oleh W adalah sebuah subgraf terhubung dari G. Banyak anggota minimum darisebuah himpunan pembeda terhubung di graf G disebut bilangan pembeda terhubung.

Hasil penelitian sebelumnya yang dirujuk oleh Iswadi antara lain: Misalkan $G$ adalah graf terhubung yang non trivial, maka berlaku

(*i*) $dim(G) = 1$ jika hanya jika $G = P_n$.

(*ii*) $dim(G) = n - 1$ jika hanya jika $G = K_n$.

(*iii*) untuk $n \geq 4$, $dim(G) = n - 2$ jika hanya jika $G = K_{r,s}$ $(r; s \geq 1)$.

$G = K_r + K_s$, $(r \geq 1; s \geq 2)$, *or* $G = K_r + (K_1 \cup K_s)$, $(r; s \geq 1)$.

(*iv*) untuk $n \geq 3$, $dim(C_n) = 2$.

Iswadi (2011) menemukan dimensi metrik graf hasil operasi korona, seperti yang disajikan di bawah ini.

Misalkan $G$ adalah graf terhubung dan $H$ adalah graf dengan ordo paling sedikit 2, maka

$$\dim(G \odot H) = \begin{cases} |G| \dim(H), \text{jika } H \text{ memuat titik dominan} \\ |G| \dim(K_1 + H), \text{ untuk yang lain} \end{cases}$$

Saputro, S.W. *et al.* (2013) meneliti dimensi metrik graf hasil kali *comb* dua graf. Untuk menentukan dimensi metrik graf hasil operasi kali *comb*, Saputro membaginya dalam dua kasus, yaitu apakah titik yang direkatkan merupakan elemen basis atau bukan. Hasil yang diperoleh berlaku untuk graf secara umum, yang disajikan di bawah ini.

Misalkan $G$ dan $H$ adalah graf terhubung dengan ordo paling sedikit 2. Jika $|V(G)| = m$ dan $H$ bukan graf lintasan, maka

$$\dim(G \circ H) = \begin{cases} m\,(\dim(H) - 1), \text{jika basis } H \text{ memuat titik } o \\ m \dim(H), \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Okamoto, F., *et al.* (2010) mendefinisikan tentang himpunan pembeda lokal dan dimensi metrik lokal suatu graf. Dengan mengacu definisi representasi titik terhadap suatu himpunan seperti yang sudah disajikan di atas, didefinisikan himpunan pembeda lokal sebagai berikut. Misalkan $G$ adalah graf terhubung, dan $W \subseteq V(G)$ merupakan himpunan terurut, $W$ disebut himpunan pembeda lokal jika untuk setiap dua titik yang bertetangga pada $G$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap $W$, yaitu jika diambil sebarang dua titik $u$, $v$ sehingga $uv \in E(G)$ maka $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda lokal dari graf $G$ dengan kardinalitas minimum disebut basis lokal dari graf $G$ dan kardinalitasnya disebut dimensi metrik lokal dari graf $G$, dinotasikan dengan $\dim_l(G)$. Hasil utama penelitian Okamoto ini merupakan karakterisasi graf yang dimensi metrik lokal 1 dan $n-1$, dengan $n$ adalah ordo grafnya.

Studi pendahuluan yang mendukung penelitian ini adalah:

1. Hubungan dimensi metrik ketetanggaan dan dimensi metrik ketetanggaan lokal suatu graf (Rodriguez, 2013).
2. Dimensi metrik kuat graf hasil kali kuat (Kuziak, 2015).
3. Dimensi metrik simultan (Ramirez-Kruz, 2015).

Studi pendahuluan yang sudah dilaksanakan oleh peneliti adalah:

1. Kesamaan dimensi metrik dan dimensi metrik lokal graf hasil kali akar (Susilowati, dkk. 2015).

2. Membangun definisi perumuman operasi korona, operasi kali *comb* dan operasi kali akar dan menentukan dimensi metrik lokal graf hasil operasi dan perumumannya (Susilowati, dkk., 2016).

Menentukan syarat graf sehingga operasi korona dan kali *comb* komutatif secara dimensi metrik (Susilowati, dkk., 2017).

# BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

## 3.1. Tujuan Penelitian

Yang menjadi tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan syarat suatu graf agar dimensi metrik suatu graf tersebut sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya.
2. Membangun konsep dimensi metrik fraksional lokal atau dimensi metrik kuat local.

## 3.2. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah mengembangkan teori graf dari sisi konsep dimensi metrik.

# BAB 4. METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini meliputi tiga tahap. Tahap pertama menentukan hubungan dimensi metrik suatu graf atau graf hasil operasi dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuat. Tahap kedua menentukan syarat suatu graf agar dimensi metrik suatu graf tersebut sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya. Tahap ketiga menentukan syarat suatu agar dimensi metrik suatu graf hasil operasinya sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya. Penelitian dilaksanakan di prodi Matematika FST Universitas Airlangga, khususnya di kelompok keahlian bidang minat aljabar, dengan melibatkan mahasiswa untuk materi skripsi.

Adapun langkah-langkah penelitiannya pada masing-masing tahap disajikan sebagai berikut:
Tahap I : Menentukan syarat suatu graf agar dimensi metrik suatu graf tersebut sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan, dimensi metric fraksional atau dimensi metrik kuatnya:

1. Dengan mengacu pada langkah kerja penelitian tahun I, dikelompokkan graf-graf yang yang memungkinkan dimensi metriknya sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya.
2. Menganalisa hasil pada langkah 1.
3. Diduga syarat graf sehingga dimensi metriknya sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya.
4. Membuktikan langkah 3.

Tahap II: Menentukan syarat suatu agar dimensi metrik suatu graf hasil operasinya sama dengan dimensi metrik ketetanggaan, dimensi metrik lokal ketetanggaan, dimensi metrik simultan atau dimensi metrik kuatnya:

1. Mengkaji hasil penelitian tentang dimensi metrik simultan, dimensi metrik kuat, dimensi metrik ketetanggaan dan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf hasil operasi.
2. Menentukan dimensi metrik simultan, dimensi metrik kuat, dimensi metrik ketetanggaan atau dimensi metrik ketetanggaan lokal dari graf hasil operasi graf-graf khusus.
3. Dicari pola hubungan antar dimensi yang diperoleh dari langkah 2.

4. Merumuskan pola hubungan pada langkah 3.
5. Membuktikan rumusan pada langkah 4.

# BAB 5. HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

## 5.1. DIMENSI METRIK KUAT LOKAL

**Lemma 5.1** Misalkan $G$ adalah gaf terhubung dan $s \in V(G)$. Jika $u, v \in V(G)$ dengan $d(u,s) = d(v,s)$ maka $s$ bukan pembeda kuat pasangan titik $u, v$.

**Bukti.** Misalkan $G$ adalah gaf terhubung dan $s, u, v \in V(G)$ dengan $d(u,s) = d(v,s) = k,\ k \in \mathbb{N}$.

Andaikan $s$ adalah pembeda kuat pasangan titik $u, v$ maka $u \in I[v,s]$ atau $v \in I[u,s]$ sehingga terdapat tiga kasus yaitu (i) $\in I[v,s],\ v \notin I[u,s]$, (ii) $u \notin I[v,s]$, $v \in I[u,s]$, dan (iii) $u \in I[v,s],\ v \in I[u,s]$.

(i) Misalkan $\in I[v,s],\ v \notin I[u,s]$, dan $I[v,s] = \{v = v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k = s\}$. Karena $u \in I[v,s]$ maka terdapat $v_i \in I[v.s]$ dengan $i \in \{1,2,3, \ldots, k-1\}$ sehingga $v_i = u$. Akibatnya $d(u,s) < d(v,s)$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $d(u,s) = d(v,s)$.

(ii) Misalkan $u \notin I[v,s],\ v \in I[u,s]$, dan $I[u,s] = \{u = u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k = s\}$. Karena $v \in I[v,s]$ maka terdapat $u_i \in I[v,s]$ dengan $i \in \{1,2,3, \ldots, k-1\}$ sehingga $u_i = v$. Akibatnya $d(v,s) < d(u,s)$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $d(u,s) = d(v,s)$.

(iii) Misalkan $u \in I[v,s]$ dan $v \in I[u,s]$. Berdasarkan kasus (i) dan kasus (ii) maka diperoleh $d(u,s) < d(v,s)$ dan $d(v,s) < d(u,s)$. Karena $d(u,s) < d(v,s)$, $d(v,s) < d(u,s)$ maka kasus (iii) tidak pernah dimungkinkan terjadi.

Berdasarkan uraian diatas maka ketiga kasus tersebut tidak dimungkinkan terjadi sehingga $s$ bukan pembeda kuat pasangan titik $u, v$. Jadi apabila $u, v \in V(G)$ dengan $d(u,s) = d(v,s)$ maka $s$ bukan pembeda kuat pasangan titik $u, v$.

**Lemma 5.2** Misalkan $G$ adalah gaf terhubung, $s, u, v \in V(G)$, dan $uv \in E(G)$. Jika $d(u,s) < d(v,s)$ maka $u \in I[v,s]$.

**Bukti.** Misalkan $G$ adalah gaf terhubung, $s, u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$, $d(v,s) = l$, $d(u,s) = k$ dengan $k < l$ dan $I[u,s] = \{u = u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k = s\}$. Karena $uv \in E(G)$ maka terdapat lintasan $v, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ dengan panjang lintasannya yaitu $k + 1 \leq l$. Dengan demikian terdapat dua kasus yaitu (i) $k + 1 < l$ dan (ii) $k + 1 = l$.

Kasus (i) tidak dimungkinkan terjadi karena apabila $k+1<l$ maka lintasan $v, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k = s$ mempunyai panjang lintasan kurang dari $l$ yang mengakibatkan $d(v,s) < l$. Hal ini kontradiksi dengan $d(v,s) = l$.

Kasus (ii) misalkan $k+1 = l$ maka $v, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k = s$ merupakan lintasan terpendek titik $v$ ke titik $s$ sehingga $I[v,s] = \{v, u = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Akibatnya $u \in I[v,s]$. Jadi apabila $d(u,s) < d(v,s)$ maka $u \in I[v,s]$.

**Lemma 5.3** Misalkan $G$ adalah gaf terhubung. Jika untuk setiap $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| = k$ bukan himpunan pembeda kuat graf $G$ maka untuk setiap $S \subseteq V(G)$ dengan $|S| < |W|$ juga bukan himpunan pembeda kuat graf $G$.

**Bukti.** Misalkan untuk setiap $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| = k$ bukan himpunan pembeda kuat graf $G$. Andaikan terdapat $S \subseteq V(G)$ dengan $|S| < |W|$ dan $S$ adalah himpunan pembeda kuat graf $G$.

Misalkan $|S| = l$ maka untuk setiap dua titik di $G$ mempunyai pembeda kuat di $S$. Akibatnya terdapat $W' = S \cup \{v_i | i = 1,2,\ldots,k-l\}$ dengan $v_i \in V(G) \setminus S$ sehingga $|W'| = k$ yang merupakan himpunan pembeda kuat graf $G$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan untuk setiap $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| = k$ bukan himpunan pembeda kuat graf $G$.

Jadi untuk setiap $W \subseteq V(G)$ dengan $|W| = k$ bukan himpunan pembeda kuat graf $G$ maka untuk setiap $S \subseteq V(G)$ dengan $|S| < |W|$ juga bukan himpunan pembeda graf $G$.

**Teorema 5.4** $dim_{sl}(P_n) = 1$.

**Bukti.** Misalkan $V(P_n) = \{v_i | i = 1,2,\ldots,n\}$, $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\ldots,n-1\}$, graf $P_n$ mempunyai lintasan $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ dan dipilih $S = \{v_1 | \deg v_1 = 1\}$.

Dibuktikan bahwa $S$ adalah pembeda kuat lokal graf $P_n$. Diambil sebarang dua titik bertetangga $v_i, v_{i+1} \in V(P_n)$, $v_i v_{i+1} \in E(P_n)$ dengan $i = 1,2,\ldots,n-1$, maka $v_i \in I[v_1, v_{i+1}]$ sehingga $v_1$ merupakan pembeda kuat titik $v_i, v_{i+1} \in V(P_n)$. Dengan demekian $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal graf $P_n$.

Himpunan pembeda kuat lokal suatu graf tidak dimungkinkan himpunan kosong, maka himpunan $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal dengan kardinalitas minimal sehingga $S$ adalah basis metrik kuat lokal graf $P_n$. Jadi $dim_{sl}(P_n) = 1$.

**Teorema 5.13** $dim_{sl}(C_n) = \begin{cases} 1 & jika\ n\ genap \\ 2 & jika\ n\ gasal \end{cases}$

**Bukti.** Misalkan graf $C_n$ mempunyai ordo $n$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $n$ bilangan genap atau $n$ bilangan gasal.

**Kasus 1.** Untuk $n$ genap yaitu $n = 2k, k \geq 2$.

Misalkan $V(C_n) = \{u_i, v_i | i = 1,2, \dots, k\}$, $E(C_n) = \{u_i u_{i+1},\ u_k v_k,\ v_i v_{i+1}, u_1 v_1 | i = 1,2, \dots, k-1\}$, graf $C_n$ mempunyai siklus $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, u_1$ dan dipilih $S = \{u_1\}$. Dibuktikan bahwa $S$ adalah pembeda kuat lokal graf $C_n$ dengan . Diambil sebarang dua titik yang bertetangga $u, v \in V(C_n), uv \in E(C_n)$ maka terdapat empat kemungkinan pasangan yaitu $(i)\ u = u_i, v = u_{i+1}$ untuk $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$, $(ii)\ u = u_k, v = v_k$, dan $(iii)\ u = v_i, v = v_{i+1}$, untuk $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$, $(iv)\ u = u_1,\ v = v_1$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa setiap kemungkinan pasangan titik tersebut mempunyai pembeda kuat di $S$.

(i) Diambil sebarang $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$ dengan $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$, maka $u_i \in I[u_1, u_{i+1}]$ sehingga $u_1$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$.

(ii) Diambil $u_k v_k \in V(C_n)$ maka $u_k \in I[u_1, v_k]$ sehingga $u_1$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_k, v_k$.

(iii) Diambil sebarang $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$ dengan $i \in \{1,2, \dots, k-1\}$, maka $v_i \in I[u_1, v_{i+1}]$ sehingga $u_1$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$.

(iv) Diambil $u_1, v_1 \in V(C_n)$ maka $u_1 \in I[u_1, v_1]$ sehingga $u_1$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_1, v_1$.

Berdasarkan uraian diatas, $u_1$ merupakan pembeda kuat untuk setiap pasang titik yang bertetangga di $C_n$, sehingga $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal graf $C_n$. Himpunan pembeda kuat lokal suatu graf tidak dimungkinkan himpunan kosong, maka himpunan $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal dengan kardinalitas minimal, akibatnya $S$ adalah basis metrik kuat lokal graf $C_n$. Jadi $dim_{sl}(C_n) = 1$ untuk $n$ genap.

**Kasus 2.** Untuk $n$ gasal. yaitu $n = 2k + 1,\ k \geq 1$

Misalkan $V(C_n) = \{w, u_i, v_i | i = 1,2, \dots, k\}$, $E(C_n) = \{wu_1,\ u_i u_{i+1},\ u_k v_k,\ v_i v_{i+1}, v_1 w | i = 1,2, \dots, k-1\}$, graf $C_n$ mempunyai siklus $w, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, w$ dan dipilih $S = \{w, u_1\}$. Dibuktikan bahwa $S$ adalah himpunan pembeda kuat lokal graf $C_n$ dengan $n$ gasal. Diambil sebarang dua titik yang bertetangga $u, v \in V(C_n)$, $uv \in E(C_n)$ maka terdapat lima kemungkinan pasangan yaitu $(i)\ u = w,\ v = u_1$, $(ii)\ u = u_i,\ v = u_{i+1},\ i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ $(iii)\ u = u_k, v = v_k$, $(iv)\ u = v_i, v = v_{i+1},\ i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ dan (v) $u = v_1,\ v = w$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa setiap kemungkinan pasangan titik tersebut mempunyai pembeda kuat di $S$.

(i) Diambil $u_1, w \in V(C_n)$ maka $w \in I[u_1, w]$ sehingga $w$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_1, w \in V(C_n)$.

(ii) Diambil sebarang $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$ dengan $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, maka $u_i \in I[w, u_{i+1}]$ sehingga $w$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$.

(iii) Diambil $u_k, v_k \in V(C_n)$ maka $u_k \in I[u_1, v_k]$ sehingga $u_1$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $u_k, v_k \in V(C_n)$.

(iv) Diambil sebarang $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$ dengan $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, maka $v_i \in I[w, v_{i+1}]$ sehingga $w$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$.

(v) Diambil $v_1, w \in V(C_n)$ maka $w \in I[v_1, w]$ sehingga $w$ merupakan pembeda kuat pasangan titik $v_1, w \in V(C_n)$.

Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa setiap dua titik yang bertetangga di $C_n$ dapat dibedakan kuat oleh titik $w$ atau titik $u_1$, sehingga $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal graf $C_n$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal minimal. Diambil sebarang $S' \subseteq V(C_n)$ dengan $|S'| < S$, maka $S'$ adalah *singgleton*. Karena $C_n$ adalah graf siklus dengan ordo $n$ gasal, maka terdapat dua titik bertetangga yang masing-masing mempunyai jarak $\frac{n-1}{2}$ ke $s \in S'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti dipilih $S' = \{w\}$. Dengan demikian $d(u_k, w) = d(v_k, w) = k$ sehingga berdasarkan **Lemma 5.1** $w$ bukan pembedan kuat titik $u_k, v_k$. Akibatnya pasangan titik $u_k, v_k$ tidak mempunyai pembeda kuat di $S'$ dan $S'$ bukan himpunan pembeda kuat lokal graf $C_n$. Jadi $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal minimal atau basis metrik kuat lokal graf $C_n$ dan $dim_{sl}(C_n) = 2$ untuk $n$ gasal.

**Teorema 5.6** $dim_{sl}(S_n) = 1$.

**Bukti.** Misalkan $V(S_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$, $\deg v_n = 1$, $E(S_n) = \{v_n v_i | i = 1,2,\dots,n-1\}$. dan dipilih $W = \{v_n\}$. Diambil sebarang dua titik yang bertetangga $v_n, v_i \in V(S_n)$ dengan $i =$

$1,2,\ldots,n-1$, maka $v_n \in I[v_n, v_i]$ sehingga $v_n$ merupakan pembeda kuat titik $v_n, v_i$. Akibatnya $W$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal graf $S_n$.

Himpunan pembeda kuat lokal suatu graf tidak dimungkinkan himpunan kosong, maka himpunan $W$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal dengan kardinalitas minimal sehingga $W$ adalah basis metrik kuat lokal graf $S_n$. Jadi $dim_{sl}(S_n) = 1$.

**Teorema 5.7** $dim_{sl}(K_n) = n - 1$ dengan $n \geq 2$.

**Bukti.** Misalkan $V(K_n) = \{v_i | i = 1,2,\ldots,n\}$, $E(K_n) = \{v_i v_j | \; i \neq j \; dan \; i,j = 1,2,\ldots,n\}$, dan dipilih $S = \{v_i | i = 1,2,\ldots,n-1\}$. Diambil sebarang dua titik yang bertetangga $v_i, v_j \in V(K_n)$ dengan $i \neq j$ dan $i = 1,2,\ldots,n$ maka $v_i \in S$ atau $v_j \in S$ sehingga $v_i \in I[v_i, v_j]$ atau $v_j \in I[v_i, v_j]$. Dengan demekian setiap dua titik pada graf $K_n$ mempunyai pembeda kuat di $S$ dan $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal graf $K_n$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal minimal. Diambil sebarang $S' \subseteq V(K_n)$ dengan $|S'| < S$ maka terdapat dua titik pada graf $K_n$ yang bukan anggota dari $S'$ dimisalkan $u$ dan $v$. Diambil sebarang $s \in S'$ maka $d(u,s) = d(v,s) = 1$ sehingga berdasarkan **Lemma 5.1** $s$ bukan pembedan kuat titik $u,v$. Akibatnya pasangan titik $u,v$ tidak mempunyai pembeda kuat di $S'$ dan $S'$ bukan himpunnan pembeda kuat lokal graf $K_n$. Jadi $S$ merupakan basis metrik kuat lokal graf $K_n$ dan $dim_{sl}(K_n) = n - 1$.

**Teorema 5.8** Misalkan $G$ adalah graf tehubung berordo $n \geq 2$, maka

i $dim_{sl}(G) = 1$ jika dan hanya jika $G$ adalah graf bipartit

ii $dim_{sl}(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$

**Bukti.** Misalkan $G$ adalah graf tehubung berordo $n \geq 2$

(i) ($\Leftarrow$) Misalkan $G$ adalah graf bipartit dengan $V(G)$ dipartisi menjadi $V_1 \neq \phi$ dan $V_2 \neq \phi$ serta dipilih $S = \{u\}$ dengan $u \in V_2$. Diambil sebarang $x, y \in V(G)$ dengan $xy \in E(G)$ maka $x \in V_1$, $y \in V_2$ atau $y \in V_1$, $x \in V_2$. Karena $G$ adalah graf tehubung dan $xy \in E(G)$ maka terdapat lintasan terpendek $x - u$ dan lintasan terpendek $y - u$ dengan $d(x,u) < d(y,u)$ atau $d(y,u) < d(x,u)$. Berdasarkan **Lemma 5.2** maka diperoleh $x \in I[y,u]$ atau $y \in I[x,u]$ sehingga u adalah pembeda kuat titik $x, y$. Dengan demikian $S$ adalah himpunan pembeda kuat lokal graf $G$.

Himpunan pembeda kuat lokal suatu graf tidak dimungkinkan himpunan kosong, maka himpunan $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal dengan kardinalitas minimal sehingga $S$ adalah basis metrik kuat lokal graf $G$. Jadi $dim_{sl}(G) = 1$.

($\Longrightarrow$) Misalkan $dim_{sl}(G) = 1$ dan andaikan $G$ bukan graf bipartit, maka terdapat $v_1, v_2 \in V_1$, $u_1, u_2, u \in V_2$ dengan $v_1u_1, v_2u_2 \in E(G)$ dan $u_1u_2 \in E(G)$ sehingga terbentuk sebuah siklus gasal $u_2, v_2, u, \dots, v_1, u_1, u_2$. Berdasarkan **Teorema 5.5** maka $dim_{sl}(G) \geq 2$. Hal ini kontradiksi dengan $dim_{sl}(G) = 1$. Jadi $G$ adalah graf bipartit.

(ii) ($\Longleftarrow$) Misalkan $G = K_n$ maka berdasarkan **Teorema 5.7** $dim_{sl}(G) = n - 1$.

($\Longrightarrow$)Andaikan $dim_{sl}(G) = n - 1$ dan $G \not\cong K_n$, maka terdapat $u, v \in V(G)$ dengan $uv \notin E(G)$. Karena $uv \notin E(G)$ maka $\deg u \leq n - 2$ dan $\deg v \leq n - 2$ sehingga $V(G) - \{u, v\}$ adalah himpunan pembeda kuat lokal graf $G$. Hal ini kontradiksi dengan $dim_{sl}(G) = n - 1$.

**Teorema 5.9** Misalkan $G, H$ adalah graf terhubung dengan ordo $n_1$ dan $n_2$.

$$dim_{sl}(G \odot H) = |V(G)|.\, dim_{sl}(H).$$

**Bukti.** Misalkan $V(G) = \{u_i | i = 1,2, \dots, n_1\}$, $V(H) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n_2\}$, $H_i$ merupakan salinan graf $H$ ke-$i$ dengan $i = 1,2, \dots, n_1$. $V(H_i) = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, n_2\}$, $E(G \odot H) = E(G) \cup_{i=1}^{n_1} E(H_i) \cup \{u_iv_{ij} \mid u_i \in V(G),\ v_{ij} \in V(H_i)\}$, $dim_{sl}(H_i) = k$, $S_i = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, k\}$ merupakan basis metrik kuat lokal graf $H_i$, dan dipilih $S = \cup_{i=1}^{n_1} S_i$.

Diambil sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(G \odot H)$, $xy \in E(G \odot H)$. Terdapat tiga kemungkinan pasangan titik yaitu (i) $x, y \in V(G)$, (ii) $x \in V(G)$ dan $y \in V(H_i)$, dan (iii) $x, y \in V(H_i)$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa setiap kemungkinan pasangan tersebut mempunyai pembeda kuat di $S$.

(i) Jika $x, y \in V(G)$ maka terdapat $i, j \in \{1,2, \dots, n_1\}$ dengan $i \neq j$ sehingga $x = u_i$ dan $y = u_j$. Dipilih $v_{i1} \in S$. Karena $u_i \in I[u_j, v_{i1}]$ maka $v_{i1}$ adalah pembeda kuat titik $u_i, u_j$. Dengan demikian pasangan titik $u_i, u_j$ mempunyai pembeda kuat di $S$.

(ii) Jika $x \in V(G)$ dan $y \in V(H_i)$ dengan $xy \in E(G \odot H)$ maka terdapat $i \in \{1,2, \dots, n_1\}$, $j \in \{1,2, \dots, n_2\}$ sehingga $x = u_i$ dan $y = v_{ij}$. Dipilih $v_{m1} \in S$ dengan $m \neq i$, $m \in \{1,2, \dots, n_1\}$. Karena $u_i \in I[v_{ij}, v_{m1}]$ maka $v_{m1}$ adalah pembeda kuat titik $u_i, v_{ij}$. Dengan demikian pasangan titik $u_i, v_{ij}$ mempunyai pembeda kuat di $S$.

(iii) Jika $x, y \in V(H_i)$ maka terdapat $j, m \in \{1,2,\dots,n_2\}$ dengan $j \neq m$ sehingga $x = v_{ij}$ dan $y = v_{im}$. Karena $S_i$ merupakan basis metrik kuat lokal graf $H_i$ maka terdapat $v \in S_i$ yang merupakan pembeda kuat pasangan titik $v_{ij}, v_{im}$. Karena $S_i \subseteq S$ maka pasangan titik $v_{ij}, v_{im}$ juga mempunyai pembeda kuat lokal di $S$.

Berdasarkan uraian diatas, $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $S$ merupakan himpunan pembeda kuat lokal minimal. Diambil sebarang $S' \subseteq V(G \odot H)$ dengan $|S'| < |S|$, maka terdapat $x \in S_i$ dengan $i \in \{1,2,\dots,n_1\}$ dan $x \notin S'$ yang mengakibatkan terdapat $W \subseteq S_i$, $W \subseteq S'$ dengan $|W| < S_i$. Karena $S_i$ merupakan basis metrik kuat lokal graf $H_i$ dan $|W| < S_i$ maka $W$ bukan himpunan pembeda kuat lokal graf $H_i$ dan terdapat dua titik $v_{ix}, v_{iy} \in V(H_i)$ yang tidak mempunyai pembeda kuat di $W$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $v_{ix}, v_{iy}$ juga tidak mempunyai pembeda kuat di $S'$. Diambil sebarang $v \in S' \setminus W$ maka $d(v_{ix}, v) = d(v_{iy}, v)$ sehingga berdasarkan **Lemma 2.1**, $v$ bukan pembeda kuat titik $v_{ix}, v_{iy}$ dan pasangan titik $v_{ix}, v_{iy}$ tidak mempunyai pembeda kuat di $S' \setminus W$. Karena $v_{ix}, v_{iy}$ tidak mempunyai pembeda kuat di $W$ maupun $S' \setminus W$ maka $S'$ bukan himpunan pembeda kuat lokal graf $G \odot H$. Jadi $S$ merupakan basis metrik kuat lokal graf $G \odot H$ dan $dim_{sl}(G \odot H) = |V(G)|.dim_{sl}(H)$.

**Akibat 5.10** Misalkan $G, H$ adalah graf terhubung berordo paling sedikit dua maka

$$dim_{sl}(G \odot^k H) = |V(G \odot^{k-1} H)|.dim_{sl}(H).$$

**Bukti.** Misalkan $G, H$ adalah graf terhubung berordo paling sedikit dua dan $G' = G \odot^{k-1} H$, maka $(G \odot^k H) = G' \odot H$. Berdasarkan **Teorema 5.9** yang menyatakan bahwa $dim_{sl}(G' \odot H) = |V(G')|.dim_{sl}(H)$ maka diperoleh $dim_{sl}(G \odot^k H) = |V(G \odot^{k-1} H)|.dim_{sl}(H)$.

## 5.2. DIMENSI METRIK KETETANGGAAN

**Lemma 5.11** Misalkan graf $G$ adalah graf lintasan dan graf siklus berordo $n$, $S \subseteq V(G)$ dengan $S = \{v_{n_i} \mid i = 1, 2, \dots, k \text{ dengan } n_i < n_{i+1}\}$. Jika terdapat $v_{n_i}, v_{n_{i+1}} \in S$ sehingga $l(v_{n_i} - v_{n_{i+1}}) > 4$ maka $S$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

**Bukti.** Misalkan $S \subseteq V(G)$ dengan $S = \{v_{n_i} \mid i = 1, 2, \dots, k \text{ dengan } n_i < n_{i+1}\}$. Terdapat $v_{n_i}$, $v_{n_{i+1}} \in S$ sehingga $l(v_{n_i} - v_{n_{i+1}}) > 4$. Berdasarkan himpunan titik pada graf $G$ diperoleh himpunan titik $v_{(n_i)+j} \in V(G) - S$ dengan $j \in \{1, 2, \dots, t\}, t \geq 5$. Terdapat dua kasus, yaitu:

**Kasus 1.** Untuk graf $G$ adalah graf lintasan $(P_n)$. Misalkan $V(P_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$ dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\}$. Diambil sebarang $s \in S$ maka terdapat 4 kemungkinan yaitu $s = v_{n_i}$, $s = v_{n_{i+1}}$, $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$. Jika $s = v_{n_i}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)+1}\}$ untuk $n_i = 1$ atau $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s = v_{n_{i+1}}$ maka $N(s) = \{v_{(n_{i+1})-1}\}$ untuk $n_{i+1} = n$ atau $N(s) = \{v_{(n_{i+1})+1}, v_{(n_{i+1})-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Sedangkan jika $s \neq v_{n_i}$ atau $s \neq v_{n_{i+1}}$, maka terdapat $n_p < n_i$ sehingga $s = v_{n_p}$ atau terdapat $n_q > n_{i+1}$ sehingga $s = v_{n_q}$. Diambil sebarang titik $x, y \in V(P_n) - S$, maka terdapat $x = v_{(n_i)+2}$ dan $y = v_{(n_i)+3}$ dengan $v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3} \notin N(s)$. Diperoleh, $|\{v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3}\} \cap N(s)| = 0 \neq 1$

**Kasus 2.** Untuk graf $G$ adalah graf siklus $(C_n)$. Misalkan $V(C_n) = \{v_i | i = 0,1,2,\dots,n\}$ dan $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\} \cap \{v_n v_1\}$. Diambil sebarang $s \in S$ maka terdapat 4 kemungkinan yaitu $s = v_{n_i}$, $s = v_{n_{i+1}}$, $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$. Jika $s = v_{n_i}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_n\}$ untuk $n_i = 1$ atau $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s = v_{n_{i+1}}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)-1}, v_1\}$ untuk $n_{i+1} = n$ atau $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$ maka terdapat $n_p < n_i$ sehingga $s = v_{n_p}$ atau terdapat $n_q > n_{i+1}$ sehingga $s = v_{n_q}$. Diambil sebarang titik $x, y \in V(C_n) - S$, maka terdapat $x = v_{(n_i)+2}$ dan $y = v_{(n_i)+3}$ dengan $v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3} \notin N(s)$. Diperoleh, $|\{v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3}\} \cap N(s)| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan uraian di atas, $S$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan ■

**Teorema 5.12** $dim_A(P_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** Misalkan $V(P_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}, E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\}$. Terdapat tiga kemungkinan nilai $n$ yang terjadi, yaitu $n = 2, n = 3$, atau $n \geq 4$.

**Kasus 1.** Untuk $n = 2$. Dipilih $W = \{v_1\}$. Karena $V(P_n) - W$ hanya memuat satu titik, maka berdasarkan Definisi $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2.2+2}{5} \right\rfloor = 1$.

**Kasus 2.** Untuk $n = 3$. Dipilih $W = \{v_1\}$. Terdapat titik $v_2, v_3 \in V(P_n) - W$. Karena $v_2 \in N(v_1)$ dan $v_3 \notin N(v_1)$ diperoleh $|\{v_2, v_3\} \cap N(v_1)| = |\{v_2\}| = 1$. Oleh karena itu, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2.3+2}{5} \right\rfloor = 1$.

**Kasus 3.** Untuk $n \geq 4$. Dipilih $W = \{v_2\} \cup \{v_{4+5(k-1)}: k \in \mathbb{N}, 4 + 5(k-1) \leq n\} \cup \{v_{7+5(k-1)}: k \in \mathbb{N}, 7 + 5(k-1) \leq n\}$. Diambil sebarang $x, y \in V(P_n) - W$ maka terdapat empat kemungkinan yaitu:

(i) Untuk $x = v_1$ dan $y \in \{v_3\} \cup \{v_p: p \neq 3\}$. Jika $y = v_3$, maka dipilih $v_4 \in W$ sehingga diperoleh $|\{v_1, v_3\} \cap N(v_4)| = |\{v_3\}| = 1$, sedangkan jika $y = v_p$ dengan $p \neq 3$, maka dipilih $v_2 \in W$. Karena $v_1 \in N(v_2)$ dan $v_p \notin N(v_2)$ maka $|\{v_1, v_p\} \cap N(v_2)| = |\{v_1\}| = 1$.

(ii) Untuk $x = v_3$ dan $y = v_q$ dengan $q \neq 1$. Dipilih $v_2 \in W$. Karena $v_3 \in N(v_2)$ dan $v_q \notin N(v_2)$ maka $|\{v_3, v_q\} \cap N(v_2)| = |\{v_3\}| = 1$.

(iii) Untuk $y \in \{v_{7+5(j-1)-1}: j \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{4+5(j-1)-1}: j = 2, 3, \dots\}$ dan $x = v_{4+5(k-1)+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Jika $y = v_{7+5(j-1)-1}, j \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{4+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{4+5(k-1)+1} \in N(v_{4+5(k-1)})$ dan $v_{7+5(j-1)-1} \notin N(v_{4+5(k-1)})$ maka $|\{v_{4+5(k-1)+1}, v_{7+5(j-1)-1}\} \cap N(v_{4+5(k-1)})| = |\{v_{4+5(k-1)+1}\}| = 1$. Jika $y = v_{4+5(j-1)-1}$ dengan $j = 2, 3, \dots$, maka dipilih $v_{7+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{4+5(k-1)-1} = v_{7+5(k-1)+1}$, maka $v_{4+5(k-1)-1} \in N(v_{7+5(k-1)})$ dan $v_{4+5(j-1)+1} \notin N(v_{7+5(k-1)})$. Oleh karena itu, $|\{v_{4+5(k-1)-1}, v_{4+5(j-1)+1}\} \cap N(v_{7+5(k-1)})| = |\{v_{4+5(k-1)-1}\}| = 1$.

(iv) Untuk $y \in \{v_{7+5(k-1)+1}: k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{4+5(k-1)-1}: k = 2, 3, \dots\}$ dan $x = v_{7+5(j-1)-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Jika $y = v_{7+5(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{4+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{7+5(k-1)+1} = v_{4+5(k-1)-1}$ maka $v_{7+5(k-1)+1} \in N(v_{4+5(k-1)})$ dan $v_{7+5(j-1)-1} \notin N(v_{4+5(k-1)})$. Oleh karena itu, $|\{v_{7+5(j-1)-1}, v_{7+5(k-1)+1}\} \cap N(v_{4+5(k-1)})| = |\{v_{7+5(k-1)+1}\}| = 1$. Selanjutnya, jika $y = v_{4+5(k-1)-1}$ dengan $k = 2, 3, \dots$, maka dipilih $v_{4+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{4+5(k-1)-1} \in N(v_{4+5(k-1)})$ dan $v_{7+5(j-1)-1} \notin N(v_{4+5(k-1)})$ maka $|\{v_{4+5(k-1)-1}, v_{7+5(j-1)-1}\} \cap N(v_{4+5(k-1)})| = |\{v_{4+5(k-1)-1}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian di atas, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(P_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Maka terdapat tiga kasus yaitu:

(i) Untuk $n = 2$ atau $n = 3$. $|W'| < |W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = 1$ maka $|W'| = 0$ dan $W' = \emptyset$. Berdasarkan Definisi maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

(ii) Untuk $4 \leq n < 7$, $|W'| < |W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = 2$ maka $|W'| = 1$. Misalkan $W' = \{v_t\}$ dengan $t = 1, 2, \ldots, n$. Maka terdapat dua titik $x, y \in V(P_n) - W'$ sehingga $|\{x, y\} \cap N(v_t)| = 0$ atau $|\{x, y\} \cap N(v_t)| = 2$. Oleh karena itu. $|\{x, y\} \cap N(v_t)| \neq 1$. Berdasarkan Definisi maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

(iii) Untuk $n \geq 7$, $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor > 2$ maka $|W'| \geq 2$. Terdapat tiga kemungkinan jarak antara anggota $W'$ yaitu jika $v_i, v_j \in W', i < j$ maka $d(v_i, v_j) \leq 2$, $2 < d(v_i, v_j) \leq 4$, atau $d(v_i, v_j) > 4$. Untuk $W'$ yang setiap dua titiknya berjarak kurang dari atau sama dengan dua, maka $W' = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Terdapat dua titik $x, y \in V(P_n) - W'$ sehingga untuk setiap $z \in W'$, $d(x, z) > 1$ dan $d(y, z) > 1$. Oleh karena itu, $|\{x, y\} \cap N(z)| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Untuk $W'$ yang setiap dua titiknya berjarak antara dua sampai empat, maka $W' = \{v_i, v_{i+3}\}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n-3$. Terdapat dua titik $x, y \in V(P_n) - W'$ sehingga untuk setiap $z \in W', x, y \in N(z)$ atau $x, y \notin N(z)$. Akibatnya, $|\{x, y\} \cap N(z)| = 0, 2$. Oleh karena itu, $|\{x, y\} \cap N(z)| \neq 1$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Selanjutnya, untuk $W'$ yang setiap dua titiknya berjarak lebih besar empat, berdasarkan Lemma 5.11 maka $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan.

Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan. Terbukti bahwa $dim_A(P_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ ∎

**Teorema 5.13** . $dim_A(C_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$, untuk $n \geq 4$.

**Bukti.** Misalkan $V(C_n) = \{v_i | i = 1, 2, \ldots, n\}, E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cap \{v_n v_1\}$. Terdapat dua kemungkinan nilai $n$ yang terjadi yaitu $n = 4$ atau $n \geq 5$.

**Kasus 1.** Untuk $n = 4$. Dipilih $W = \{v_1, v_2\}$. Terdapat titik $v_3, v_4 \in V(C_n) - W$. Karena $v_3 \in N(v_2)$ dan $v_4 \notin N(v_2)$ diperoleh $|\{v_3, v_4\} \cap N(v_2)| = |\{v_3\}| = 1$. Oleh karena itu, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $C$ dengan $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2.4+2}{5} \right\rfloor = 2$.

**Kasus 2.** Untuk $n \geq 5$. Dipilih $W = \{v_1, v_3\} \cup \{v_{7+5(k-1)} : k \in \mathbb{N},\ 7 + 5(k-1) \leq n\} \cup \{v_{9+5(k-1)} : k \in \mathbb{N},\ 9 + 5(k-1) \leq n\}$. Diambil sebarang $x, y \in V(C_n) - W$ maka terdapat enam kemungkinan yaitu:

(i) Untuk $x = v_2$ dan $y \in \{v_p : p \neq n\} \cup \{v_n\}$. Jika $y = v_p$ dengan $p \neq n$, maka dipilih $v_1 \in W$. Karena $v_2 \in N(v_1)$ dan $v_p \notin N(v_1)$ diperoleh $|\{v_2, v_p\} \cap N(v_1)| = |\{v_2\}| = 1$, sedangkan jika $y = v_n$, maka dipilih $v_3 \in W$. Karena $v_2 \in N(v_3)$ dan $v_n \notin N(v_3)$ diperoleh $|\{v_2, v_n\} \cap N(v_3)| = |\{v_2\}| = 1$.

(ii) Untuk $x = v_4$ dan $y = v_q$ dengan $q \neq 2$. Dipilih $v_3 \in W$. Karena $v_4 \in N(v_3)$ dan $v_p \notin N(v_3)$ diperoleh $|\{v_4, v_p\} \cap N(v_3)| = |\{v_4\}| = 1$.

(iii) Untuk $y \in \{v_{7+5(k-1)-1} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{7+5(k-1)+1} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{9+5(k-1)+1} : k \in \mathbb{N}\}$ dan $x = v_5$. Jika $y = v_{7+5(k-1)-1}, k \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{7+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{7+5(k-1)-1} \in N(v_{7+5(k-1)})$ dan $v_5 \notin N(v_{7+5(k-1)})$ diperoleh $|\{v_5, v_{7+5(k-1)-1}\} \cap N(v_{7+5(k-1)})| = |\{v_{7+5(k-1)-1}\}| = 1$.

Jika $y = v_{7+5(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{7+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{7+5(k-1)+1} \in N(v_{7+5(k-1)})$ dan $v_5 \notin N(v_{7+5(k-1)})$ diperoleh $|\{v_5, v_{7+5(k-1)+1}\} \cap N(v_{7+5(k-1)})| = |\{v_{7+5(k-1)+1}\}| = 1$. Selanjutnya, jika $y = v_{9+5(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{9+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{9+5(k-1)+1} \in N(v_{9+5(k-1)})$ dan $v_5 \notin N(v_{9+5(k-1)})$ diperoleh $|\{v_5, v_{9+5(k-1)+1}\} \cap N(v_{9+5(k-1)})| = |\{v_{9+5(k-1)+1}\}| = 1$.

(iv) Untuk $y = \{v_{7+5(k-1)+1} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_{9+5(k-1)+1} : k \in \mathbb{N}\}$ dan $x = v_{7+5(j-1)-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Jika $y = v_{7+5(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$. maka dipilih $v_{9+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{9+5(k-1)-1} = v_{7+5(k-1)+1}$ maka $v_{7+5(k-1)+1} \in N(v_{9+5(k-1)})$ dan $v_{7+5(j-1)-1} \notin N(v_{9+5(k-1)})$. Diperoleh $|\{v_{7+5(j-1)-1}, v_{7+5(k-1)+1}\} \cap N(v_{9+5(k-1)})| = |\{v_{7+5(k-1)+1}\}| = 1$. Jika $y = v_{9+5(k-1)+1}, k \in \mathbb{N}$, maka dipilih $v_{9+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{9+5(k-1)+1} \in N(v_{9+5(k-1)})$ dan $v_{7+5(j-1)-1} \notin N(v_{9+5(k-1)})$ diperoleh $|\{v_{7+5(j-1)-1}, v_{9+5(k-1)+1}\} \cap N(v_{9+5(k-1)})| = |\{v_{9+5(k-1)+1}\}| = 1$.

(v) Jika $x = v_{9+5(k-1)-1}$ dan $y = v_{9+5(j-1)+1}$ dengan $j, k \in \mathbb{N}$. Dipilih $v_{7+5(k-1)} \in W$. Karena $v_{7+5(k-1)+1} = v_{9+5(k-1)-1}$ maka $v_{9+5(k-1)-1} \in N(v_{7+5(k-1)})$ dan $v_{9+5(j-1)+1} \notin N(v_{7+5(k-1)})$ diperoleh $|\{v_{9+5(k-1)-1}, v_{9+5(j-1)+1}\} \cap N(v_{7+5(k-1)})| = |\{v_{9+5(k-1)-1}\}| = 1$.

(vi) Jika $x = v_n$ dan $y = v_s$, $s \neq 2$. Dipilih $v_1 \in W$. Karena $v_n \in N(v_1)$ dan $v_s \notin N(v_1)$ diperoleh $|\{v_n, v_s\} \cap N(v_1)| = |\{v_n\}| = 1$.

Berdasarkan uraian di atas, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $C_n$ dengan $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(C_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Maka terdapat dua kasus yaitu:

(i) Untuk $4 \leq n < 7$, $|W'| < |W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor = 2$ maka $|W'| = 1$. Misalkan $W' = \{v_t\}$ dengan $t = 1, 2, \ldots, n$. Maka terdapat dua titik $x, y \in V(P_n) - W'$ sehingga $|\{x, y\} \cap N(v_t)| = 0$ atau $|\{x, y\} \cap N(v_t)| = 2$. Oleh karena itu, $|\{x, y\} \cap N(v_t)| \neq 1$.

(ii) Untuk $n \geq 7$, $|W| = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor > 2$ maka $|W'| \geq 2$. Terdapat $v_i, v_j \in W'$ dengan $i < j$, $l(v_i - v_j) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.11 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan.

Berdasarkan uraian di atas, $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan. Terbukti bahwa $dim_A(C_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ ■

**Teorema 5.14** $dim_A(H) = n - 1$ jika dan hanya jika $H \cong K_n$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** ($\Leftarrow$) Misalkan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(K_n) = \{v_i v_j | i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j\}$ dengan $n \geq 2$ dan $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ sehingga $|W| = n - 1$. Karena tidak terdapat pasangan titik $x, y \in V(K_n) - W$, maka $W$ adalah himpunan pembeda ketetanggaan.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(K_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Terdapat tiga kasus yaitu:

(i) Untuk $n = 2$, $|W'| < |W| = n - 1 = 1$ sehingga diperoleh $|W'| = 0$ dan $W' = \emptyset$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

(ii) Untuk $n = 3$, $|W'| < |W| = n - 1 = 2$ sehingga diperoleh $|U| = 1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti misalkan $W' = \{v_1\}$. Karena pasangan titik $v_2, v_3 \in V(K_n) - W'$ dan $|\{v_2, v_3\} \cap N(v_1)| = 2 \neq 1$, maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

(iii) Untuk $n > 3$, untuk setiap $v_i \in W'$maka untuk setiap pasangan titik $v_p, v_q \in V(K_n) - W'$, $v_p, v_q \in N(v_i)$ sehingga $|\{v_p, v_q\} \cap N(v_i)| = 2 \neq 1$. Berdasarkan Definisi maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

Oleh karena itu $W$ merupakan basis ketetanggaan. Terbukti bahwa $dim_A(K_n) = n - 1$.

($\Longrightarrow$) Misalkan $dim_A(H) = n - 1$, andaikan $H \ncong K_n$, maka terdapat $v_1, v_n \in V(H)$ dengan $v_1, v_n \notin E(H)$. Dipilih $W = \{v_1\} \cup \{v_i : i = 1, 2, \ldots, m - 2\}$. Terdapat dua titik $v_n, v_{n-1}$ $V(H) - W$. Karena $v_n \in N(v_1)$ dan $v_{n-1} \notin N(v_1)$ . maka $|\{v_n, v_{n-1}\} \cap N(v_1)| = 1$. Berdasarkan Definisi

$W$ adalah himpunan pembeda ketetanggaan, diperoleh $|W| = n - 2$. Hal ini kontradiksi dengan $dim_A(H) = n - 1$.

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa $dim_A(H) = n - 1$ jika dan hanya jika $H \cong K_n$, untuk $n \geq 2$■

**Teorema 5.15** $dim_A(S_n) = n - 1$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** Misalkan $V(S_n) = \{v_i | i = 0,1,2,\dots,n\}$, $E(S_n) = \{v_0 v_i \mid i = 1,2,3,\dots,n\}$, dan $\deg(v_0) = n$. Misalkan $v_p$ sebarang elemen dari $\{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$ dan $W = \{v_i | i = 1,2,\dots,n \ , i \neq p\}$. Diambil sebarang $x, y \in V(S_n) - W$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, $x = v_0$ dan $y = v_p$. Dipilih $v_i \in W$. Karena $N(v_i) = \{v_0\}$, maka $|\{v_0, v_p\} \cap N(v_i)| = |\{v_0\}| = 1$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $S_n$.

Misalkan $U \subseteq V(S_n)$ dengan $v_0 \in U$. Karena $v_1, v_2 \in V(S_n) - U$ dan $|\{v_1, v_2\} \cap N(v_0)| = 2 \neq 1$ maka $U$ bukan himpunan pembeda. Selanjutnya, misalkan $v_q$ sebarang elemen dari $W$ dan $W' = \{v_i \in W | \ i \neq q\}$. Karena $v_p, v_q \in V(S_n) - W'$ maka $|\{v_p, v_q\} \cap N(v_i)| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan. Terbukti bahwa $dim_A(S_n) = n - 1$■

**Teorema 5.16** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$. Jika $m \geq 3$, maka

$$dim_A(GoK_m) = |V(G)| \ (dim_A(K_m) - 1) + \gamma(G)$$

**Bukti.** Misalkan $D = \{v_{n_k} | k = 1,2,\dots,\gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik hasil kali *comb*, $D_1 = \{v_{n_k 1} | k = 1,2,\dots,\gamma(G)\} \subseteq B$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 5.12, himpunan $W_i = \{v_{ij} | \ j = 1,2,\dots,m-1\}$ merupakan basis metrik ketetanggaan graf $K_{m(i)}$ dengan $i = 1,2,\dots,n$. Misalkan $W = D_1 \cup_{i=1}^{n} (W_i - v_{i1})$.

Diambil sebarang dua titik $x, y \in V(GoK_m) - W$. Terdapat tiga kemungkinan pasangan titik tersebut, yaitu $x = v_{p1}$ dan $y = v_{q1}$ dengan $p, q \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$, $x = v_{p1}$ dan $y = v_{pm}$ dengan $p \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$, atau $x = v_{pm}$ dan $y = v_{qm}$ dengan $p \neq q$.

(i) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{q1}$ dengan $p, q \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Dipilih $W = \{v_{p2}\}$. Karena $v_{p1} \in N(v_{p2})$ dan $v_{q1} \notin N(v_{p2})$ maka $|N(v_{p2}) \cap \{v_{p1}, v_{q1}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

(ii) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{pm}$ dengan $p \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Karena $D_1$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k1} \in D_1$ sehingga $d(v_{n_k1}, v_{p1}) = 1$. Sehingga $v_{p1} \in N(v_{n_k1})$ dan $v_{pm} \notin N(v_{n_k1})$ maka $|N(v_{n_k1}) \cap \{v_{p1}, v_{pm}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

(iii) Jika $x = v_{pm}$ atau $x = v_{qm}$ dengan $p \neq q$. Dipilih $W = \{v_{p2}\}$. Karena $v_{pm} \in N(v_{p2})$ dan $v_{qm} \notin N(v_{p2})$ maka $|N(v_{p2}) \cap \{v_{pm}, v_{qm}\}| = |\{v_{pm}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian di atas, maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $GoK_m$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $GoK_m$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoK_m)$, $|W'| < |W|$. Misalkan $W' = D' \cup W^*$, terdapat dua kemungkinan yaitu $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\bigcup_{i=1}^{n}(W_i - \{v_{i1}\})|$ atau $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < |W_i - \{v_{i1}\}|$.

(i) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\bigcup_{i=1}^{n}(W_i - \{v_{i1}\})|$. Karena $D'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal terdapat titik $v_{p1} \in B$ maka $d(v_{n_k1}, v_{p1}) > 1, v_{n_k1} \in D'$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Terdapat dua titik $v_{p1}, v_{ph} \in V(GoK_m) - W', h \in \{2, 3, \dots, m\}$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

   a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k1}$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Karena $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{n_k1})$. Sehingga $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{n_k1})| = 0 \neq 1$.

   b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{it}$ dengan $t \in \{2, 3, \dots, m\}$ dan $t \neq h$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$ dan jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{it})$ dengan $i = p$. Jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$ maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 0 \neq 1$. Sedangkan, jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{it})$ dengan $i = p$ maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 2 \neq 1$.

(ii) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < |W_i - \{v_{i1}\}|$. Maka terdapat $H_i$ sehingga maksimal $|W_i - \{v_{i1}\}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $H_1$ sehingga maksimal $|W_1 - \{v_{11}\}| - 1$ yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya, terdapat dua titik $v_{12}, v_{13} \in$

$V(GoK_m) - W'$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k 1}, k = 1, 2, \dots, \gamma(G)$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{n_k 1})$ untuk $n_k \neq 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{n_k 1})| = 0 \neq 1$ atau $v_{12}, v_{13} \in N(v_{n_k 1})$ untuk $n_k = 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(w)| = 2 \neq 1$.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{zt}$ dengan $t \neq 2$ dan $t \neq 3$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $z \neq 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 0 \neq 1$ atau $v_{12}, v_{13} \in N(v_{zt})$ untuk $z = 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 2 \neq 1$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa jika terdapat $v_{ip} \in W_i - \{v_{i1}\}$ atau terdapat $v_{n_k 1} \in D_1$ yang tidak menjadi anggota $W$, maka $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan. Oleh karena itu. $W$ merupakan basis ketetanggaan dengan $dim_A(GoK_m) = |V(G)|\,(dim_A(K_m) - 1) + \gamma(G)$ ■

**Teorema 5.17** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$. Jika $m \geq 2$, maka

$$dim_A(GoS_m) = \left(|V(G)|\, dim_A(S_m)\right) - 1 + \gamma(G)$$

dengan titik cangkok o bukan merupakan titik dominan pada graf $S_m$.

**Bukti.** Misalkan $D = \{v_{n_k} | k = 1,2, \dots, \gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik hasil kali *comb*, $D_1 = \{v_{n_k 1} | k = 1,2, \dots, \gamma(G)\} \subseteq B$. Karena berdasarkan Teorema 5.15 maka dipilih $W_i = \{v_{i0}\} \cup \{v_{ij} : j = 2,3, \dots, m-1\}$ merupakan basis metrik ketetanggaan graf $S_{m(i)}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Misalkan $W = D_1 \cup_{i=1}^{n} W_i - v_{n_t 0}$ dengan $t \in \{1,2, \dots, \gamma(G)\}$.

Diambil sebarang dua titik $x, y \in V(GoS_m) - W$. Terdapat tiga kemungkinan pasangan titik tersebut, yaitu (i) $x, y \in B$ (ii) $x \in B$ dan $y \in V(S_{m(i)})$, dan (iii) $x, y \in V(S_{m(i)})$.

(i) Jika $x, y \in B$, maka terdapat $x = v_{p1}$ dan $= v_{q1}$ , $p \neq q$. Dipilih $v_{p0} \in W$. Karena $v_{p1} \in N(v_{p0})$ dan $v_{q1} \notin N(v_{p0})$ maka $|\{v_{p1}, v_{q1}\} \cap N(v_{p0})| = |v_{p1}| = 1$.

(ii) Jika $x \in B$ dan $y \in V(S_{m(i)})$, maka terdapat $x = v_{p1}$ dan $y = v_{pm}$, $x = v_{p1}$ dan $y = v_{qm}$ dengan $p \neq q$, atau $x = v_{p1}$ dan $y = v_{n_t 0}$ dengan $t \in \{1,2, \dots, \gamma(G)\}$. Karena $D_1$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k 1} \in D_1$ sehingga $d(v_{n_k 1}, v_{p1}) = 1$.

Karena $v_{p1} \in N(v_{n_k1})$ dan $v_{pm}, v_{qm} \notin N(v_{n_k1})$ diperoleh $|\{v_{p1}, v_{pm}\} \cap N(v_{n_k1})| = |\{v_{p1}\}| = 1$ atau $|\{v_{p1}, v_{qm}\} \cap N(v_{n_k1})| = |\{v_{p1}\}|$. Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{n_t0}$ dengan $t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$, maka dipilih $v_{p0} \in W$. Karena $v_{p1} \in N(v_{p0})$ dan $v_{n_t0} \notin N(v_{p0})$, maka $|\{v_{p1}, v_{n_t0}\} \cap N(v_{p0})| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

(iii) Jika $x, y \in V(S_{m(l)})$, maka $x = v_{pm}$ dan $y = v_{qm}$ atau $x = v_{pm}$ dan $y = v_{n_t0}$ dengan $v_{n_t0} \notin W_i$. Dipilih $v_{p0} \subset W$. Karena $v_{pm} \in N(v_{p0})$ dan $v_{qm} \notin N(v_{p0})$ diperoleh $|\{v_{pm}, v_{qm}\} \cap N(v_{p0})| = |\{v_{pm}\}| = 1$ atau $|\{v_{pm}, v_{n_t0}\} \cap N(v_{p0})| = |\{v_{pm}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $GoS_m$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan graf $GoS_m$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoS_m)$, $|W'| < |W|$. Misalkan $W' = D' \cup W^*$, terdapat dua kemungkinan yaitu $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\bigcup_{i=1}^{n} W_i - v_{n_t0}|, t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$ atau $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < |\bigcup_{i=1}^{n} W_i - v_{n_t0}|, t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$.

(i) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\bigcup_{i=1}^{n} W_i - v_{n_t0}|, t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$. Karena $D'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal terdapat titik $v_{p1} \in B$ maka $d(v_{n_k1}, v_{p1}) > 1, v_{n_k1} \in D'$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Terdapat dua titik $v_{p1}, v_{ph} \in V(GoK_m) - W', h \in \{2,3,\dots,m\}$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k1}$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Karena $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{n_k1})$. Sehingga $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{n_k1})| = 0 \neq 1$.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{it}$ dengan $t \in \{0\} \cup \{2,3,\dots,m\}$ dan $t \neq h$ maka terdapat tiga kemungkinan yaitu jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$, jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{i0})$ dengan $i = p$, dan jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i = p$ dan $t \neq 0$. Jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$, maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 0 \neq 1$. Jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{i0})$ dengan $i = p$, maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 2 \neq 1$. Sedangkan, jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i = p$ dan $t \neq 0$, maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 0 \neq 1$.

(ii) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < |\bigcup_{i=1}^{n} W_i - v_{n_t0}|, t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$. Maka terdapat dua kemungkinan yaitu jika terdapat $H_i$

sehingga maksimal $|W_i - v_{n_t0}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$ dengan $t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$ atau jika terdapat $H_j$ sehingga maksimal $|W_j| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Terdapat $H_i$ sehingga maksimal $|W_i - v_{n_t0}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$ dengan $t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $H_1$ sehingga maksimal $|W_1 - v_{10}| - 1$ yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya, terdapat dua titik $v_{12}, v_{13} \in V(GoS_m) - W'$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k1}, k = 1,2,\dots,\gamma(G)$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{n_k1})$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{n_k1})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi$D'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{zt}$ dengan $t \neq 2$ dan $t \neq 3$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $z \neq 1$, $v_{12}, v_{13} \in N(v_{z0})$ untuk $z = 1$, atau $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $t \neq 0$, maka $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 0 \neq 1$ atau $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{z0})| = 2 \neq 1$. Oleh karena itu, $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| \neq 1$. Berdasarkan Definisi $W^*$bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

Sedangkan, jika terdapat $H_j$ sehingga maksimal $|W_j| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $H_1$ sehingga maksimal $|W_1| - 1$ yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya, terdapat dua titik $v_{12}, v_{13} \in V(GoS_m) - W'$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k1}, k = 1,2,\dots,\gamma(G)$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{n_k1})$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{n_k1})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi $D'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{zt}$ dengan $t \neq 2$ dan $t \neq 3$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $z \neq 1$, $v_{12}, v_{13} \in N(v_{z0})$ untuk $z = 1$, atau $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $t \neq 0$, maka $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 0 \neq 1$ atau $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{z0})| = 2 \neq 1$. Oleh karena itu, $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| \neq 1$. Berdasarkan Definisi $W^*$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa jika terdapat $v_{ip} \in W_i - v_{n_t0}, t \in \{1,2,\dots,\gamma(G)\}$ atau terdapat $v_{n_k1} \in D_1$ yang tidak menjadi anggota $W$, maka $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan dengan $dim_A(GoS_m) = (|V(G)|\, dim_A(S_m)) - 1 + \gamma(G)$ ∎

**Teorema 5.18** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan $B$ dari $H$ dan merupakan himpunan dominasi, dan jika untuk setiap $v \in V(H) - B$ yang memenuhi $B \not\subseteq N_H(v)$, maka

$$dim_A(G \odot H) = n.\,dim_A(H).$$

**Bukti.** Misalkan $B_i$ adalah basis dari $H_i$.

Pilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ Diambil sebarang dua titik $x, y \in V(G \odot H) - W$ maka terdapat empat kemungkinan yaitu ( i ) $x, y \in V(H_i)$ ( ii ) $x \in V(H_i)$ dan $y \in V(H_j)$ dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \{1,2,3, \dots, n\}$, ( iii ) $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$, dan ( iv ) $x, y \in V(G_0)$.

( i ) Misalkan $x, y \in V(H_i)$. Karena $B_i$ adalah basis ketetanggaan dari $H_i$, terdapat $t \in S_i$ sehingga $tx \in E(G \odot H)$ dan $ty \notin E(G \odot H)$ atau $tx \notin E(G \odot H)$ dan $ty \in E(G \odot H)$ maka $|N(u_i) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

( ii ) Misalkan $x \in V(H_i)$ dan $y \in V(H_j)$ dengan $i \neq j$. Karena $B_i$ adalah himpunan dominasi dari $H_i$, terdapat $t \in S_i$ sehingga $tx \in E(G \odot H)$ dan $ty \notin E(G \odot H)$ maka $|N(t) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

( iii ) Misalkan $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$. Terdapat $t \in S_i$ sehingga $tx \notin E(G \odot H)$ dan $ty \in E(G \odot H)$ maka $|N(t) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

( iv ) Misalkan $x, y \in V(G_0)$. Terdapat $i, j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ dengan $i \neq j$ sehingga $x = v_i$ dan $y = v_j$. Dipilih $t \in B_i$. Karena $tv_i \in E(G \odot H)$ dan $tv_j \notin E(G \odot H)$ maka $|N(t) \cap \{v_i, v_j\}| = |N(t) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G \odot H$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G \odot H$ dengan kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$, maka terdapat $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$, sehingga $x \in B_i$. Akan ditunjukkan bahwa $W \backslash \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetangaan. Karena $B_i$ adalah basis dari $H_i$, maka $B_i \setminus \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan dari $H_i$. Akibatnya terdapat dua titik $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $r \neq t$ sehingga untuk setiap $s \in B_i \setminus \{x\}$, $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$. Diambil sebarang $s \in W \setminus \{x\}$. Karena $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ maka $v_{ir}, v_{it} \in V(G \odot H) - W \setminus \{x\}$. Terdapat dua kemungkinan $s \in B_i \setminus \{x\}$ atau $s \in B_j$ dengan $j \neq i$.

1) Misalkan $s \in B_i \setminus \{x\}$, berdasarkan uraian sebelumnya $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$.
2) Misalkan $s \in B_j$ dan $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $i \neq j$, maka $|N(s) \cap \{v_{i_r}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan kasus di atas, diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan dengan $dim_A(G \odot H) = n.\, dim_A(H)$.

**Teorema 5.19** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan dari $H$ yang merupakan himpunan dominasi, untuk setiap basis ketetanggaan $B$ di $H$ terdapat $v \in V(H) - B$ yang memenuhi $B \subseteq N_H(v)$, maka

$$dim_A(G \odot H) = n.\, dim_A(H) + \gamma(G).$$

**Bukti.** Misalkan $B_i$ adalah sebarang basis ketetanggaan lokal dari $H_i$. $D = \{v_{n_k} | k = 1,2,3, \dots, \gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik-titik hasil kali korona, $D_0 = \{v_{n_k 0} | k = 1,2,3, \dots, \gamma(G)\} \subseteq G_0$.

Pilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \cup D_0$. Diambil sebarang dua titik $x, y \in V(G \odot H) - W$ maka terdapat tiga kemungkinan yaitu ( i ) $x \in V(H_i)$ dan $y \in V(H_i)$ dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \{1,2,3, \dots, n\}$, ( ii ) $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$ dengan $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$, dan ( iii ) $x, y \in V(G_0)$.

( i ) Misalkan $x \in V(H_i)$ dan $y \in V(H_j)$ terdadat $i, j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ dan $r, s \in \{1,2,3, \dots, m\}$ dengan $i \neq j$ dan $r \neq s$ sehingga $x = v_{ir}$ dan $y = v_{js}$. Terdapat $v_{it} \in W$ sehingga $v_{it}v_{ir} \in E(G \odot H)$ dan $v_{it}v_{js} \notin E(G \odot H)$ maka $|N(v_{it}) \cap \{v_{ir}, v_{js}\}| = |N(v_{it}) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

( ii ) Misalkan $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$ dengan $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$. Terdapat $v_{n_k 0} \in D_0$ sehingga $v_{n_k 0}x \in E(G \odot H)$ dan $\notin E(G \odot H)$ sehingga $|N(v_{n_k 0}) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

( iii ) Misalkan $x, y \in V(G_0)$ maka terdapat $i, j \notin \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{\gamma(G)}\}$ dengan $i \neq j$ sehingga $x = v_i$ dan $y = v_j$. Dipilih $v_{n_k 0} \in D_0$. Karena $v_{n_k 0}v_i \in E(G \odot H)$ dan $v_{n_k 0}v_j \notin E(G \odot H)$ maka $|N(v_{n_k 0}) \cap \{v_i, v_j\}| = |N(v_{n_k 0}) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan di $W$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G \odot H$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G \odot H$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$. Akan ditunjukkan bahwa $W \setminus \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Terdapat dua kemungkinan yaitu terdapat $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$, sehingga $x \in B_i$ atau $x \in D_0$.

(i) Misalkan terdapat $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$, sehingga $x \in B_i$. Karena $B_i$ adalah basis dari $H_i$, maka $B_i \setminus \{x\}$ bukan himpunan pembeda dari $H_i$. Akibatnya terdapat dua titik $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $r \neq t$ sehingga untuk setiap $u \in B_i \setminus \{x\}$, $|N(u) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$. Diambil sebarang $s \in W \setminus \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan, yaitu $s \in B_i \setminus \{x\}$, $s \in B_j$ dengan $j \neq i$ atau $s \in D_0$.

  a. Misalkan $s \in B_i \setminus \{x\}$, berdasarkan kasus di atas maka $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$.

  b. Misalkan $s \in B_j$. Karena $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $i \neq j$, maka $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$.

  c. Misalkan $s \in D_0$, maka terdapat $k \in \{1,2,3,\dots,\gamma(G_0)\}$ sehingga $s = v_{p_k 0}$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $p_k \neq i$ atau $p_k = i$. Untuk $p_k \neq i$ diperoleh bahwa $|N(v_{p_k 0}) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$ sebab $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$, sedangkan untuk $p_k = i$ diperoleh bahwa $|N(v_{p_k 0}) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Misalkan $x \in D_0$. Karena $D_0$ adalah himpunan dominasi dari $G_0$, maka $D_0 \setminus \{x\}$ bukan himpunan dominasi minimal dari $G_0$. Ada $u \in G_0$, sehingga untuk setiap $z \in D_0 \setminus \{x\}$, $z$ tidak bertetangga dengan $u$. Karena $u \in G_0$, maka terdapat $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ sehingga $u = v_{i0}$. Dipilih $y \in V(H_i) - B_i$. Berdasarkan pemilihan $u$ dan $y$ diperoleh bahwa $u, y \in V(G \odot H) - W \setminus \{x\}$. Diambil sebarang $s \in W \setminus \{x\}$. Terdapat dua kemungkinan, yaitu $s \in D_0 \setminus \{x\}$ atau $s \in B_i$.

  a. Misalkan $s \in D_0 \setminus \{x\}$. Berdasarkan pemilihan $u$ dan $y$ diperoleh $|N(s) \cap \{x, y\}| = 0 \neq 1$.

  b. Misalkan $s \in B_i$. Berdasarkan pemilihan $u$ diperoleh $us \in E(G \odot H)$, sedangkan $ys \in E(G \odot H)$ sebab $B_i$ merupakan basis dari $H_i$. Oleh karena itu $|N(s) \cap \{v_i, v_{ij}\}| = 2 \neq 1$.

Berdasarkan kasus di atas, diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan dengan ketetanggaan lokal dengan $dim_A(G \odot H) = n.dim_A(H) + \gamma(G)$.

**Teorema 5.20** Jika $G$ merupakan sebarang graf terhubung dengan ordo $n \geq 2$, maka

$$dim_A(G \odot_k S_m) = k.n.\, dim_A(S_m) + k.n - 1$$

**Bukti:** Misalkan $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $V(S_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, dengan deg $v_m = m - 1$. Misalkan $S_{m_{il}}$ adalah salinan dari graf $S_m$ ke-$il$, maka

$V(S_{m_{il}}) = \{v_{ilj} | j = 1,2, \dots, m\}$, dengan $i = 1,2, \dots, n, l = 1,2, \dots, k$.

$V(G \odot_k S_m) = V(I) \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{k} V(S_{m_{il}})$,

$E(G \odot_k S_m) = E(G) \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{k} E(S_{m_{il}}) \cup \{u_i v_{ilj} \mid u_i \in V(I), v_{ilj} \in V(S_{m_{il}})\}$, dan $dim_A(S_m) = m - 2$. Dipilih $B = \{v_{100}, v_{200}, \dots, v_{(n-1)00}\}$ dan $S_{il} = \{v_{il1}, v_{il2}, \dots, v_{il(m-2)}\}$ adalah basis metrik ketetanggaan graf $S_{m_{il}}$. Maka dipilih $W = B \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{l=1}^{k} S_{il} \bigcup_{l=1}^{k-1}\{v_{il(m-1)}\})$, sehingga $|W| = k.n.\, dim_A(S_m) + k.n - 1$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $W$ pembeda ketetanggaan graf $G \odot_k S_m$. Diambil sebarang dua titik berbeda $x, y \in V(G \odot_k S_m) - W$, maka terdapat empat kemungkinan pasangan titik yaitu (i) $x, y \in V(S_{m_{il}}) - W$, (ii) $x \in V(I) - W$ dan $y \in V(S_{m_{il}}) - W$, (iii) $x \in V(S_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(S_{m_{ik}}) - W$, dengan $l \neq k$, dan (iv) $x \in V(Sm_{il}) - W$ dan $y \in V(S_{m_{jk}}) - W$, dengan $i \neq j$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tiap kemungkinan pasangan titik tersebut mempunyai pembeda ketetanggaan di $W$.

(i) Untuk $x, y \in V(S_{m_{il}}) - W$, maka $x = v_{ilm}$ dan $y = v_{il(m-1)}$. Dipilih $v_{il1} \in W$ maka $v_{il1} v_{ilm} \in E(G \odot_k S_m)$, karena $v_{ilm}$ merupakan titik dominan. Tetapi $v_{il1} v_{il(m-1)} \notin E(G \odot_k S_m)$ sehingga $|N_G(v_{il1}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{il1}) \cap \{v_{ilm}, v_{il(m-1)}\}| = |\{v_{ilm}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(ii) Untuk $x \in V(I) - W$ dan $y \in V(S_{m_{il}}) - W$, maka $x = v_{s00}$ dan $y = v_{ilj}$. Terdapat dua kemungkinan yang terjadi yaitu $s = i$ atau $s \neq i$.

- Untuk $s = i$, maka $x = v_{s00} = v_{i00}$ dan $y = v_{ilj}$. Karena $G$ graf terhubung maka terdapat $v_{t00} \in W$ dengan $v_{t00} v_{s00} \in (G \odot_k S_m)$, tetapi $v_{t00} v_{ilj} \notin E(G \odot_k S_m)$ sehingga $|N_G(v_{t00}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{t00}) \cap \{v_{s00}, v_{ilj}\}| = |\{v_{s00}\}| = 1$.

- Untuk $s \neq i$, maka $x = v_{s00} \neq v_{i00}$ dan $y = v_{ilj}$. Dipilih $v_{sfg} \in W$ maka $v_{sfg}v_{s00} \in E(G\odot_k S_m)$, tetapi $v_{s00}v_{ilj} \notin E(G\odot_k S_m)$ sehingga $|N_G(v_{sfg}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{sfg}) \cap \{v_{s00}, v_{ilj}\}| = |\{v_{s00}\}| = 1$.

Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iii) Untuk $x \in V(S_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(S_{m_{ik}}) - W$, dengan $l \neq k$, maka $x = v_{ilm}$ dan $y = v_{ikj}$. Dipilih $v_{ilt} \in W$ maka $v_{ilt}v_{ilm} \in E(G\odot_k S_m)$, karena $v_{ilm}$ merupakan titik dominan, tetapi $v_{ilt}v_{ikj} \notin E(G\odot_k S_m)$ sehingga $|N_G(v_{ilt}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{ilt}) \cap \{v_{ilm}, v_{ikj}\}| = |\{v_{ilm}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iv) Untuk $x \in V(S_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V\left(S_{m_{jk}}\right) - W$, dengan $i \neq j$, maka $x = v_{ilg}$ dan $y = v_{jkh}$. Dipilih $v_{i00} \in W$ maka $v_{i00}v_{ilg} \in E(G\odot_k S_m)$, tetapi $v_{i00}v_{jkh} \notin E(G\odot_k S_m)$ sehingga $|N_G(v_{i00}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{i00}) \cap \{v_{ilg}, v_{jkh}\}| = |\{v_{ilg}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G\odot_k S_m$ dengan kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$. Maka terdapat tiga kemungkinan yaitu 1) Terdapat $t \in \{1,2,\dots,n-1\}$ sehingga $x = v_{t00}$, 2) Terdapat $r \in \{1,2,\dots,k-1\}$ sehingga $x = v_{ir(m-1)}$, dan 3) Terdapat $b \in \{1,2,\dots,m-2\}$ sehingga $x = v_{ilb}$. Akan ditunjukkan bahwa $W - \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan.

3) Misalkan terdapat $t \in \{1,2,\dots,n-1\}$ sehingga $x = v_{t00}$. Dipilih pasangan titik $v_{tlj}, v_{nlj} \in V(G\odot_k S_m) - \{W - \{x\}\}$ dengan $t \neq n$. Diambil sebarang $v_s \in W - \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:
   (i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ dan $t \neq i$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
   (ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, dengan $v_s = v_{il(m-1)}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
   (iii) Jika terdapat $j \in \{1,2,\dots,m-2\}$, dengan $v_s = v_{ilj}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
4) Misalkan terdapat $r \in \{1,2,\dots,k-1\}$ sehingga $x = v_{ir(m-1)}$. Dipilih pasangan titik $v_{ir(m-1)}, v_{ih(m-1)} \in V(G\odot_k S_m) - \{W - \{x\}\}$ dengan $r \neq h$. Diambil sebarang $v_s \in W - \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:

(i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-1)}, v_{il(m-1)}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, dengan $v_s = v_{il(m-1)}$, dengan $l \neq r$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-1)}, v_{ih(m-1)}\}| = 0 \neq 1$.

(iii)Jika terdapat $j \in \{1,2,\dots,m-2\}$, dengan $v_s = v_{ir(m-1)}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-1)}, v_{ih(m-1)}\}| = 0 \neq 1$.

5) Misalkan terdapat $b \in \{1,2,\dots,m-2\}$ sehingga $x = v_{ilb}$. Dipilih pasangan titik $v_{ilb}, v_{ilp} \in V(G\odot_k S_m) - \{W - \{x\}\}$ dengan $b \neq p$. Diambil sebarang $v_s \in W$ - $\{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:

(i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, dengan $v_s = v_{il(m-1)}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 0 \neq 1$.

(iii)Jika terdapat $j \in \{1,2,\dots,m-2\}$, dengan $v_s = v_{ilb}$, dengan $b \neq j$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan uraian diatas, $W - \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan minimal atau basis dari graf $G\odot_k S_m$. Jadi $dim_A(G\odot_k S_m) = |W| = k.n.\,dim_A(S_m) + k.n - 1$.

**Teorema 5.21** Jika $G$ merupakan sebarang graf terhubung dengan ordo $n \geq 2$, dan $P_m$ dengan ordo $m = 5a + 1$ atau $m = 5a + 3$, $a \in \mathbb{N}$, maka

$$dim_A(G\odot_k P_m) = k.n.\,dim_A(P_m) + k.n - 1$$

**Bukti**: Misalkan $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V(P_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Misalkan $P_{m_{il}}$ adalah salinan dari graf $P_m$ ke-$il$, maka $V(P_{m_{il}}) = \{v_{ilj} | j = 1,2,\dots,m\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n, l = 1,2,\dots,k$. $V(G\odot_k P_m) = V(I) \cup_{i=1}^{n} \cup_{l=1}^{k} V(P_{m_{il}})$, $E(G\odot_k P_m) = E(G) \cup_{i=1}^{n} \cup_{l=1}^{k} E(P_{m_{il}}) \cup \{u_i v_{ilj} \mid u_i \in V(I), v_{ilj} \in V(P_{m_{il}})\}$. dan $dim_A(P_m) = \left\lfloor \frac{2m+2}{5} \right\rfloor$. Dipilih $B = \{v_{100}, v_{200}, \dots, v_{(n-1)00}\}$ dan

$$S_{il} = \begin{cases} \{v_{il2}\} \cup \{v_{il(4+5(p-1))}: p \in \mathbb{N}, 4+5(p-1) \le m\} \cup \{v_{il(7+5(p-1))}: p \in \mathbb{N}, 7+5(p-1) < m-1\} \\ \qquad \cup \{v_{ilm}\}, \quad untuk\ m = 5a+3, a \in \mathbb{N} \\ \{v_{il2}\} \cup \{v_{il(4+5(p-1))}: p \in \mathbb{N}, 4+5(p-1) \le m\} \cup \{v_{il(7+5(p-1))}: p \in \mathbb{N}, 7+5(p-1) \le m\}, \\ \qquad untuk\ m = 5a+1, a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

adalah basis metrik ketetanggaan graf $P_{m_{il}}$.

Maka dipilih $W = B \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{l=1}^{k} S_{il} \bigcup_{l=1}^{k-1} \{v_{il(m-1)}\})$, sehingga $|W| = k.n.\ dim_A(P_m) + k.n - 1$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $W$ pembeda ketetanggaan graf $G \odot_k P_m$. Diambil sebarang dua titik berbeda $x, y \in V(G \odot_k P_m) - W$, maka terdapat empat kemungkinan pasangan titik yaitu (i) $x \in V(I) - W$ dan $y \in V(P_{m_{il}}) - W$, (ii) $x, y \in V(P_{m_{il}}) - W$, (iii) $x \in V(P_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(P_{m_{it}}) - W$, dengan $l \ne t$, atau (iv) $x \in V(P_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(P_{m_{jt}}) - W$, dengan $i \ne j$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tiap kemungkinan pasangan titik tersebut mempunyai pembeda ketetanggaan di $W$.

(i) Untuk $x \in V(I) - W$ dan $y \in V(P_{m_{il}}) - W$. maka $x = v_{s00}$ dan $y = v_{ilj}$. Terdapat dua kemungkinan yang terjadi yaitu $s = i$ atau $s \ne i$.

- Untuk $s = i$ maka $x = v_{s00} = v_{i00}$. $y = v_{ilj}$. Karena $G$ graf terhubung maka terdapat $v_{t00} \in W$ dengan $v_{t00}$ bertetangga dengan $v_{s00}$, sehingga $v_{s00}v_{t00} \in E(G \odot_k P_m)$, tetapi $v_{t00}v_{ilj} \notin E(G \odot_k P_m)$ sehingga $|N_G(v_{t00}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{t00}) \cap \{v_{s00}, v_{ilj}\}| = |\{v_{s00}\}| = 1$.
- Untuk $s \ne i$ maka $x = v_{s00} \ne v_{i00}$, $y = v_{ilj}$. Dipilih $v_{ilh} \in W$ sehingga $v_{ilh}v_{ilj} \in E(G \odot_k P_m)$, tetapi $v_{ilh}v_{s00} \notin E(G \odot_k P_m)$ sehingga $|N_G(v_{ilh}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{ilh}) \cap \{v_{s00}, v_{ilj}\}| = |\{v_{ilj}\}| = 1$.

Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(ii) Untuk $x, y \in V(P_{m_{il}}) - W$ maka $x = v_{ilf}$ dan $y = v_{ilg}$. Dipilih $v_{ilh} \in W$ maka $v_{ilh}v_{ilg} \in E(G \odot_k P_m)$. tetapi $v_{ilh}v_{ilf} \notin E(G \odot_k P_m)$ sehingga $|N_G(v_{ilh}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{ilh}) \cap \{v_{ilf}, v_{ilg}\}| = |\{v_{ilg}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iii) Untuk $x \in V(P_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(P_{m_{it}}) - W$, dengan $l \ne t$, maka $x = v_{ilp}$ dan $y = v_{itq}$. Dipilih $v_{ilh} \in W$ maka $v_{ilh}v_{ilp} \in E(G \odot_k P_m)$, tetapi $v_{ilh}v_{itq} \notin E(G \odot_k P_m)$ sehingga

$|N_G(v_{ilh}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{ilh}) \cap \{v_{ilp}, v_{itq}\}| = |\{v_{ilp}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x,y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iv) Untuk $x \in V(P_{m_{il}}) - W$ dan $y \in V(P_{m_{jt}}) - W$, dengan $i \neq j$ maka $x = v_{ilp}$ dan $y = v_{jtq}$. Dipilih $v_{i00} \in W$ maka $v_{i00}v_{ilp} \in E(G \odot_k P_m)$, tetapi $v_{i00}v_{jtq} \notin E(G \odot_k P_m)$ sehingga $|N_G(v_{i00}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{i00}) \cap \{v_{ilp}, v_{jtq}\}| = |\{v_{ilp}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x,y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G \odot_k P_m$ dengan kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$. Maka terdapat tiga kemungkinan yaitu 1) Terdapat $t \in \{1,2,\dots,n-1\}$ sehingga $x = v_{t00}$, 2) Terdapat $r \in \{1,2,\dots,k-1\}$ sehingga $x = v_{ir(m-1)}$, dan 3) Terdapat $x \in S_{il}$ dengan $x = v_{il2}$. Akan ditunjukkan bahwa $W - \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan.

1) Misalkan terdapat $t \in \{1,2,\dots,n-1\}$ sehingga $x = v_{t00}$. Dipilih pasangan titik $v_{tlj}, v_{nlj} \in V(G \odot_k P_m) - \{W - \{x\}\}$ dengan $t \neq n$. Diambil sebarang $v_s \in W - \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:
   (i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ dan $t \neq i$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
   (ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, dengan $v_s = v_{il(m-1)}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
   (iii) Jika terdapat $v_s = v_{ilj} \in S_{il}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{tlj}, v_{nlj}\}| = 0 \neq 1$.
2) Misalkan terdapat $r \in \{1,2,\dots,k-1\}$ sehingga $x = v_{ir(m-1)}$.
   - Untuk $m = 5a+1$. Dipilih pasangan titik $v_{irm}, v_{ihm} \in V(G \odot_k P_m) - W - \{x\}$ dengan $r \neq h$. Diambil sebarang $v_s \in W - \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:
     (i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{irm}, v_{ilm}\}| = 2 \neq 1$.
     (ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, $v_s = v_{ilp} \in S_{il}$, dengan $l \neq r$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{irm}, v_{ihm}\}| = 0 \neq 1$.
     (iii) Jika terdapat $v_s = v_{ilj} \in S_{il}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{irm}, v_{ihm}\}| = 0 \neq 1$.
   - Untuk $m = 5a+3$. Dipilih pasangan titik $v_{ir(m-2)}, v_{ih(m-2)} \in V(G \odot_k P_m) - \{W - \{x\}\}$ dengan $r \neq h$. Diambil sebarang $v_s \in W - \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:

(i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-2)}, v_{il(m-2)}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, $v_s = v_{ilp} \in S_{il}$, dengan $l \neq r$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-2)}, v_{ih(m-2)}\}| = 0 \neq 1$.

(iii)Jika terdapat $v_s = v_{ilj} \in S_{il}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ir(m-2)}, v_{ih(m-2)}\}| = 0 \neq 1$.

3) Misalkan terdapat $b \in S_{il}$ sehingga $x = v_{ilb}$. Dipilih pasangan titik $v_{ilb}, v_{ilp} \in V(G \odot_k P_m) - W - \{x\}$ dengan $b \neq p$. Diambil sebarang $v_s \in W \backslash x$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu:

(i) Jika terdapat $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, dengan $v_s = v_{i00}$ maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Jika terdapat $l \in \{1,2,\dots,k-1\}$, dengan $v_s = v_{il(m-1)}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 0 \neq 1$.

(iii)Jika terdapat $j \in \{1,2,\dots,m-2\}$, dengan $v_s = v_{ilb}$, dengan $b \neq j$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilb}, v_{ilp}\}| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan uraian diatas, $W - \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan minimal atau basis dari graf $G \odot_k P_m$. Jadi $dim_A(G \odot_k P_m) = |W| = k.n.dim_A(P_m) + k.n - 1$.

**Teorema 5.22** Misalkan $G$ merupakan sebarang graf terhubung dengan ordo $n \geq 2$ dan $H$ merupakan graf non trivial. Jika terdapat basis ketetanggaan $S$ untuk $H$ yang juga merupakan himpunan dominasi, maka

$$dim_A(G \odot_k H) = k.n.dim_A(H), \text{ dengan } k \geq 2$$

**Bukti:** Misalkan $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Misalkan $H_{il}$ adalah salinan dari graf $H$ ke-$il$, $V(H_{il}) = \{v_{ilj} | j = 1,2,\dots,m\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n, l = 1,2,\dots,k$.

$V(G \odot_k H) = V(I) \cup_{i=1}^{n} \cup_{l=1}^{k} V(H_{il})$,

$E(G \odot_k H) = E(G) \cup_{i=1}^{n} \cup_{l=1}^{k} E(H_{il}) \cup \{u_i v_{ilj} \mid u_i \in V(G), v_{ilj} \in V(H_{il})\}$.

Misalkan $S_{il}$ adalah sebarang basis ketetanggaan dari $H_{il}$. Dipilih $W = \cup_{i=1}^{n} \cup_{l=1}^{k} S_{il}$, sehingga $|W| = k.n.dim_A(H)$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $W$ pembeda ketetanggaan graf $G \odot_k H$. Diambil sebarang dua titik berbeda $x, y \in V(G \odot_k H) - W$, maka terdapat lima kemungkinan pasangan titik yaitu (i)

$x, y \in V(I) - W$, (ii) $x \in V(G) - W$ dan $y \in V(H_{il}) - W$, (iii) $x, y \in V(H_{il}) - W$, (iv) $x \in V(H_{il}) - W$ dan $y \in V(H_{ik}) - W$, dengan $l \neq k$, dan (v) $x \in V(H_{il}) - W$ dan $y \in V(H_{jk}) - W$, dengan $i \neq j$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa tiap kemungkinan pasangan titik tersebut mempunyai pembeda ketetanggaan di $W$.

(i) Untuk $x, y \in V(I) - W$, maka $x = v_{soo}$ dan $y = v_{poo}$. Dipilih $v_{shi} \in W$, maka $v_{shi}v_{soo} \in E(G\odot_k H)$ tetapi $v_{shi}v_{poo} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{shi}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{shi}) \cap \{v_{soo}, v_{poo}\}| = |\{v_{soo}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(ii) Untuk $x \in V(I) - W$ dan $y \in V(H_{il}) - W$, maka $x = v_{soo}$ dan $y = v_{ilm}$. Terdapat dua kemungkinan yang terjadi yaitu $s = i$ atau $s \neq i$.

- Untuk $s = i$, maka $x = v_{soo} = v_{ioo}$ dan $y = v_{ilm}$. Dipilih $v_{ihj} \in W$, maka $v_{ihj}v_{soo} \in E(G\odot_k H)$, tetapi $v_{ihj}v_{ilm} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{ihj}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{ihj}) \cap \{v_{soo}, v_{ilm}\}| = |\{v_{soo}\}| = 1$.
- Untuk $s \neq i$, maka $x = v_{soo} \neq v_{ioo}$ dan $y = v_{ilm}$. Dipilih $v_{shj} \in W$, maka $v_{shj}v_{soo} \in E(G\odot_k H)$, tetapi $v_{shj}v_{ilm} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{shj}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{shj}) \cap \{v_{soo}, v_{ilm}\}| = |\{v_{soo}\}| = 1$.

Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iii) Untuk $x, y \in V(H_{il}) - W$ maka $x = v_{ilf}$ dan $y = v_{ilg}$. Dipilih $v_{ilh} \in W$, karena $v_{ilh}$ merupakan elemen himpunan dominasi, maka dapat dipastikan bahwa $v_{ilh}v_{ilg} \in E(G\odot_k H)$, tetapi $v_{ilh}v_{ilf} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{ilh}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{ilh}) \cap \{v_{ilf}, v_{ilg}\}| = |\{v_{ilg}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(iv) Untuk $x \in V(H_{il}) - W$ dan $y \in V(H_{ik}) - W$, dengan $l \neq k$, maka $x = v_{ilm}$ dan $y = v_{ikm}$. Dipilih $v_{ilf} \in W$, karena $v_{ilf}$ merupakan elemen himpunan dominasi, jadi dapat dipastikan bahwa $v_{ilf}v_{ilm} \in E(G\odot_k H)$, tetapi $v_{ilf}v_{ikm} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{ilf}) \cap \{x, y\}| = |N_G(v_{ilf}) \cap \{v_{ilm}, v_{ikm}\}| = |\{v_{ilm}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x, y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

(v) Untuk $x \in V(H_{il}) - W$ dan $y \in V(H_{jk}) - W$, dengan $i \neq j$, maka $x = v_{ilm}$ dan $y = v_{jkm}$. Dipilih $v_{ilf} \in W$, karena $v_{ilf}$ merupakan elemen himpunan dominasi, jadi dapat dipastikan bahwa $v_{ilf}v_{ilm} \in E(G\odot_k H)$, tetapi $v_{ilf}v_{jkm} \notin E(G\odot_k H)$ sehingga $|N_G(v_{ilf}) \cap \{x,y\}| = |N_G(v_{ilf}) \cap \{v_{ilm}, v_{jkm}\}| = |\{v_{ilm}\}| = 1$. Dengan demikian maka pasangan titik $x,y$ mempunyai pembeda ketetanggaan pada $W$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan $G\odot_k H$ dengan kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$. Terdapat $j \in \{1,2,\dots,m-1\}$ sehingga $x = v_{ilj}$. Dipilih pasangan titik $v_{ilj}, v_{ilp} \in V(G\odot_k H) - W - \{x\}$ dengan $j \neq p$. Diambil sebarang $v_s \in W \backslash x$. Terdapat dua kemungkinan yaitu:

(i) Jika terdapat $r \in \{1,2,\dots,m-1\}$, dengan $v_s = v_{ilr}$ dan $r \neq j$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilj}, v_{ilp}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Jika terdapat $r \in \{1,2,\dots,m-1\}$, dengan $v_s = v_{fgr}$, maka $|N_G(v_s) \cap \{v_{ilj}, v_{ilp}\}| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan uraian diatas, $W - \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan. Oleh karena itu $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan minimal atau basis dari graf $G\odot_k H$. Jadi $dim_A(G\odot_k H) = |W| = k.n.dim_A(H)$, dengan $k \geq 2$.

## 5.3. DIMENSI METRIK KETETANGGAAN LOKAL

**Lemma 5.23** Misalkan graf $G$ adalah graf lintasan dan graf siklus berordo $n$, $S \subseteq V(G)$ dengan $S = \{v_{n_i} \mid i = 1,2,\dots,k$ dengan $n_i < n_{i+1}\}$. Jika terdapat $v_{n_i}, v_{n_{i+1}} \in S$ sehingga $l(v_{n_i} - v_{n_{i+1}}) > 4$ maka $S$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

**Bukti.** Misalkan $S \subseteq V(G)$ dengan $S = \{v_{n_i} \mid i = 1,2,\dots,k$ dengan $n_i < n_{i+1}\}$. Misalkan terdapat $v_{n_i}, v_{n_{i+1}} \in S$ sehingga $l(v_{n_i} - v_{n_{i+1}}) > 4$. Berdasarkan himpunan titik pada graf $G$ diperoleh himpunan titik $v_{(n_i)+j} \in V(P_n) - S$ dengan $j \in \{1,2,\dots,t\}, t \geq 5$. Terdapat dua kasus, yaitu:

**Kasus 1.** Untuk graf $G$ adalah graf lintasan $(P_n)$. Misalkan $V(P_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$ dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,\dots,n-1\}$. Diambil sebarang $s \in S$ maka terdapat 4 kemungkinan yaitu $s = v_{n_i}$, $s = v_{n_{i+1}}$, $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$. Jika $s = v_{n_i}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)+1}\}$ untuk $n_i = 1$ atau $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s = v_{n_{i+1}}$ maka $N(s) = \{v_{(n_{i+1})-1}\}$ untuk $n_{i+1} = n$ atau $N(s) = \{v_{(n_{i+1})+1}, v_{(n_{i+1})-1}\}$ untuk $n$ yang lain. Sedangkan jika $s \neq v_{n_i}$ atau $s \neq v_{n_{i+1}}$, maka terdapat $n_p < n_i$ sehingga $s = v_{n_p}$ atau terdapat $n_q > n_{i+1}$ sehingga $s = v_{n_q}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x,y \in V(P_n) - S$, maka terdapat $x = v_{(n_i)+2}$ dan $y = v_{(n_i)+3}$ dengan $v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3} \notin N(s)$. Diperoleh, $\left|\left\{v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3}\right\} \cap N(s)\right| = 0 \neq 1$

**Kasus 2.** Untuk graf $G$ adalah graf siklus $(C_n)$. Misalkan $V(C_n) = \{v_i | i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ dan $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cap \{v_n v_1\}$. Diambil sebarang $s \in S$ maka terdapat 4 kemungkinan yaitu $s = v_{n_i}$, $s = v_{n_{i+1}}$, $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$. Jika $s = v_{n_i}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)+1}, v_n\}$ untuk $n_i = 1$ atau $N(s) = \left\{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\right\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s = v_{n_{i+1}}$ maka $N(s) = \{v_{(n_i)-1}, v_1\}$ untuk $n_{i+1} = n$ atau $N(s) = \left\{v_{(n_i)+1}, v_{(n_i)-1}\right\}$ untuk $n$ yang lain. Jika $s \neq v_{n_i}$, atau $s \neq v_{n_{i+1}}$ maka terdapat $n_p < n_i$ sehingga $s = v_{n_p}$ atau terdapat $n_q > n_{i+1}$ sehingga $s = v_{n_q}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(C_n) - S$, maka terdapat $x = v_{(n_i)+2}$ dan $y = v_{(n_i)+3}$ dengan $v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3} \notin N(s)$. Diperoleh, $\left|\left\{v_{(n_i)+2}, v_{(n_i)+3}\right\} \cap N(s)\right| = 0 \neq 1$.
Berdasarkan uraian di atas, $S$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal∎

**Teorema 5.24** $dim_{A,l}(P_n) = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** Misalkan $(P_n) = \{v_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$, $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \ldots, n-1\}$. Terdapat lima kemungkinan nilai $n$ yang terjadi, yaitu $n = 2$, $n = 4m - 1, n = 4m$, $n = 4m + 1$, atau $n = 4m + 2$ dengan $m \in \mathbb{N}$.

**Kasus 1.** Untuk $n = 2$. Dipilih $W = \{v_2\}$ sehingga tidak terdapat dua titik bertetangga $x, y \in V(P_n) - W$. Maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lceil\frac{2-1}{4}\right\rceil = 1$.

**Kasus 2.** Untuk $n = 4m + 2$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Dipilih $W = \left\{v_{3+4(k-1)} : k < \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \{v_n\}$. Diambil sebarang $v_i \in W$ pada graf lintasan maka $v_i = v_{3+4(k-1)}$, $k < \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}$ atau $v_i = v_n$. Sehingga diperoleh

$$N(v_i) = \begin{cases} \{v_{n-1}\} & \text{, untuk } v_i = v_n \\ \left\{v_{3+4(k-1)-1}, v_{3+4(k-1)+1}\right\} & \text{, untuk } v_i = v_{3+4(k-1)} \end{cases}$$

Diambil sebarang $x, y \in V(P_n) - W$ dan $xy \in E(P_n)$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{3+4(k-1)-2}, y = v_{3+4(k-1)-1}$ dan $x = v_{3+4(k-1)+1}, y = v_{3+4(k-1)+2}$ dengan $k < \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu,

$\left|\left\{v_{3+4(k-1)-2}, v_{3+4(k-1)-1}\right\} \cap N(v_{3+4(k-1)})\right| = \left|\left\{v_{3+4(k-1)-1}\right\}\right| = 1$ atau

$\left|\{v_{3+4(k-1)+1}, v_{3+4(k-1)+2}\} \cap N(v_{3+4(k-1)})\right| = \left|\{v_{3+4(k-1)+1}\}\right| = 1.$

Berdasarkan uraian di atas, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil$.

**Kasus 3.** Untuk $n = 4m - 1, n = 4m$, atau $n = 4m + 1$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Misalkan $W = \left\{v_{3+4(k-1)} : k \leq \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}\right\}$. Diambil sebarang $v_i \in W$ pada graf lintasan maka terdapat $i = 3, 7, \dots, 3 + 4(k-1), \dots, 3 + 4\left(\left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil - 1\right)$ dengan $k \leq \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$N(v_i) = \begin{cases} \{v_{n-1}\} & \text{, untuk } v_i = v_n \\ \{v_{3+4(k-1)-1}, v_{3+4(k-1)+1}\} & \text{, untuk } v_i = v_{3+4(k-1)} \end{cases}$$

Diambil sebarang $x, y \in V(P_n) - W$ dan $xy \in E(P_n)$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{3+4(k-1)-2}$, $y = v_{3+4(k-1)-1}$ dan $x = v_{3+4(k-1)+1}$, $y = v_{3+4(k-1)+2}$ dengan $k = 1, 2, \dots, \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil$. Oleh karena itu:

$\left|\{v_{3+4(k-1)-2}, v_{3+4(k-1)-1}\} \cap N(v_{3+4(k-1)})\right| = \left|\{v_{3+4(k-1)-1}\}\right| = 1$ atau

$\left|\{v_{3+4(k-1)+1}, v_{3+4(k-1)+2}\} \cap N(v_{3+4(k-1)})\right| = \left|\{v_{3+4(k-1)+1}\}\right| = 1.$

Berdasarkan uraian di atas, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $P_n$ dengan $|W| = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil$.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(P_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Maka terdapat tiga kasus yaitu

(i) Untuk $n \leq 5$, maka $|W'| < |W| = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil = 1$ sehingga diperoleh $|W'| = 0$ dan $W' = \emptyset$. Berdasarkan definisi 2.5.1 maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

(ii) Untuk $5 < n \leq 9$, $|W'| < |W| = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil = 2$ sehingga $|W'| = 1$. Misalkan $W' = \{v_i\}$. Karena $|V(P_n) - W'| > 4$ maka terdapat pasangan titik bertetanga $v_j, v_{j+1} \in V(P_n) - W'$ dengan $d(v_i, v_j) > 1$ atau $d(v_i, v_{j+1}) > 1$ sehingga $\left|\{v_j, v_{j+1}\} \cap N(v_i)\right| = 0 \neq 1$.

(iii) Untuk $n > 9$, $|W| = \left\lceil\frac{n-1}{4}\right\rceil > 2$ karena $|W'| < |W|$ sehingga $|W'| \geq 2$. Terdapat dua kemungkinan jarak antara anggota $W'$ yaitu jika untuk setiap $v_i, v_j \in W', i < j$ dengan $d(v_i, v_j) \leq 4$, maka terdapat dua titik bertetangga $v_p, v_{p+1} \in V(P_n) - W'$ dengan $d(v_j, v_p) > 1$ atau $d(v_i, v_{p+1}) > 1$ sehingga $\left|\{v_p, v_{p+1}\} \cap N(v_j)\right| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Selanjutnya, jika terdapat

$v_i, v_j \in W', i < j$ dengan $d(v_i, v_j) > 4$, berdasarkan Lemma 5.23 maka $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu. $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Terbukti bahwa $dim_{A,l}(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$ ■

**Teorema 5.25** $dim_{A,l}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, untuk $n \geq 4$.

**Bukti.** Misalkan $V(C_n) = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}, E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cap \{v_n v_1\}$. Dipilih $W = \left\{ v_{4(k-1)+1} : k \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, k \in \mathbb{N} \right\}$. Diambil sebarang $v_i \in W$ pada graf siklus maka terdapat $i = 1, 5, 9, \dots, 4(k-1)+1, \dots, 4\left(\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil - 1\right) + 1$ dengan $k \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, k \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$N(v_i) = \begin{cases} \{v_2, v_n\} & \text{, untuk } v_i = v_1 \\ \{v_1, v_{n-1}\} & \text{, untuk } v_i = v_n \\ v_{4(k-1)}, v_{4(k-1)+2} & \text{, untuk } v_i = v_{4(k-1)+1} \end{cases}$$

Diambil sebarang $x, y \in V(C_n) - W$ dan $xy \in E(C_n)$ maka terdapat tiga kasus, yaitu:

**Kasus 1.** Untuk graf siklus berordo $n = 4m$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Maka terdapat tiga kemungkinan yaitu $x = v_{4(k-1)+2}$ dan $y = v_{4(k-1)+3}$ dengan $k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$,

$x = v_{4(k-1)-1}$ dan $y = v_{4(k-1)}$ dengan $k = 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ atau

$x = v_n$ dan $y = v_{n-1}$. Sehingga diperoleh

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $k = 1$,

$|\{v_n, v_{(n-1)}\} \cap N(v_i)| = |\{v_n\}| = 1$ untuk $i = 1$,

$|\{v_{4(k-1)-1}, v_{4(k-1)}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$, atau

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$.

Berdasarkan uraian diatas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan $|W| = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

**Kasus 2.** Untuk graf siklus berordo $n = 4m + 1$ dan $n = 4m + 2$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{4(k-1)+2}$ dan $y = v_{4(k-1)+3}$ dengan $k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 1$, atau

$x = v_{4(k-1)-1}$ dan $y = v_{4(k-1)}$ dengan $k = 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Oleh karena itu:

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $k = 1$,

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$,

$|\{v_{4(k-1)-1}, v_{4(k-1)}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)}\}| = 1$ untuk $i = 4m+1$ dan $k = m+1$, atau

$|\{v_{4(k-1)-1}, v_{4(k-1)}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$. Berdasarkan uraian di atas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan $|W| = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

**Kasus 3.** Untuk graf siklus berordo $n = 4m+3$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{4(k-1)+2}$ dan $y = v_{4(k-1)+3}$ dengan $k = 1,2,\dots,\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ serta $x = v_{4(k-1)-1}$ dan $y = v_{4(k-1)}$ dengan $k = 2,3,\dots,\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Oleh karena itu:

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $k = 1$,

$|\{v_{4(k-1)-1}, v_{4(k-1)}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$, atau

$|\{v_{4(k-1)+2}, v_{4(k-1)+3}\} \cap N(v_i)| = |\{v_{4(k-1)+2}\}| = 1$ untuk $i = 4(k-1)+1$. Berdasarkan uraian di atas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal dengan $|W| = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(C_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Terdapat tiga kasus yaitu:

(i) Untuk $n = 4$, $|W'| < |W| = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil = 1$ sehingga diperoleh $|W'| = 0$ dan $W' = \emptyset$. Berdasarkan definisi 2.5 1 maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

(ii) Untuk $4 < n \leq 8$, $|W'| < |W| - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil = 2$ sehingga diperoleh $|W'| = 1$. Misalkan $W' = \{v_i\}$. Karena $|V(C_n) - W'| \geq 4$ maka terdapat pasangan titik bertetangga $v_j, v_{j+1} \in V(C_n) - W'$ dengan $d(v_i, v_j) > 1$ atau $d(v_i, v_{j+1}) > 1$ sehingga $|\{v_j, v_{j+1}\} \cap N(v_i)| = 0 \neq 1$.

(iii) Untuk $n > 8$. Terdapat $v_i, v_j \in W'$ dengan $i < j$, $l(v_i - v_j) > 4$. Berdasarkan Lema 4.3.1 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Berdasarkan kasus (i), (ii) dan (iii) diperoleh bahwa $W' \subseteq V(C_n)$ dengan $|W'| < |W|$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $C_n$. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis metrik ketetanggaan lokal graf $C_n$. Terbukti bahwa $dim_{A,l}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ ∎

**Teorema 5.26** $dim_{A,l}(H) = n - 1$ jika dan hanya jika $H \cong K_n$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** ($\Leftarrow$) Misalkan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(K_n) = \{v_i v_j | i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n,\ i \neq j\}$ dengan $n \geq 2$ dan $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ sehingga $|W| = n - 1$. Karena tidak terdapat pasangan titik yang bertetangga $x, y \in V(K_n) - W$, maka $W$ adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Selanjutnya, diambil sebarang $W' \subseteq V(K_n)$ dengan $|W'| < |W|$. Terdapat tiga kasus yaitu:

(i) Untuk $n = 2$, $|W'| < |W| = n - 1 = 1$ sehingga diperoleh $|W'| = 0$ dan $W' = \emptyset$. Berdasarkan definisi 4.3.1 maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal

(ii) Untuk $n = 3$, $|W'| < |W| = n - 1 = 2$ sehingga diperoleh $|U| = 1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti misalkan $W' = \{v_1\}$. Karena pasangan titik bertetangga $v_2, v_3 \in V(K_n) - W'$ dan $|\{v_2, v_3\} \cap N(v_1)| = 2 \neq 1$, maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

(iii) Untuk $n > 3$, untuk setiap $v_i \in W'$maka untuk setiap pasangan titik bertetangga $v_p, v_q \in V(K_n) - W'$ , $v_p, v_q \in N(v_i)$ sehingga $\left|\{v_p, v_q\} \cap N(v_i)\right| = 2 \neq 1$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 maka $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Terbukti bahwa $dim_{A,l}(K_n) = n - 1$. Dengan demikian jika $H \cong K_n$ maka $dim_{A,l}(H) = n - 1$.

($\Rightarrow$) Misalkan $dim_{A,l}(H) = n - 1$, andaikan $H \ncong K_n$, maka terdapat $x, y \in V(H)$ dengan $xy \notin E(H)$. Dipilih $W = V(H) - \{x, y\}$. Karena $V(H) - W = \{x, y\}$ dengan $xy \in E(H)$ maka tidak terdapat pasangan titik yang bertetangga di $V(H) - W$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 $W$ adalah himpunan pembeda ketetanggaan lokal, diperoleh $|W| = n - 2$. Hal ini kontradiksi dengan $dim_{A,l}(H) = n - 1$.

**Teorema 5.27** $dim_{A,l}(S_n) = 1$, untuk $n \geq 2$.

**Bukti.** Misalkan $V(S_n) = \{v_i | i = 0, 1, 2, \dots, n\}$, $\deg(v_0) = n$, dan $E(S_n) = \{v_0 v_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Dipilih $W = \{v_2\}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(S_n) - W$. maka $x = v_0$ dan $y = v_p$ dengan $p = 3, 4, \dots, n$. Karena $v_0 \in N(v_2)$ dan $v_p \notin N(v_2)$ sehingga $\left|\{v_0, v_p\} \cap N(v_2)\right| = |\{v_0\}| = 1$. maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Karena $|W| = 1$ maka $dim_{A,l}(S_n) = 1$ ∎

**Teorema 5.28** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$. Jika $m \geq 3$, maka

$$dim_{A,l}(G \circ K_m) = |V(G)| \left(dim_{A,l}(K_m) - 1\right) + \gamma(G)$$

**Bukti.** Misalkan $D = \{v_{n_k} | k = 1,2, \dots, \gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik-titik hasil kali *comb*, $D_1 = \{v_{n_k 1} | k = 1,2, \dots, \gamma(G)\} \subseteq B$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 5.24, himpunan $W_i = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, m-1\}$, $i = 1,2, \dots, n$ merupakan basis metrik ketetanggaan lokal graf $K_{m(i)}$. Misalkan $W = D_1 \cup_{i=1}^{n} (W_i - \{v_{i1}\})$.

Diambil sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(G \circ K_m) - W$. Terdapat dua kemungkinan pasangan titik bertetangga tersebut, yaitu $x = v_{p1}$ dan $y = v_{q1}$ dengan $p, q \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$ atau $x = v_{p1}$ dan $y = v_{pm}$ dengan $p \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$.

(i) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{q1}$ dengan $p, q \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Dipilih $W = \{v_{p2}\}$. Karena $v_{p1} \in N(v_{p2})$ dan $v_{q1} \notin N(v_{p2})$ maka $|N(v_{p2}) \cap \{v_{p1}, v_{q1}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

(ii) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{pm}$ dengan $p \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Karena $D_1$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k 1} \in D_1$ sehingga $d(v_{n_k 1}, v_{p1}) = 1$. Sehingga $v_{p1} \in N(v_{n_k 1})$ dan $v_{pm} \notin N(v_{n_k 1})$ maka $|N(v_{n_k 1}) \cap \{v_{p1}, v_{pm}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $G \circ K_m$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $G \circ K_m$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(G \circ K_m)$, $|W'| < |W|$. Misalkan $W' = D' \cup W^*$, terdapat dua kemungkinan yaitu $D' \subseteq B$, $|D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\cup_{i=1}^{n} (W_i - \{v_{i1}\})|$ atau $D' \subseteq B$, $|D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \cup_{i=1}^{n} H_i$, $|W^*| < |\cup_{i=1}^{n} (W_i - \{v_{i1}\})|$.

(i) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B$, $|D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = |\cup_{i=1}^{n} (W_i - \{v_{i1}\})|$. Karena $D'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal terdapat titik $v_{p1} \in B$ maka $d(v_{n_k 1}, v_{p1}) > 1$, $v_{n_k 1} \in D'$ dengan $k < \gamma(G)$, $k \in \mathbb{N}$. Terdapat dua titik bertetangga $v_{p1}, v_{ph} \in V(G \circ K_m) - W'$, $h \in \{2,3, \dots, m\}$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k 1}$ dengan $k < \gamma(G)$, $k \in \mathbb{N}$. Karena $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{n_k 1})$. Sehingga $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{n_k 1})| = 0 \neq 1$.

b. Untuk $\in W^*$, maka terdapat $w = v_{it}$ dengan $t \in \{2, 3, \ldots, m\}$ dan $t \neq h$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$ dan jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{it})$ dengan $i = p$ . Jika $v_{p1}, v_{ph} \notin N(v_{it})$ dengan $i \neq p$ maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 0 \neq 1$. Sedangkan, jika $v_{p1}, v_{ph} \in N(v_{it})$ dengan $i = p$ maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{it})| = 2 \neq 1$.

(ii) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < |\bigcup_{i=1}^{n}(W_i - \{v_{i1}\})|$. Maka terdapat $H_i$ sehingga maksimal $|W_i - \{v_{i1}\}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $H_1$ sehingga maksimal $|W_1 - \{v_{11}\}| - 1$ yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya, terdapat dua titik bertetangga $v_{12}, v_{13} \in V(GoK_m) - W'$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k1}, k = 1, 2, \ldots, \gamma(G)$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{n_k1})$ untuk $n_k \neq 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{n_k1})| = 0 \neq 1$ atau $v_{12}, v_{13} \in N(v_{n_k1})$ untuk $n_k = 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(w)| = 2 \neq 1$.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{zt}$ dengan $t \neq 2$ dan $t \neq 3$. Karena $v_{12}, v_{13} \notin N(v_{zt})$ untuk $z \neq 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 0 \neq 1$ atau $v_{12}, v_{13} \in N(v_{zt})$ untuk $z = 1$ sehingga $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(v_{zt})| = 2 \neq 1$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa jika terdapat $v_{ip} \in W_i - \{v_{i1}\}$ atau terdapat $v_{n_k1} \in D_1$ yang tidak menjadi anggota $W$, maka $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Jadi, $dim_{A,l}(GoK_m) = |V(G)|\,(dim_{A,l}(K_m) - 1) + \gamma(G)$∎

**Teorema 5.29** Misalkan $G$ graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan graf $S_m$ berordo $m \geq 2$, maka

$$dim_{A,l}(GoS_m) = |V(G)|$$

dengan titik cangkok o bukan merupakan titik dominan pada graf $S_m$.

**Bukti.** Misalkan $W \subseteq V(GoS_m)$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Dipilih $W = B = \{v_{i1} | i = 1,2, \ldots, n\}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(GoS_m) - W$, maka $x = v_{i0}$ dan $y = v_{ij}$ dengan $j = 2,3, \ldots, m$. Karena $v_{i0} \in N(v_{i1})$ dan $v_{ij} \notin N(v_{i1})$ sehingga

$|\{v_{i0}, v_{ij}\} \cap N(v_{i1})| = |\{v_{i0}\}| = 1$. Berdasarkan uraian di atas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggan lokal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoS_m)$, $|W'| < |W|$, sehingga $|W'| \leq n-1$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu untuk $W' \subseteq B, W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$, atau $W' \subseteq S \cup T, S \subseteq B$ dan $\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$.

(i) Untuk $W' \subseteq B$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{11} \notin W'$. Terdapat dua titik bertetangga $v_{12}, v_{10} \in V(GoS_m) - W'$. Diambil sebarang $a \in W'$ maka $d(a, v_{12}) > 1$ dan $d(a, v_{10}) > 1$. Akibatnya, $|\{v_{12}, v_{10}\} \cap N(a)| = 0 \neq 1$.

(ii) Untuk $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{1p} \notin W'$, $p \in \{0\} \cup \{2, 3, \dots, n\}$. Terdapat dua titik bertetangga $v_{12}, v_{10} \in V(GoS_m) - W'$. Diambil sebarang $a \in W'$ maka $d(a, v_{12}) > 1$ dan $d(a, v_{10}) > 1$. Akibatnya, $|\{v_{12}, v_{10}\} \cap N(a)| = 0 \neq 1$.

(iii) Untuk $W' \subseteq S \cup T, S \subseteq B$ dan $T \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{11} \notin W'$ dan $v_{1p} \notin W'$, $p \in \{0\} \cup \{2, 3, \dots, n\}$. Akibatnya, terdapat dua titik bertetangga $v_{12}, v_{10} \in V(GoS_m) - W'$. Diambil sebarang $a \in S$ atau $b \in S$ maka $d(a, v_{12}) > 1$, $d(a, v_{10}) > 1, d(b, v_{12}) > 1$, dan $d(b, v_{10}) > 1$. Akibatnya, $|\{v_{12}, v_{10}\} \cap N(a)| = 0 \neq 1$ atau $|\{v_{12}, v_{10}\} \cap N(b)| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa jika terdapat $v_{i1} \in W, i = 1, 2, \dots, n$ yang tidak menjadi anggota $W$, maka $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dengan $dim_{A,l}(GoS_m) = |V(G)|$ ■

**Teorema 5.30** Misalkan $G$ merupakan graf siklus, graf bintang, graf lengkap, atau graf lintasan berordo $n \geq 2$ dan $m \geq 4$, maka

$$dim_{A,l}(GoC_m) = \begin{cases} |V(G)|(dim_{A,l}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k+3 \\ |V(G)|(dim_{A,l}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$ dan $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$.

**Bukti.** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, dan graf $P_n$ berordo $n \geq 2$ dan $D = \{v_{n_k} | k = 1, 2, \dots, \gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik hasil kali *comb*, $D_1 = \{v_{n_k 1} | k = 1, 2, \dots, \gamma(G)\} \subseteq B$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 5.25, himpunan $W_i = \left\{v_{4(k-1)+1} : k \leq \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, k \in \mathbb{N}\right\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ merupakan basis metrik ketetanggaan lokal graf $C_{m(i)}$. Dipilih $W \subseteq V(GoC_m)$, terdapat dua kasus yaitu:

**Kasus 1.** Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Dipilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(GoC_m) - W$, akibatnya $x, y \in C_{m(i)} - W_i$. Karena $B \subseteq W$ maka berdasarkan Teorema 5.25.3, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokai. Karena $W_i$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari $C_m$, maka $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $GoC_m$.

**Kasus 2.** Untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Misalkan $W = D_1 \bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}$ dengan $k = 2,3, \dots, \left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Diambil sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(GoC_m) - W$. Terdapat dua kemungkinan pasangan titik bertetangga tersebut, yaitu $x, y \in B - D_1$ atau $x \in B - D_1$ dan $y \in C_{m(i)} - \{v_{i4(k-1)}\}$.

(i) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{q1}$ dengan $p, q \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Dipilih $v_{i1} \in D_1$ dengan $d(v_{i1}, v_{p1}) = 1$ dan $d(v_{i1}, v_{k1}) > 1$ atau $d(v_{i1}, v_{q1}) = 1$ dan $d(v_{i1}, v_{p1}) > 1$. Diperoleh $|N(v_{i1}) \cap \{v_{p1}, v_{q1}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$ atau $|N(v_{i1}) \cap \{v_{p1}, v_{q1}\}| = |\{v_{q1}\}| = 1$

(ii) Jika $x = v_{p1}$ dan $y = v_{p2}$ dengan $p \notin \{n_1, n_2, \dots, n_{\gamma(G)}\}$. Karena $D_1$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k1} \in D_1$ sehingga $d(v_{n_k1}, v_{p1}) = 1$. Karena $v_{p1} \in N(v_{n_k1})$ dan $v_{p2} \notin N(v_{n_k1})$ maka $|N(v_{n_k1}) \cap \{v_{p1}, v_{p2}\}| = |\{v_{p1}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $GoC_m$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $GoC_m$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoC_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat dua kasus yaitu

**Kasus 1.** Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Misalkan $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W'| < |\bigcup_{i=1}^{n} W_i|$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{1p} \notin W'$, maka terdapat $v_{1s}, v_{1t} \in W'$ dengan $s < t$, $l(v_{1s} - v_{1t}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

**Kasus 2.** Untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Misalkan $W' = D' \cup W^*$, terdapat dua kemungkinan yaitu $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$ atau $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$ dengan $k = 2,3, \dots, \left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$.

(i) Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| < \gamma(G)$ dan $|W^*| = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$. Karena $D'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal terdapat titik $v_{p1} \in B$ maka $d(v_{n_k 1}, v_{p1}) > 1, v_{n_k 1} \in D'$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Terdapat dua titik bertetangga $v_{ps}, v_{pt} \in V(GoK_m) - W', s, t \in \{2, 3, \dots, m\}, s \neq t$. Selanjutnya, terdapat dua kemungkinan $w \in W'$ yaitu untuk $w \in D'$ atau $w \in W^*$.

a. Untuk $w \in D'$, maka terdapat $w = v_{n_k 1}$ dengan $k < \gamma(G), k \in \mathbb{N}$. Karena $v_{ps}, v_{pt} \notin N(v_{n_k 1})$. Sehingga $|\{v_{ps}, v_{pt}\} \cap N(v_{n_k 1})| = 0 \neq 1$.

b. Untuk $w \in W^*$, maka terdapat $w = v_{ih}$ dengan $h \in \{2, 3, \dots, m\}$, $h \neq s$, dan $h \neq t$. Karena $v_{ps}, v_{pt} \notin N(v_{ih})$ dengan $i \neq p$ atau $= p$ . Maka $|\{v_{p1}, v_{ph}\} \cap N(v_{ih})| = 0 \neq 1$.

Misalkan $W' = D' \cup W^*$ dengan $D' \subseteq B, |D'| = \gamma(G)$ dan $W^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i, |W^*| < \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$. Maka terdapat $H_i$ sehingga maksimal $|v_{i4(k-1)}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$ dengan $k = 2,3, \dots, \left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $H_1$ sehingga maksimal $|v_{i4(k-1)}| - 1$ yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya, terdapat $v_{1s}, v_{1t} \in W'$ dengan $s < t$, $l(v_{1s} - v_{1t}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Berdasarkan uraian di atas, diperoleh bahwa jika terdapat $v_{ip} \in W_i - \{v_{i1}\}$ atau terdapat $v_{n_k 1} \in D_1$ yang tidak menjadi anggota $W$, maka $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, $W$ bukan merupakan basis ketetanggaan lokal dengan $dim_{A,l}(GoC_m) =$

$$\begin{cases} |V(G)|(dim_{A,l}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k + 3 \\ |V(G)|(dim_{A,l}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$ ■

**Teorema 5.31** Misalkan $G$ graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan graf $K_m$ berordo $m \geq 3$. Jika $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$, maka

$$dim_{AL}(GoK_m) = |V(G)|(dim_{Al}(K_m) - 1) + \gamma(G)$$

**Bukti.** Misalkan $S = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}}\} \subseteq V(G)$ merupakan sebarang himpunan dominasi dari graf $G$, selanjutnya berdasarkan penamaan titik pada graf hasil operasi kali comb himpunan $S$ dapat ditulis sebagai $S^* = \{v_{n_1 1}, v_{n_2 1}, \dots, v_{n_{\gamma(G)} 1}\}$. Berdasarkan Teorema 4.1.5, himpunan $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i(m-1)}\}$ dengan $i = 1,2, \dots, n$ merupakan basis ketetanggaan lokal graf $K_m^i$. Dipilih

$W = S^{*} \bigcup_{i=1}^{n}(B_i - \{v_{i1}\})$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(GoK_m) - W$, terdapat dua kasus yaitu $x, y \in I - S^{*}$ atau $x \in I - S^{*}$ dan $y \in (B_i - \{v_{i1}\})$.

(i) Jika $x, y \in I - S^{*}, x = v_{r1}$ dan $y = v_{k1}$ dengan $r, k \neq n_i, i = 1,2, \ldots, \gamma(G)$. Dipilih $v_{r2} \in W$. Karena $d(v_{r1}, v_{r2}) = 1$ atau $d(v_{k1}, v_{r2}) > 1$ maka $|N(v_{r2}) \cap \{v_{r1}, v_{k1}\}| = |\{v_{r1}\}| = 1$.

(ii) Jika $x \in I - S^{*}$ dan $y \in (B_i - \{v_{i1}\})$, sehingga $x = v_{r1}$ dan $y = v_{rm}$ dengan $r \neq n_i, i = 1,2, \ldots, \gamma(G)$. Karena $S^{*}$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k 1} \in S^{*}$. Karena $d(v_{r1}, v_{n_k 1}) = 1$ dan $d(v_{rm}, v_{n_k 1}) > 1$ maka $|N(v_{n_k 1}) \cap \{v_{r1}, v_{rm}\}| = |\{v_{r1}\}| = 1$.

Oleh karena itu $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoK_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |B_i - \{v_{i1}\}|$ atau $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_m^i$, dan $|H'| < |B_i - \{v_{i1}\}|$.

a. Untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$, dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |B_i - \{v_{i1}\}|$. Karena $I'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal, maka terdapat titik $v_{r1} \in I - I'$ sehingga $d(v_{r1}, v_{n_k 1}) > 1, v_{n_k 1} \in I'$. Terdapat pasangan titik bertetangga $v_{r1}, v_{rh} \in V(GoK_m) - W'$ dengan $h \neq 1$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k 1}, v_{n_k 1} \in I'$ atau $= v_{ih}, h \neq 1, v_{ih} \in H'$.

   i. Jika $x = v_{n_k 1}$ maka $v_{r1}, v_{rh} \notin N(x)$. Oleh karena itu $|\{v_{r1}, v_{rh}\} \cap N(x)| \neq 1$.

   ii. Jika $x = v_{ih}, h \neq 1$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $v_{r1}, v_{rh} \notin N(x)$ untuk $i \neq r$ atau $v_{r1}, v_{rh} \in N(x)$ untuk $i = r$. Akibatnya $|\{v_{r1}, v_{rh}\} \cap N(x)| \neq 1$. Oleh karena itu $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

b. Selanjutnya untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$, dengan $I' \subseteq I$, $|I'| = \gamma(G)$, $|H'| < |B_i - \{v_{i1}\}|$, dan $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_m^i$. Terdapat $K_m^i$ sehingga maksimal terdapat $(|B_i - \{v_{i1}\}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ sehingga maksimal terdapat $(|B_1 - \{v_{11}\}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{12}, v_{13} \in V(GoK_m) - W'$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k 1}, v_{n_k 1} \in I'$ atau $x = v_{it}, t = (4,5, \ldots, m), v_{it} \in H'$.

   i. Jika $x = v_{n_k 1}$ maka $v_{12}, v_{13} \notin N(x)$. Akibatnya $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(x)| \neq 1$.

   ii. Sedangkan jika $x = v_{it}$ maka $v_{12}, v_{13} \in N(x)$. Akibatnya $|\{v_{12}, v_{13}\} \cap N(x)| \neq 1$.

   Oleh karena itu $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Berdasarkan uraian di atas $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $GoK_m$. Jadi $dim_{Al}(GoK_m) = |W| = |V(G)|(dim_{Al}(K_m) - 1) + \gamma(G)$.■

**Akibat 5.32** Misalkan $G$ graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan graf $K_m$ berordo $m \geq 3$. Jika $k \geq 1$ maka

$$dim_{AL}(Go^kK_m) = |V(Go^{k-1}K_m)|(dim_{Al}(K_m) - 1) + \gamma(Go^{k-1}K_m)$$

**Bukti.** Misalkan $G' = Go^{k-1}K_m$, akibatnya $Go^kK_m = G'oK_m$. Bedasarkan Teorema 5.24.1, diperoleh $dim_{Al}(Go^kK_m) = |V(Go^{k-1}K_m)|(dim_{Al}(K_m) - 1) + \gamma(Go^{k-1}K_m)$.

**Teorema 5.33** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berorodo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf $K_m$ berordo $m \geq 3$ Jika $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi dari graf $G$ dan $k > 1$ maka

$$dim_{AL}(Go_kK_m) = k|V(G)|(dim_{AL}(K_m) - 1) + \gamma(G)$$

**Bukti.** Misalkan $S = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}}\} \subseteq V(G)$ merupakan himpunan dominasi minimal dari graf $G$, selanjutnya berdasarkan penamaan titik pada graf hasil operasi kali $k$-comb himpunan $S$ dapat ditulis sebagai $S^* = \{v_{n_1 01}, v_{n_2 01}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}01}\}$. Berdasarkan Teorema 4.1.5, himpunan $B_{it} = \{v_{i01}, v_{it2}, \dots, v_{it(m-1)}\}$ dengan $i = 1,2,\dots,n$ dan $t = 1,2,\dots,k$ merupakan basis ketetanggaan lokal graf $K_m^{it}$. Dipilih $W = S^* \bigcup_{i=1}^{nk}(B_{it} - \{v_{i01}\})$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(Go_kK_m) - W$, terdapat dua kasus yaitu $x, y \in I - S^*$ atau $x \in I - S^*$ dan $y \in (B_{it} - \{v_{i01}\})$.

i. Jika $x, y \in I - S^*$, $x = v_{r01}$ dan $y = v_{k01}$ dengan $r, k \neq n_i, i = 1,2,\dots,\gamma(G)$. Dipilih $v_{rt2} \in W$ dengan $t = 1,2,\dots,k$. Karena $d(v_{r01}, v_{rt2}) = 1$ atau $d(v_{k01}, v_{rt2}) > 1$ maka $|N(v_{rt2}) \cap \{v_{r01}, v_{k01}\}| = |\{v_{r01}\}| = 1$.
ii. Jika $x \in I - S^*$ dan $y \in (B_{it} - \{v_{i01}\})$, sehingga $x = v_{r01}$ dan $y = v_{rtm}$ dengan $r \neq n_i, i = 1,2,\dots,\gamma(G)$ dan $t = 1,2,\dots,k$. Karena $S^*$ merupakan himpunan dominasi minimal dari induk, maka terdapat $v_{n_k 01} \in S^*$. Karena $d(v_{r01}, v_{n_k 01}) = 1$ dan $d(v_{rtm}, v_{n_k 01}) > 1$ maka $|N(v_{n_k 01}) \cap \{v_{r01}, v_{rtm}\}| = |\{v_{r01}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(Go_kK_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$

dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |B_{it} - \{v_{i01}\}|$ atau $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} K_m^{it}$, dan $|H'| < |B_{it} - \{v_{i01}\}|$.

a. Untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |B_{it} - \{v_{i01}\}|$. Karena $I'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal, maka terdapat titik $v_{r01} \in I - I'$ sehingga $d(v_{r01}, v_{n_k01}) > 1, v_{n_k01} \in I'$. Terdapat pasangan titik bertetangga $v_{r01}, v_{rth} \in V(Go_kK_m) - W'$ dengan $h \neq 1$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k01}, v_{n_kc1} \in I'$ atau $x = v_{ith}, h = 2,3 \dots, m$. Jika $x = v_{n_k01}$ maka $v_{r01}, v_{rth} \notin N(x)$. Sedangkan jika $x = v_{ith}, h \neq 1$ maka terdapat dua kemungkinan yaitu $v_{r01}, v_{rth} \notin N(x)$ untuk $i \neq r$ atau $v_{r01}, v_{rth} \in N(x)$ untuk $i = r$. Akibatnya $|\{v_{r01}, v_{rth}\} \cap N(x)| \neq 1$. Oleh karena itu $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

b. Selanjutnya untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$, $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} K_m^{it}$, dan $|H'| < |B_{it} - \{v_{i01}\}|$. Terdapat $K_m^{it}$ sehingga maksimal terdapat $|B_{it} - \{v_{i01}\}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ dan $t = 1$ sehingga maksimal terdapat $(|B_{11} - \{v_{101}\}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{11h}, v_{11q} \in V(Go_kK_m) - W'$ dengan $h, q \neq 1, h \neq q$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k01}, v_{n_k01} \in I'$ atau $x = v_{itp}, p \neq 1, p \neq h, p \neq q$, dan $v_{itp} \in H'$.

   i. Jika $x = v_{n_k01}$ maka $v_{ith}, v_{itq} \notin N(x)$. Akibatnya $|\{v_{11h}, v_{11q}\} \cap N(x)| \neq 1$.

   ii. Sedangkan jika $x = v_{itp}$ maka $v_{11h}, v_{11q} \in N(x)$. Akibatnya $|\{v_{11h}, v_{11q}\} \cap N(x)| \neq 1$.

   Oleh karena itu $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Berdasarkan uraian di atas $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $Go_kK_m$. Jadi $dim_{Al}(Go_kK_m) = |W| = k|V(G)|(dim_{Al}(K_m) - 1) + \gamma(G)$ ■

**Teorema 5.34** Misalkan $G$ graf terhubung berordo $n \geq 2$, graf $S_m$ berordo $m \geq 2$. Jika titik cangkok $o$ bukan merupakan titik dominasi pada graf $S_m$ maka

$$dim_{AL}(GoS_m) = |V(G)|$$

**Bukti.** Misalkan $W = I = \{v_{i1} | i = 1,2, \dots, n\}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(GoS_m) - W$, akibatnya $x = v_{i0}$ dan $y = v_{ij}$ dengan $j = 2,3, \dots, m$. Oleh karena itu

$|\{v_{i0}, v_{ij}\} \cap N(v_{i1})| = |\{v_{i0}\}| = 1$. Berdasarkan uraian diatas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(GoS_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu $W' \subseteq I$, $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_m^i$, atau $W' \subseteq B \cup P$, dengan $B \subseteq I$ dan $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_m^i$.

a. Untuk $W' \subseteq I$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{11} \notin W'$. Akibatntya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{10}, v_{12} \in V(GoS_m) - W'$. Diambil sebaranga $v_{p1} \in W'$ dengan $(v_{p1}, v_{10}) > 1$ atau $d(v_{p1}, v_{12}) > 1$ sehingga $|\{v_{10}, v_{12}\} \cap N(v_{p1})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

b. Untuk $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_m^i$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{1p} \notin W', p \neq 1$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{10}, v_{12} \in V(GoS_m) - W'$. Diambil sebarang $v_{pq} \in W'$ dan $p, q \neq 1$ dengan $(v_{pq}, v_{10}) > 1$ atau $d(v_{pq}, v_{12}) > 1$ sehingga $|\{v_{10}, v_{12}\} \cap N(v_{pq})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

c. Sedangkan untuk $W' \subseteq B \cup P$, dengan $B \subseteq I$ dan $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_m^i$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{1p} \notin W', p \in \{0,1,\dots,m\}$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{1x}, v_{1y} \in V(GoS_m) - W'$, dengan $x, y \in \{0,1,\dots,m\}, x \neq y$. Diambil sebarang $v_{kd} \in W', k \neq 1$ dengan $(v_{kd}, v_{1x}) > 1$ atau $d(v_{kd}, v_{1y}) > 1$ sehingga $|\{v_{1x}, v_{1y}\} \cap N(v_{kd})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dan $dim_{Al}(GoS_m) = |V(G)|$ ■

**Akibat 4.2.5** Misalkan $G$ graf terhubung berordo $n \geq 2$, graf $S_m$ berordo $m \geq 2$, dan titik cangkok $o$ bukan merupakan titik dominasi pada graf $S_m$. Jika Jika $k \geq 1$ maka

$$dim_{AL}(Go^kS_m) = |V(Go^{k-1}S_m)|$$

**Bukti.** Misalkan $G' = Go^{k-1}S_m$, akibatnya $Go^kS_m = G'oS_m$. Bedasarkan Teorema 5.24.4, diperoleh $dim_{Al}(Go^kS_m) = |V(Go^{k-1}S_m)|$.

**Teorema 5.35** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah barisan $n$ graf $S_m$ berordo $m \geq 2$. Jika titik cangkok $o$ bukan merupakan titik dominan dari graf bintang $S_m$ dan $k \geq 1$ maka

$$dim_{AL}(G o_k S_m) = |V(G)|$$

**Bukti.** Misalkan $W = I = \{v_{i01} | i = 1,2,\dots,n\}$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(Go_kS_m) - W$, akibatnya $x = v_{it0}$ dan $y = v_{itj}$ dengan $j = 2,3,\dots,m$. Oleh karena itu $|\{v_{it0}, v_{itj}\} \cap N(v_{i01})| = |\{v_{it0}\}| = 1$. Berdasarkan uraian diatas $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(Go_kS_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu $W' \subseteq I$, $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} S_m^{it}$, atau $W' \subseteq B \cup P$, dengan $B \subseteq I$ dan $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} S_m^{it}$.

a. Untuk $W' \subseteq I$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{101} \notin W'$. Akibatntya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{1t0}, v_{1t2} \in V(Go_kS_m) - W'$. Diambil sebaranga $v_{p01} \in W'$ dengan $(v_{p01}, v_{1t0}) > 1$ atau $d(v_{p01}, v_{1t2}) > 1$ sehingga $|\{v_{1t0}, v_{1t2}\} \cap N(v_{p01})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.
b. Untuk $W' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} S_m^{it}$ Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{11p} \notin W', p \neq 1$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{110}, v_{112} \in V(Go_kS_m) - W'$. Diambil sebarang $v_{ptq} \in W'$ dan $p, q \neq 1$ dengan $(v_{ptq}, v_{110}) > 1$ atau $d(v_{ptq}, v_{112}) > 1$ sehingga $|\{v_{110}, v_{112}\} \cap N(v_{ptq})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.
c. Sedangkan untuk $W' \subseteq B \cup P$, dengan $B \subseteq I$ dan $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} S_m^{it}$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $v_{1tp} \notin W', p \in \{0,1,\dots,m\}$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{1tx}, v_{1ty} \in V(GoS_m) - W'$, dengan $x, y \in \{0,1,\dots,m\}, x \neq y$. Diambil sebarang $v_{ktd} \in W', k \neq 1, d \in \{0,1,\dots,m\}$ dengan $(v_{ktd}, v_{1tx}) > 1$ atau $d(v_{ktd}, v_{1ty}) > 1$ sehingga $|\{v_{1tx}, v_{1ty}\} \cap N(v_{ktd})| = 0 \neq 1$. Berdasarkan Definisi himpunan pembeda ketetanggaan lokal $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Oleh karena itu, $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Jadi $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $Go_kS_m$ dan $dim_{Al}(Go_kS_m) = |V(G)|$ ■

**Teorema 5.36** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, atau graf $P_n$ berordo $n \geq 2$ dan $m \geq 4$. Jika $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$ maka

$$dim_{AL}(GoC_m) = \begin{cases} |V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k+3 \\ |V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$.

**Bukti.** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, atau graf $P_n$ berordo $n \geq 2$. $S \subseteq V(G)$ dan $S = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}}\}$ merupakan himpunan dominasi minimal dari graf $G$, selanjutnya berdasarkan penamaan titik pada graf hasil operasi kali comb himpunan $S$ pada $GoC_m$ adalah $S^* = \{v_{n_1 1}, v_{n_2 1}, \dots, v_{n_{\gamma(G)} 1}\}$. Berdasarkan Teorema 4.1.3, $B_i = \left\{v_{i1}, v_{i5}, \dots, v_{i4(k-1)+1}, \dots, v_{i\left[4\left(\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil-1\right)+1\right]} \middle| k \leq \left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil\right\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n$ merupakan basis ketetanggaan lokal graf $C_m^i$. Terdapat empat kemungkinan nilai $m$ yaitu $m = 4k, m = 4k + 1, m = 4k + 2$, atau $m = 4k + 3$.

a. Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Dipilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Diambil sepasang titik bertetangga $x, y \in V(GoC_m) - W$, akibatnya $x, y \in C_m^i - B_i$. Karena $I \subseteq W$ maka berdasarkan Teorema 4.1.2, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Karena $B_i$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari $C_m$, maka $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $GoC_m$.

b. Sedangkan untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Misalkan $W = S \cup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}$ dengan $k = 2,3,\dots,\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Diambil sebarang titik yang bertetangga $x, y \in V(GoC_m) - W$. terdapat dua kasus yaitu $x, y \in I - S^*$ atau $x \in I - S^*$ dan $y \in C_m^i - \{v_{i4(k-1)}\}$.

(ii) Untuk $x, y \in I - S^*$, $x = v_{r1}$ dan $y = v_{k1}$ dengan $r, k \neq n_i, i = 1,2,\dots,\gamma(G)$. Dipilih $v_{i1} \in I$ dengan $d(v_{i1}, v_{r1}) = 1$ atau $d(v_{i1}, v_{k1}) > 1$. Oleh karena itu $|N(v_{i1}) \cap \{v_{r1}, v_{k1}\}| = |\{v_{r1}\}| = 1$.

(iii)Untuk $x \in I - S^*$ dan $y \in C_m^i - \{v_{i4(k-1)}\}$, akibatnya $x = v_{r1}$ $dan$ $y = v_{r2}$ dengan $r \neq n_i, i = 1,2,\dots,\gamma(G)$. Karena $S^*$ merupakan himpunan dominasi minimal dari induk, maka terdapat $v_{n_k 1} \in S^*$. Karena $d(v_{r1}, v_{n_k 1}) = 1$ dan $d(v_{r2}, v_{n_k 1}) > 1$ maka $|N(v_{n_k 1}) \cap \{v_{r1}, v_{r2}\}| = |\{v_{r1}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal. Diambil sebarang

$W' \subseteq V(GoC_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat empat kemungkinan nilai $m$ yaitu $m = 4k, m = 4k + 1, m = 4k + 2$, atau $m = 4k + 3$.

a. Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Karena $|W'| < |W|$ dan $|W'| < |\bigcup_{i=1}^{n} B_i|$, akibatnya terdapat $C_m^i$ sehingga maksimal terdapat $|B_i| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ sehingga maksimal terdapat $|B_1| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya $v_{1r}, v_{1h} \in W', r \neq h$, dan $l(v_{1r} - v_{1h}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23.1, $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

b. Sedangkan untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$ dengan $k = 2,3,\dots,\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$ atau $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G), H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_m^i$, dan $|H'| < \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$.

i. Untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$ dengan $k = 2,3,\dots,\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Karena $I'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal, maka terdapat titik $v_{r1} \in I$ - $I'$ sehingga $d(v_{r1}, v_{n_k1}) > 1, v_{n_k1} \in I'$. Terdapat pasangan titik bertetangga $v_{rp}, v_{rq} \in W'$ dengan $p \neq q$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k1}, v_{n_k1} \in I'$ atau $x = v_{ih}$ dengan $h \neq 1, v_{ih} \in H'$. Jika $x = v_{n_k1}$ maka $v_{rp}, v_{rq} \notin N(x)$. Sedangkan jika $x = v_{v_{ih}}$ maka $v_{rp}, v_{rq} \notin N(x)$. Akibatnya $|\{v_{rp}, v_{rq}\} \cap N(x)| \neq 1$.

ii. Selanjutnya untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_m^i$, dan $|H'| < \left|\bigcup_{i=1}^{n}\{v_{i4(k-1)}\}\right|$ dengan $k = 2,3,\dots,\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Terdapat $C_m^i$ sehingga maksimal terdapat $\left|\{v_{i4(k-1)}\}\right| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ sehingga maksimal terdapat $(|v_{14(k-1)}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{1p}, v_{1q} \in W'$ dengan $p \neq q$ dan $l(v_{1p} - v_{1q}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23.1 $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Berdasarkan uraian diatas $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dan $dim_{AL}(GoC_m) =$

$$\begin{cases} |V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k + 3 \\ |V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases} \blacksquare$$

**Teorema 5.37** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, atau graf $P_n$ berordo $n \geq 2$ dan $m \geq 4$. Jika $k \geq 1$ maka

$$dim_{AL}(Go^k C_m) = \begin{cases} |V(Go^{k-1}C_m)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(Go^{k-1}C_m), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k+3 \\ |V(Go^{k-1}C_m)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(Go^{k-1}C_m), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan $G' = Go^{k-1}C_m$, akibatnya $Go^kC_m = G'oC_m$. Bedasarkan Teorema 5.24.7, diperoleh $dim_{AL}(Go^kC_m) =$

$$\begin{cases} |V(Go^{k-1}C_m)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(Go^{k-1}C_m), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k+3 \\ |V(Go^{k-1}C_m)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(Go^{k-1}C_m), untuk\ m \text{ yang lain} \end{cases}$$

**Teorema 5.38** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, dan graf $P_n$ berordo $n \geq 2$ dan $m \geq 4$. Jika $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi dari graf $G$ dan $k \geq 1$ maka

$$dim_{AL}(Go_kC_m) = \begin{cases} k|V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ atau } m = 4k+3 \\ k|V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$.

**Bukti.** Misalkan $G$ merupakan graf $C_n$, graf $S_n$, graf $K_n$, dan graf $P_n$ berordo $n \geq 2$. $S \subseteq V(G)$ dan $S = \{v_{n_1}, v_{n_2}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}}\}$ merupakan himpunan dominasi minimal dari graf $G$, selanjutnya berdasarkan penamaan titik pada graf hasil operasi kali comb himpunan $S$ pada $Go_kC_m$ adalah $S^* := \{v_{n_1 01}, v_{n_2 01}, \dots, v_{n_{\gamma(G)}01}\}$. Berdasarkan Teorema 4.1.3 $B_{it} = \left\{v_{i01}, v_{it5}, \dots, v_{it4(k-1)+1}, \dots, v_{it\left[4\left(\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil - 1\right)+1\right]} \middle| k \leq \left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil\right\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n$ merupakan basis ketetanggaan lokal graf $C_m^{it}$. Terdapat empat kemungkinan nilai $m$ yaitu $m = 4k, m = 4k + 1, m = 4k + 2$, atau $m = 4k + 3$.

a. Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Dipilih $W = \bigcup_{i=1}^{nk} B_{it}$. Diambil sepasang titik bertetangga $x, y \in V(Go_kC_m) - W$, akibatnya $x, y \in C_m^{it} - B_{it}$. Karena $I \subseteq W$ maka berdasarkan Teorema 4.1.2, $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Karena $B_{it}$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari $C_m$, maka $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dari graf $Go_kC_m$.

b. Sedangkan untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Misalkan $W = S^* \bigcup_{i=1}^{nk}\{v_{it4(r-1)}\}$ dengan $r = 2,3,\dots,\left\lceil\frac{m}{4}\right\rceil$. Diambil sepasang titik bertetangga $x, y \in V(Go_kC_m) - W$. terdapat dua kasus yaitu $x, y \in I - S^*$ atau $x \in I - S^*$ dan $y \in C_m^{it} - \{v_{it4(k-1)}\}$.

(i) Untuk $x, y \in I - S^*, x = v_{r01}$ dan $y = v_{k01}$ dengan $r, k \neq n_i, i = 1,2, \dots, \gamma(G)$. Dipilih $v_{i01} \in I$ dengan $d(v_{i01}, v_{r01}) = 1$ atau $d(v_{i01}, v_{k01}) > 1$. Oleh karena itu $|N(v_{i01}) \cap \{v_{r01}, v_{k01}\}| = |\{v_{r01}\}| = 1$.

(ii) Untuk $x \in I - S^*$ dan $y \in C_m^{it} - \{v_{it4(k-1)}\}$, akibatnya $x = v_{r01}$ *dan* $y = v_{rt2}$ dengan $r \neq n_i, i = 1,2, \dots, \gamma(G)$. Karena $S^*$ merupakan himpunan dominasi dari induk, maka terdapat $v_{n_k01} \in S^*$. Karena $d(v_{r01}, v_{n_k01}) = 1$ dan $d(v_{rt2}, v_{n_k01}) > 1$ maka $|N(v_{n_k01}) \cap \{v_{r01}, v_{rt2}\}| = |\{v_{r01}\}| = 1$.

Berdasarkan uraian diatas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal minimal. Diambil sebarang $W' \subseteq V(G o_k C_m)$, $|W'| < |W|$. Terdapat empat kemungkinan nilai $m$ yaitu $m = 4k, m = 4k + 1, m = 4k + 2$, atau $m = 4k + 3$.

a. Untuk $m = 4k$ atau $m = 4k + 3$. Karena $|W'| < |W|$ dan $|W'| < |\bigcup_{i=1}^{nk} B_{it}|$, akibatnya terdapat $C_m^{it}$ sehingga maksimal terdapat $|B_{it}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ dan $t = 1$ sehingga maksimal terdapat $(|B_{11}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya $v_{1tr}, v_{1th} \in W', r \neq h$, dan $l(v_{1tr} - v_{1th}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23.1, $W'$ bukan merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

b. Sedangkan untuk $m = 4k + 1$ atau $m = 4k + 2$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |\bigcup_{i=1}^{nk}\{v_{i4(r-1)}\}|$ dengan $r = 2,3, \dots, \lceil \frac{m}{4} \rceil$ atau $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} C_m^{it}$, dan $|H'| < |\bigcup_{i=1}^{nk}\{v_{i4(r-1)}\}|$.

   i. Untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{nk} H'$ dengan $I' \subseteq I$, $|I'| < \gamma(G)$, dan $|H'| = |\bigcup_{i=1}^{nk}\{v_{i4(r-1)}\}|$ dengan $r = 2,3, \dots, \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Karena $I'$ bukan merupakan himpunan dominasi minimal, maka terdapat titik $v_{h01} \in I - I'$ sehingga $d(v_{h01}, v_{n_k01}) > 1, v_{n_k01} \in I'$. Terdapat pasangan titik bertetangga $(v_{htp}, v_{htq}) \in V(G o C_m) - W'$ dengan $p \neq q$. Diambil sebarang $x \in W'$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu $x = v_{n_k01}, v_{n_k01} \in I'$ atau $x = v_{ity}$ dengan $y \neq 1, v_{iy} \in H'$. Jika $x = v_{n_k01}$ maka $v_{htp}, v_{htq} \notin N(x)$. Sedangkan jika $x = v_{v_{ity}}$ maka $v_{htp}, v_{htq} \notin N(x)$. Akibatnya $|\{v_{htp}, v_{htq}\} \cap N(x)| \neq 1$

   ii. Selanjutnya untuk $W' = I' \bigcup_{i=1}^{n} H'$ dengan $|I'| = \gamma(G)$, $H' \subseteq \bigcup_{i=1}^{nk} C_m^{it}$, dan $|H'| < |\bigcup_{i=1}^{nk}\{v_{i4(r-1)}\}|$ dengan $r = 2,3, \dots, \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Terdapat $C_m^{it}$ sehingga maksimal terdapat

$|\{v_{i4(r-1)}\}| - 1$ titik yang menjadi anggota $W'$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $i = 1$ sehingga maksimal terdapat $(|v_{14(r-1)}| - 1)$ titik yang menjadi anggota $W'$. Akibatnya terdapat pasangan titik bertetangga $v_{1tp}, v_{1tq} \in W'$ dengan $p \neq q$ dan $l(v_{1tp} - v_{1tq}) > 4$. Berdasarkan Lemma 5.23.1, $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal.

Berdasarkan uraian diatas $W'$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu $W'$ merupakan basis ketetanggaan lokal dan $dim_{AL}(G \text{o}_k C_m) =$

$$\begin{cases} k|V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + V(G), \text{untuk } m = 4k \text{ antau } m = 4k + 3 \\ k|V(G)|(dim_{AL}(C_m) - 1) + \gamma(G), \text{untuk } m \text{ yang lain} \end{cases}$$ ■

**Teorema 5.39** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan $B$ dari $H$ dan merupakan himpunan dominasi, dan jika untuk setiap $v \in V(H) - B$ yang memenuhi $B \not\subseteq N_H(v)$, maka

$$dim_{Al}(G \odot H) = n. dim_{Al}(H)$$

**Bukti.** Misalkan $B_i$ adalah sebarang basis ketetanggaan lokal dari $H_i$.

Pilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Diambil sebarang dua titik yang bertetangga $x, y \in V(G \odot H) - W$ maka terdapat tiga kasus yaitu ( i ) $x, y \in V(H_i)$, ( ii ) $x, y \in V(G_0)$ dan ( iii ) $x \in V(G_0), y \in V(H_i)$.

( i ) Misalkan $x, y \in V(H_i)$. Karena $B_i$ adalah basis ketetanggaan lokal dari $H_i$ maka terdapat $s \in B_i \subseteq W$ sehingga $|N(s) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

( ii ) Misalkan $x, y \in V(G_0)$ maka terdapat $i, j \in \{1,2,3, \ldots, n\}$ dengan $i \neq j$ sehingga $x = v_i$ dan $y = v_j$. Dipilih $s \in B_i$, karena $sv_i \in E(G \odot H)$ dan $sv_j \notin E(G \odot H)$ maka $|N(s) \cap \{v_i, v_j\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

( iii ) Misalkan $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$. Karena $S_i \not\subseteq N_{H_i}(y)$, sehingga untuk setiap $s \in S_i - N_{H_i}(y)$ maka $sx \notin E(G \odot H)$ dan $sy \in E(G \odot H)$. Akibatnya, $|N(s) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal $G \odot H$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal $G \odot H$ dengan kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$, maka terdapat $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$, sehingga $x \in B_i$. Akan ditunjukkan bahwa $W \backslash \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Karena $B_i$ adalah basis dari $H_i$, maka $B_i \setminus \{x\}$ bukan himpunan pembeda dari $H_i$. Akibatnya terdapat dua titik bertetangga $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $r \neq t$ sehingga untuk setiap $s \in B_i \backslash \{x\}$, $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$. Diambil sebarang $s \in W \backslash \{x\}$. Karena $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ maka $v_{ir}, v_{it} \in V(G \odot H) - W \backslash \{x\}$. Terdapat dua kemungkinan $s \in B_i \setminus \{x\}$ atau $s \in B_j$ dengan $j \neq i$.

(i) Misalkan $s \in B_i \setminus \{x\}$, berdasarkan uraian sebelumnya $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$.

(ii) Misalkan $s \in B_j$ dan $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $i \neq j$, maka $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$.

Berdasarkan kasus di atas, diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, $W$ merupakan basis ketetanggaan lokal dengan $dim_{Al}(G \odot H) = n.dim_{Al}(H)$.

**Teorema 5.40** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan dari $H$ yang merupakan himpunan dominasi, untuk setiap basis ketetanggaan $B$ di $H$ terdapat $v \in V(H) - B$ yang memenuhi $B \subseteq N_H(v)$, maka

$$dim_{Al}(G \odot H) = n.dim_{Al}(H) + \gamma(G).$$

**Bukti.** Misalkan $D = \{v_{n_k} | k = 1,2,3,\dots,\gamma(G)\}$ merupakan himpunan dominasi dari graf $G$. Berdasarkan penamaan titik-titik hasil kali korona. $D_0 = \{v_{n_k0} | k = 1,2,3,\dots,\gamma(G)\} \subseteq G_0$. $B_i$ adalah sebarang basis ketetanggaan lokal dari $H_i$.

Pilih $W = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \cup D_0$. Diambil sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(G \odot H) - W$ maka terdapat tiga kemungkinan yaitu ( i ) $x, y \in V(H_i)$, ( ii ) $x, y \in V(G_0)$, dan ( iii ) $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$.

( i ) Misalkan $x, y \in V(H_i)$. Karena $B_i$ adalah basis ketetanggaan lokal dari $H_i$ maka terdapat $s \in B_i \subseteq W$ sehingga $|N(s) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

( ii ) Misalkan $x, y \in V(G_0)$ maka terdapat $i, j \notin \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{\gamma(G)}\}$ dengan $i \neq j$ sehingga $x = v_i$ dan $y = v_j$. Dipilih $t \in D_0$. Karena $tv_i \in E(G \odot H)$ dan $tv_j \notin E(G \odot H)$ maka

$|N(t) \cap \{v_i, v_j\}| = |N(t) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

( iii ) Misalkan $x \in V(G_0)$ dan $y \in V(H_i)$ maka terdapat $i \in \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_{\gamma(G)}\}$ dan $j \in \{1,2,3, \dots, m\}$ sehingga $x = v_i$ dan $y = v_j$. Dipilih $t \in D_0$. Karena $tv_i \in E(G \odot H)$ dan $tv_j \notin E(G \odot H)$ maka $|N(t) \cap \{v_i, v_j\}| = |N(t) \cap \{x, y\}| = 1$. Oleh karena itu $x, y$ memiliki pembeda ketetanggaan lokal di $W$.

Berdasarkan uraian di atas maka $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal graf $G \odot H$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal $G \odot H$ yang mempunyai kardinalitas minimal. Diambil sebarang $x \in W$. Akan ditunjukkan bahwa $W \backslash \{x\}$ bukan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Terdapat dua kemungkinan yaitu terdapat $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$, sehingga $x \in B_i$ atau $x \in D_0$.

(i) Misalkan terdapat $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$, sehingga $x \in B_i$. Karena $B_i$ adalah basis dari $H_i$, maka $B_i \setminus \{x\}$ bukan himpunan pembeda dari $H_i$. Akibatnya terdapat dua titik bertetangga $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $r \neq t$ sehingga untuk setiap $u \in B_i \backslash \{x\}$, $|N(u) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$. Diambil sebarang $s \in W \backslash \{x\}$. Terdapat tiga kemungkinan, yaitu $s \in B_i \setminus \{x\}$, $s \in B_j$ dengan $j \neq i$ atau $s \in D_0$.

a. Misalkan $s \in B_i \setminus \{x\}$, berdasarkan kasus di atas maka $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| \neq 1$.

b. Misalkan $s \in B_j$. Karena $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$ dengan $i \neq j$, maka $|N(s) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$.

c. Misalkan $s \in D_0$, maka terdapat $k \in \{1,2,3, \dots, \gamma(G_0)\}$ sehingga $s = v_{p_k 0}$. Terdapat dua kemungkinan yaitu $p_k \neq i$ atau $p_k = i$. Untuk $p_k \neq i$ diperoleh bahwa $|N(v_{p_k 0}) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 0 \neq 1$ sebab $v_{ir}, v_{it} \in V(H_i) - B_i \setminus \{x\}$, sedangkan untuk $p_k = i$ diperoleh bahwa $|N(v_{p_k 0}) \cap \{v_{ir}, v_{it}\}| = 2 \neq 1$.

(ii) Misalkan $x \in D_0$. Karena $D_0$ adalah himpunan dominasi dari $G_0$, maka $D_0 \backslash \{x\}$ bukan himpunan dominasi minimal dari $G_0$. Ada $u \in G_0$, sehingga untuk setiap $z \in D_0 \backslash \{x\}$, $z$ tidak bertetangga dengan $u$. Karena $u \in G_0$, maka terdapat $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ sehingga $u = v_{i0}$. Dipilih $y \in V(H_i) - B_i$. Berdasarkan pemilihan $u$ dan $y$ diperoleh bahwa $u, y \in V(G \odot H) - W \backslash \{x\}$. Diambil sebarang $s \in W \backslash \{x\}$. Terdapat dua kemungkinan, yaitu $s \in D_0 \setminus \{x\}$ atau $s \in B_i$.

a. Misalkan $s \in D_0 \setminus \{x\}$. Berdasarkan pemilihan $u$ dan $y$ diperoleh $|N(s) \cap \{x,y\}| = 0 \neq 1$.

b. Misalkan $s \in B_i$. Berdasarkan pemilihan $u$ diperoleh $us \in E(G \odot H)$, sedangkan $ys \in E(G \odot H)$ sebab $B_i$ merupakan basis dari $H_i$. Oleh karena itu $|N(s) \cap \{v_i, v_{ij}\}| = 2 \neq 1$.

Berdasarkan kasus di atas, diperoleh bahwa $W$ merupakan himpunan pembeda ketetanggaan lokal. Oleh karena itu, $W$ merupakan ketetanggaan lokal dengan $dim_{Al}(G \odot H) = n.dim_{Al}(H) + \gamma(G)$.

## 5.4. HUBUNGAN DIMENSI METRIK DENGAN PENGEMBANGAN KONSEPNYA

Hubungan dimensi metrik ketetanggaan graf $GoK_m$ dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $GoK_m$ diperoleh dari Teorema 3.1 dan teorema 5.1. Sedangkan, hubungan dimensi metrik ketetanggaan graf $GoS_m$ dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal pada graf $GoS_m$ diperoleh dari Teorema 3.2 dan Teorema 5.2. Kedua hubungan tersebut disajikan dalam akibat berikut.

**Akibat 5.4.1** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $\gamma(G)$ merupakan bilangan dominasi pada graf $G$. Jika $m \geq 3$, maka $dim_A(GoK_m) = dim_{A,l}(GoK_m)$.

**Akibat 5.4.2** Misalkan $G$ adalah graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $S_m$ berordo $m \geq 2$, maka $dim_A(GoS_m) = dim_{A,l}(GoS_m)\ dim_A(S_m) - 1 + \gamma(G)$.

Hubungan dimensi metrik ketetanggaan graf $G \odot H$ dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf $G \odot H$ diperoleh dari Teorema 4.1.1 dengan Teorema 4.2.1, hubungan tersebut disajikan dalam akibat berikut.

**Akibat 5.4.3** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan $B$ dari $H$ dan merupakan himpunan dominasi, dan jika untuk setiap $v \in V(H) - B$, $B \not\subseteq N_H(v)$, maka

$$\frac{dim_A(G \odot H)}{dim_A(H)} = \frac{dim_{Al}(G \odot H)}{dim_{Al}(H)}.$$

Hubungan dimensi metrik ketetanggaan graf $G \odot H$ dengan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf $G \odot H$ diperoleh dari Teorema 4.1.2 dengan Teorema 4.2.2, hubungan tersebut disajikan dalam akibat berikut.

**Akibat 5.4.4** Misalkan $G$ adalah sebarang graf terhubung berordo $n \geq 2$ dan $H$ adalah graf *non-trivial*. Jika terdapat basis ketetanggan dari $H$ yang merupakan himpunan dominasi, untuk setiap basis ketetanggaan $B$ di $H$ terdapat $v \in V(H) - B$ yang memenuhi $B \subseteq N_H(v)$, maka

$$\frac{dim_A(G \odot H) - dim_{Al}(G \odot H)}{dim_A(H) - dim_{Al}(H)} = |V(G)|.$$

## 5.5. LUARAN YANG DICAPAI

**Publikasi pada Jurnal Internasional Bereputasi**

1. On Commutative of Graph Operations with Respect to the Local Metric Dimension (Journal of Mathematics and Fundamental Sciences, Under review)
2. The Local Strong Metric Dimension and the Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-k (Journal of Mathematics and Fundamental Sciences, Under review).

**Seminar Nasional dan Internasional**

1. Konferensi Nasional Matematika 2018 di UB Malang:
2. Seminar Internasional MISEIC 2018 di Unesa Surabaya:

# BAB 6. KESIMPULAN DAN SARAN

## 6.1. KESIMPULAN

Dari penelitian ini, diperoleh hasil yang disajikan dalam kesimpulan di bawah ini.

1. Berhasil dibangun konsep dimensi metrik kuat lokal suatu graf.
2. Dimensi metrik kuat lokal graf khusus yang sudah ditemukan adalah graf siklus, graf lengkap, graf lintasan, dan graf bintang.
3. Dari graf-graf khusus di atas, dapat ditemukan karakterisasi graf dengan dimensi metrik kuat lokal tertentu.
4. Dapat ditemukan dimensi metrik kuat lokal graf hasil operasi korona.
5. Dimensi metrik ketetanggan untuk graf hasil operasi korona dan operasi comb dapat ditemukan untuk beberapa graf.
6. Dimensi metrik ketetanggaan lokal untuk graf hasil operasi kali comb dapat ditemukan untuk beberapa graf. Lebih lanjut berhasil ditemukan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf hasil operasi kali comb tingkat-$k$.
7. Berhasil ditemukan hubungan dimensi metrik ketetanggan dan dimensi metrik ketetanggaan lokal graf hasil operasi kali comb dan graf hasil operasi korona.

## 6.2. SARAN

Untuk penelitian lebih lanjut, dimensi metrik untuk graf subdivisi, graf yang memuat *clique* atau graf *H-covering*. Penelitian juga bisa dikembangkan dengan membangun konsep baru dimensi metrik dengan memandang dari aspek negasi atau komplemen.

# DAFTAR PUSTAKA


Chartrand, G. and Oellerman, O. R., 1993, *Applied and Algorithmic Graph Theori*, McGraw-Hill Inc, United States.

Cynthia, J.A. and Ramya, 2014, The Local Metric Dimension of Cyclic Split Graph, *Annals of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 8, No. 2: 201-205.

Godsil, C.D. and McKay, B.D., 1978, A New Graph Product and Its Spectrum, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 18: 21-28.

Iswadi, H. dkk ., 2010, *The Metric Dimension of Amalgamation of Cycles*, Far East Journal of Mathematics Sciences, Volume 41, Number 1, pp 19 – 31.

Iswadi, H., Baskoro, E.T., and Simanjuntak, R. 2011, *On the Metric Dimension of Corona Product of Graphs*, Far East Journal of Mathematics Sciences, Volume 52, Number 2, pp 155 – 170.

Kousar, I. dkk, 2010, *Graphs with Same Diameter and Metric Dimension,* Journal of Prime Research in Mathematics, Vol. 6, pp 22 – 31.

Khalil, A.A. dan Khalil, O.A., 2010, *Determination and Testing the Dominaton Numbers of Tadpole Graph, Book Graph and Stacked Book Graph Using Matlab*, College of Basic Education Researchers Journal, Vol. 10, No. 1.

Klein, D.J., Yi, E., 2012, *A Comparison on Metric Dimension of Graphs, Line Graphs, and Line Graphs of the Subdivision Graphs*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, volume 5, No. 3, 302-316.

Kuziak, D., Yero, I.G., and Rodriguez-Velazquez, J.A., 2015, On The Strong Metric Dimension of the Strong Productsof Graphs, *Open Mathematics*, 13: 64-74.

Okamoto, F., Crosse, L., Phinezy, B., Zhang, P., and Kalamazo, 2010, The local metric dimension of graph, *Mathematica Bohemica,* 135(3): 239 – 255.

Ramirez-Cruz, Y., Oellermann, O.R., and Rodriguez-Velazquez, J.A., 2015, The Simultaneous Metric Dimension of Graph Families, *Combinatorial And Computational Results, Arxiv: 1501.00565.v1 (Math Co), 3 Ja*

Rodriguez, J.A.,dkk. 2011, *On the Partition Dimension of Unicyclic Graphs*, arXiv:1111.3513v1 [math. CO].

Rodriguez-Velazquez, J.A. and Fernau, H. 2013, On the (adjacency) metric dimension of corona and strong product graph and their local variants: combinatorial and computational results, *Combinatorial And Computational Results, Arxiv: 1309.2275.v1 (Math Co), 9 September.*

Rodriguez-Velazquez, Gomez. C.G., and Barragan-Ramirez, G.A., 2014, Computing the Local Materic Dimension of Graph From The Local Metric Dimension of Primary Subgraph, *arxiv:1402.0177v1[math. CO] 2 Feb 2014.*

Saputro, S. W., Mardiana, N., and Purwasi, I.A., 2013, The Metric Dimension of Comb Product Graph, *Graph Theory Conference in Honor of Egawa's 60th Birthday*, September 10 to 14, [internet] [sitasi 22 Oktober 2013], didapat dari: http://www.rs.tus.ac.jp/egawa_60th_birthday/abstract/contributed_talk/Suhadi_Wido_Saputro.pdf.

Sebo and E. Tannier, 2004, On metric generators of graphs, Math. Oper. Res., 29(2), 383-393.

**Susilowati, L., Slamin, Utoyo, M.I.,** and Estuningsih, N., **2015**, The Similarity of Metric Dimension and Local Metric Dimension of Rooted Product Graph, *Far East Journal of Mathematics Sciences*, Volume 97, Number 7, Pages 841-856, In Press.

**Susilowati, L., Slamin, and Utoyo, M.I., 2016,** On Commutative Characterization of Graph Operations With Respect to Local Metric Dimension, *Far East Journal of Mathematics Sciences*, Volume 100, Number 4, Pages 643-660 .

**Susilowati, L., Slamin, and Utoyo, M.I., 2017,** On Commutative Characterization of Graph Operation with Respect to Metric Dimension, *Journal of Mathematics and Fundamental Sciences*, Vol. 49, No. 2, 156-170.

Yero, I.G.,dkk, 2010, *A Note on the Partition Dimension of Cartesian Product Graphs*, Applied Mathematics and Computation 217, pp 3571 – 3574.

Yero, I G., dkk, 2010, *On the Metric Dimension of Corona Product Graphs*, arXiv:1009.2586v2[math CO] 7 Oct.

Universitas Airlangga, 2016, *Rencana Induk Penelitian 2016-2020 Universitas Airlangga.*

# LAMPIRAN

**Lampiran 1: Personalia tenaga pelaksana beserta kualifikasinya**

| No | Nama/NIDN | Instansi Asal | Bidang Ilmu | Alokasi Waktu (jam/minggu) | Uraian Tugas |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Liliek Susilowati/ 0001127004 | FST Universitas Airlangga | Matematika/ Aljabar | 5 | Merumuskan masalah dan menyelesaikan masalah |
| 2. | Prof. Drs., Slamin, M.Comp. Sc, Ph.D / 0020046701 | PSSI Universitas Jember | Aljabar/ Komputasi | 2 | Mengontrol kevalidan hasil |
| 3 | Dr.Moh. Imam Utoyo, M.Si/ 0001036403 | FST Universitas Airlangga | Matematika/ Analisis | 4 | Membantu menyelesaikan masalah |

Tulis

← Kembali Arsipkan Pindahkan Hapus

Email Masuk 999+
Belum Dibaca
Berbintang
Draft 12
Terkirim
Arsip
Spam
Sampah
Lebih sedikit

Tampilan Sembunyikan
Foto
Dokumen

Folder Sembunyikan
+ Folder Baru

RE: On Commutative of Graph Operations with Respect to the Local Metric Dimension" (MSID:7034)

2

**liliek susi** <lilik_rofiudin@yahoo.co.id>
**Kepada:** J.Math.Fund.Sci.

Dear Dr. A. Agung Nugroho

I want to know the progress of review process of my paper entitled O
of Graph Operations with Respect to the Local Metric Dimensio

Thank you

With kind regards

Liliek Susilowati

**J.Math.Fund.Sci.** <jmfs@lppm.itb.ac.id>
**Kepada:** 'liliek susi'

Dear Ms. Liliek Susilowati,

Thank you for your email.

We are currently awaiting the reviewer review report, we will inform y
achieved sufficient review report.

Kind regards.

**Journal of Mathematical and Fundamental Sciences**

ITB Journal Publisher

jmfs@lppm.itb.ac.id

Perbarui zona waktu

9/14/2018, 10:06 AM

# On Commutative of Graph Operations with Respect to the Local Metric Dimension

**Liliek Susilowati[1], Mohammad Imam Utoyo [1] & Slamin[2]**
Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technology, Airlangga University, Jl. Mulyorejo Surabaya, 60115
Study Program of Information System, Universitas Jember[2], Jl. Kalimantan 37 Jember, 68121
Email: liliek-s@fst.unair.ac.id,

ABSTRACT

Let $G$ be a connected graph with vertex set $V(G)$ and $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subset V(G)$. The representation of a vertex $v \in V(G)$ with respect to $W$ is the ordered $m$-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_m))$ where $d(v,w)$ represents the distance between vertices $v$ and $w$. The set $W$ is called a *resolving set* for $G$ if every vertex of $G$ has a distinct representation with respect to $W$. A resolving set containing a minimum number of vertices is called *basis* for $G$. The *metric dimension* of $G$, denoted by $\dim(G)$, is the number of vertices in a basis of $G$. The set $W$ is called a *local resolving set* for $G$ if every two *adjacent* vertices of $G$ have a distinct representation and a minimum local resolving set is called a *local basis* of $G$. The cardinality of a local basis of $G$ is called the *local metric dimension* of $G$, denoted by $\dim_l(G)$. The comb product and the corona product are non-commutative operations in graph, but these operations can be commutative with respect to the local metric dimension for some graphs with certain conditions. In this paper, we determine the local metric dimension of the most generalized comb and corona products of graphs. Futhermore, we determine the commutative characterization of comb and corona products with respect to the local metric dimension.

**Keywords:** resolving set, basis, local basis, local metric dimension, the most generalized comb and corona products of graph, commutative characterization.

## 1. INTRODUCTION

Let $G$ be a finite, simple, and connected graph. The vertex and edge sets of graph $G$ are denoted by $V(G)$ and $E(G)$, respectively. The distance between vertices $v$ and $w$ in $G$, denoted by $d(v,w)$, is the length of the shortest path between them. For the ordered set $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V(G)$, and a vertex $v \in V(G)$, the representation of $v$ with respect to $W$ is the $m$-tuple, $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_m))$. The set $W$ is called a *resolving set* of $G$ if every vertex of $G$ has a distinct representation with respect to $W$. A minimum resolving set $W$ of graph $G$ is called a *basis* of $G$. The cardinality of a basis is called *metric dimension* of $G$, denoted by $\dim(G)$. The set $W$ is called a *local resolving set* of $G$ if every two adjacent vertices of $G$ have a distinct representation with respect to $W$, that is if $u, v \in V(G)$ such that $uv \in E(G)$) then $r(u|W) \neq r(v|W)$. A local resolving set of $G$ with minimum cardinality is called a *local basis* of $G$, and the cardinality of a local basis of $G$ is called the *local metric dimension* of $G$, denoted by $\dim_l(G)$.

Godsil and McKay [3] defined the rooted product graph as follows. Let $G$ be a graph on $n$ vertices and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ rooted graphs $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. The rooted product graph of $G$ by $\mathcal{H}$ denoted by $Go\mathcal{H}$ is a graph obtained by identifying the root of $H_i$ with the $i$-th vertex of $G$. Frucht and Harary [2] defined the corona product graph. The corona graph, $G \odot H$, of two graphs $G$ and $H$ is obtained by taking one copy of $G$ and $|V(G)|$ copies of $H$ and then joining by edge the $i$-th vertex of $G$ to every vertex in the $i$-th copy of $H$. In [6], Rodriguez et al. generalized the corona product $G \odot \mathcal{H}$, where $\mathcal{H}$ is a sequence of $n$ graphs $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, $H_i$ and $H_j$ may not be isomorphic. Saputro et al. [7] studied the metric dimension of the comb product graph $GoH$, which is a special case of a rooted product graph. Susilowati et al. [10] have left the open problem on the metric dimension of

$(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$-comb and $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$-corona of graph $G$ of order $n$ and $n$ sequence of graphs $\mathcal{H}$. In this paper, we determine the local metric dimension of $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$-comb and $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$-corona of graph $G$ of order $n$ and $n$ sequence of graphs $\mathcal{H}$ and the commutative characterization of comb and corona product with respect to local metric dimension.

Rodriguez et al. [6] observed the local metric dimension of rooted product graph as follow:

**Theorem 1.1.** [6] *Let $G$ be a connected labelled graph of order $n \geq 2$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected bipartite graphs $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$. Then, for any rooted product graph $Go\mathcal{H}$,* $\dim_l(Go\mathcal{H}) = \dim_l(G)$.

**Theorem 1.2.** [6] *Let $G$ be a connected labelled graph of order $n \geq 2$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected non-bipartite graphs $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$. Then, for any rooted product graph $Go\mathcal{H}$,* $\dim_l(Go\mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{n}(\dim_l(H_j) - \alpha_j)$,
*where $\alpha_j = 1$ if the root of $H_j$ belongs to a local basis of $H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise.*

Susilowati et al [10] defined the generalized comb product of graphs $Go_k \mathcal{H}$ and the generalized corona product of graphs $G \odot_k \mathcal{H}$. Futhermore, Susilowati et al [10] determined the metric dimension of $G\, o_k\, \mathcal{H}$ and $G \odot_k \mathcal{H}$. Rodriguez et al. [5] observed the local metric dimension of corona product graphs, as bellow.

**Theorem 1.3.** [5] *Let $H$ be a non empty graph. The following statements hold.*

(i). *If the vertex of $K_1$ does not belong to any local basis for $K_1 + H$, then for any connected graph $G$ of order $n$,*

$$\dim_l(G \odot H) = n \dim_l(K_1 + H).$$

(ii). *If the vertex of $K_1$ belongs to a local basis for $K_1 + H$, then for any connected graph $G$ of order $n \geq 2$,*

$$\dim_l(G \odot H) = n(\dim_l(K_1 + H) - 1).$$

**Theorem 1.4.** [6] *Let $G$ be a connected labeled graph of order $n \geq 2$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ non empty graphs $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$. Then, for any corona product graph $G \odot \mathcal{H}$,*

$$\dim_l(G \odot \mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{n}(\dim_l(K_1 + H_j) - \alpha_j),$$

*where $\alpha_j = 1$ if the vertex of $K_1$ belongs to a local basis of $K_1 + H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise.*

Okamoto et al. [4] discovered the characterization of local metric dimension for some graphs. Rodriguez et al. [6] and Susilowati et al. [8] observed the local metric dimension of rooted product graph. Susilowati et al [9] determined the local metric dimension of $G \circ_k \mathcal{H}$ and $G \odot_k \mathcal{H}$.

In this paper, we define the most generalized of comb product of graphs ($G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$), the most generalized of rooted product of graphs ($G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$) and the most generalized corona product of graphs ($G \odot_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$ and $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$), where $n = |V(G)|$. Futhermore, we analyse the metric dimension and local metric dimension of $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$, $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$, $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$ and $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$. We also formulate the necessary and sufficient conditions such that the local metric dimension of comb product graphs has the equal value, even though the position of graph that operated is exchanged. Likewise for the corona product graphs.

## 2. The Local Metric Dimension of the Most Generalized Of Comb Product Graphs

Let $G$ be a labelled graph on $n$ vertices and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ rooted graphs $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$. The $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$**-rooted** product graph of $G$ by $\mathcal{H}$ denoted by $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$ is obtained by taking one copy of $G$ and $k_i$ copies of $H_i$ for every $i = 1, 2, \dots, n$, that are $H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots, H_{1k_1}, H_{21}, H_{22}, H_{23}, \dots, H_{2k_2}, H_{31}, H_{32}, H_{33}, \dots, H_{3k_3}, \dots, H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}, \dots, H_{nk_n}$ and grafting the root of $H_{ij}$, $j = 1, 2, 3, \dots, k_j$ with the $i$-th vertex of $G$. If $o_{js}$ is the root of $H_{js}$, for $s = 1, 2, \dots, k$, then $o_{js} = o_j$ in the graph $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$, for $s = 1, 2, \dots, k_j$. If $H_i \cong H$ for every $i = 1, 2, 3, \dots, n$, then we get $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H} \cong G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$. In other words, $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} H$ is the special case of $G \circ_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} \mathcal{H}$.

Susilowati et al. [8] described the properties of rooted product graphs as the following lemma and observation.

**Observation 2.1.** [8] Let *$G$ be a labelled graph of order $n \geq 2$ and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected graphs $H_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$. In the rooted product graph $G \circ \mathcal{H}$, if every $H_j$ is connected bipartite graph then every two adjacent vertices in $H_j$ have distinct distance to the root of $H_j$ and to all vertices in $G \circ \mathcal{H}$.*

**Lemma 2.2.** [8] Let *$G$ be a labelled graph of order $n \geq 2$ and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected graphs $H_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. In the rooted product graph $G \circ \mathcal{H}$, if $o_j$ is the root of $H_j$,* and *$U_j$ is local basis of $H_j$, then the following statements hold.*

(i). *If $o_j \in U_j$ then there are two adjacent vertices $x, y$ in $H_j$ such that $r(x|S) = r(y|S)$ for every $S \subset V(H_j)$, $|S| \leq |U_j| - 2$.*

(ii). *If $o_j \notin U_j$ then there are two adjacent vertices $x, y$ in $H_j$ such that $r(x|S) = r(y|S)$ for every $S \subset V(H_j)$, $|S| \leq |U_j| - 1$.*

Using Theorems 1.1. and 1.2 respectively, we get the corollaries 2.3 and 2.4 respectively, as bellow.

**Corollary 2.3.** *Let $G$ be a labelled connected graph of order $n \geq 2$. Let $H$ be a connected graph and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected bipartite rooted graphs $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. Then*

$$\dim_l(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}) = \dim_l(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ H) = \dim_l(G).$$

**Proof:** Let $G$ be a labelled connected graph of order $n \geq 2$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected bipartite rooted graphs $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. Let $H_{11}, H_{12}, H_{13}, \ldots, H_{1k_1}, H_{21}, H_{22}, H_{23}, \ldots, H_{2k_2}, H_{31}, H_{32}, H_{33}, \ldots, H_{3k_3}, \ldots, H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}, \ldots, H_{nk_n}$ are the $k_i$ copies of $H_i$ for every $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Let $o_{js}$ is the root of $H_{js}$, for $s = 1, 2, \ldots, k_j$, choose $W$ = local basis of $G$.

Take any two adjacent vertices $x, y$ in $H_{js}, j = 1, 2, \ldots, n$ ; $s = 1, 2, \ldots, k_j$. Because $H_{js}$ connected bipartite, by Observation 2.1, we get $d(x|z) \neq d(y|z)$ for every $z \in V(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H})$. Therefore $r(x|W) = r(y|W)$. Take any two adjacent roots $o_{is}, o_{js}$ in $G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}$. Because $W$ = local basis of $G$ then $r(o_{is}|W) \neq)$ $r(o_{js}|W)$ and $W$ is a local basis of $G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}$ . So $\dim_l(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}) = \dim_l(G)$. The same reason for $\dim_l(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ H) = \dim_l(G)$.■

**Corollary 2.4.** *Let $G$ be a connected labelled graph of order $n$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ connected non-bipartite rooted graphs of order at least two $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. If $o_j$ is the root of $H_j$ for every $j=1, 2,\ldots,n$, then*

$$\dim_l(G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{n} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j)$$

*where $\alpha_j = 1$ if $o_j$ belongs to a basis of $H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise.*

**Proof:** Let $G$ be a connected *labelled* graph of order $n \geq 2$ and let $\mathcal{H}$ be a sequence of the connected non bipartite rooted graphs $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. Let $H_{11}, H_{12}, H_{13}, \ldots, H_{1k_1}, H_{21}, H_{22}, H_{23}, \ldots, H_{2k_2}, H_{31}, H_{32}, H_{33}, \ldots, H_{3k_3}, \ldots, H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}, \ldots, H_{nk_n}$ are the $k_i$ copies of $H_i$ for every $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Let $o_{js}$ is the root of $H_{js}$ and $W_{js}$ is a local basis of $H_{js}$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, n.$ ; $s = 1, 2, \ldots, k_j$. Choose $W = \bigcup_{j=1}^{n}(\bigcup_{s=1}^{k}(W_{js} - \{o_{js}\}))$.

Take any two adjacent vertices $x, y$ in $G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\ \mathcal{H}$. By Lemma 2.2, we can proof that $W$ is a minimum local resolving set of $G\ o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}$ and $|W| = \sum_{j=1}^{n} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j)$, where $\alpha_j = 1$ if $o_j$ belongs to a basis of $H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise. ■

By Corollaries 2.3 and 2.4 we get Corollary 2.5 and Corollary 2.6 respectively, as below.

**Corollary 2.5.** *Let $G$ and $H$ be connected graphs. If $H$ be a bipartite graph, then*

$$\dim_l(G o_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n} H) = \dim_l(G).$$

**Corollary 2.6.** *Let $G$ be a connected graph of order n, H be a connected non bipartite graph of order at least 2, and o is a grafting vertex. Then*

$$\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}H)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} k_j(\dim_l(H)-1), & \text{if } o \text{ belongs to local basis of } H\\ \sum_{j=1}^{n} k_j(\dim_l(H)), & \text{otherwise}\end{cases}$$

**Theorem 2.7.** *Let $G$ be a connected labelled graph of order $n \geq 2$, and let $\mathcal{H}$ be a sequence of the combined of $n$ connected non-bipartite $H_1, H_2, \ldots, H_s$ and bipartite graphs $H_{s+1}, H_{s+2}, \ldots, H_n$, and $o_j$ is the root of $H_j$. Then*

$$\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H})\begin{cases}=\sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j)-\alpha_j), & \text{for } G=C_n, n \text{ odd}, s>1\\ & \text{or } G \text{ bipartite or } G=K_n, s=n-1\\ =\sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j)-\alpha_j)+1, & \text{for } G=C_n, n \text{ odd}, s=1\\ =\sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j)-\alpha_j)+\dim_l(G)-s, & \text{for } G=K_n, s<n-1\\ <\sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j)-\alpha_j)+n-s-1, & \text{otherwise}\end{cases}$$

*where $\alpha_j = 1$ if the root of $H_j$ belongs to a local basis of $H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise.*

**Proof:** **Case 1:** for $G = C_n, n$ odd, $s > 1$ or $G$ bipartite or $G = K_n, s = n-1$. Choose $W = \bigcup_{j=1}^{s}(\bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{jl} - \{o_{jl}\}))$, so $|W| = \sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j)$.

By Lemma 2.2. we can see that $W = \bigcup_{j=1}^{s}(\bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{jl} - \{o_{jl}\}))$ is a minimum local resolving set of $Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}$ and $\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j)$.

**Case 2:** for $G = C_n, n$ odd, $s = 1$. Choose $= \bigcup_{j=1}^{s}(\bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{jl} - \{o_{jl}\})) \cup \{z\} = \bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{1l} - \{o_{1l}\}) \cup \{z\}$, $z \in H_{jl}$ for any $j = s+1, s+2, \ldots, n$ ; $l = 1, 2, \ldots, k_j$ and $z \neq o_{1l}$. We can proof that $W$ is a minimum local resolving set of $Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}$ and $\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j) + 1$.

**Case 3:** for $G = K_n, s < n-1$. Choose

$W = \bigcup_{j=1}^{s}(\bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{jl} - \{o_{jl}\})) \cup \{u_{jl} | u_{jl} \neq o_{jl}, j = s+1, s+2, \ldots, n-1, l = 1,2,3,\ldots k_j\}$, Without loss of generality, let $s = n-2$, it means that $H_{jl}, j = 1, 2, \ldots, n-2$ are non bipartite graphs and $H_{(n-1)l}, H_{nl}$ are bipartite graphs and

$$W = \bigcup_{j=1}^{n-2}(\bigcup_{l=1}^{k_j}(U_{jl} - \{o_{jl}\})) \cup \{u_{(n-1)l} | u_{(n-1)l} \neq o_{(n-1)l}, l = 1,2,3,\ldots k_j\}.$$

We can proof that $W$ is a minimum local resolving set of $Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}$ and $\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}) = \sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j) + \dim_l(G) - s$.

**Case 4:** For $G$ is otherwise, $\dim_l(Go_{k_1,k_2,k_3,\ldots k_n}\mathcal{H}) < \sum_{j=1}^{s} k_j(\dim_l(H_j) - \alpha_j) + n - s - 1$, it is obvious because $K_n$ is the graph with the biggest local metric dimension respect to the its order. ■

## 3. The Local Metric Dimension of the Most Generalized of Corona Product Graphs

Let $G$ be a labelled graph on $n$ vertices and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ rooted graphs $H_1$, $H_2$, $H_3$, ..., $H_n$. The **$k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$-corona** product graph of $G$ by $\mathcal{H}$ denoted by $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}$ is obtained by taking one copy of $G$ and $k_i$ copies of $H_i$ for every $i$ = 1, 2, ...,$n$, that are $H_{11}, H_{12}, H_{13}, \ldots, H_{1k_1}, H_{21}, H_{22}, H_{23}, \ldots, H_{2k_2}, H_{31}, H_{32}, H_{33}, \ldots, H_{3k_3}, \ldots, H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}, \ldots, H_{nk_n}$ and and then joining by edge the $i$-th vertex of $G$ to every vertex in $j$-th copy of $H_i$, $j$ = 1, 2, 3, ..., $k_j$. If $H_i \cong H$ for every $i = 1,2,3,\ldots,n$, then we get $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H} \cong G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H$. In other words, $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H$ is the special case of $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}$.

**Lemma 3.1.** *Let $G$ be a connected nontrivial labelled graph. If $H$ be an empty graph and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ empty graphs $H_1$, $H_2$, $H_3$, ..., $H_n$, then*

$$\dim_l(G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H) = \dim_l(G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}) = \dim_l(G).$$

**Proof:** Let $H$ be an empty graph and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ empty graphs $H_1$, $H_2$, $H_3$, ..., $H_n$. Then there are no edge in $H$ and $\mathcal{H}$. In graph $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H$ and $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}$ respectively, every vertex in $H$ and $\mathcal{H}$ adjacents to one vertex only in $G$. Therefore, the local metric dimension of $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H$ and $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}$ depend on local metric dimension of $G$ only. ■

Using Theorem 1.3. and 1.4 respectively, we get the Corollaries 3.2 and 3.3 respectively, as bellow.

**Corollary 3.2.** *Let $H$ be a non empty graph. The following statements hold.*

*(i). If the vertex of $K_1$ does not belong to any local basis for $K_1 + H$, then for any connected graph $G$ of order $n$,*

$$\dim_l(G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\dim_l(K_1 + H)).$$

*(ii). If the vertex of $K_1$ belongs to a local basis for $K_1 + H$; then for any connected graph $G$ of order $n \geq 2$,*

$$\dim_l(G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} H) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\dim_l(K_1 + H) - 1).$$

**Corollary 3.3.** *Let $G$ be a connected labelled graph of order $n \geq 2$, and $\mathcal{H}$ be a sequence of $n$ non empty graphs $H_1$, $H_2$, $H_3$, ..., $H_n$. Then*

$$\dim_l(G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\dim_l(K_1 + H_i) - \alpha_i)$$

*where $\alpha_i = 1$ if the vertex of $K_1$ belongs to a local basis of $K_1 + H_j$ and $\alpha_j = 0$ otherwise.*

**Proof**: Let $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n,\}$, $B_i$ is a local basis of $H_i$ and $B_{ij}$ is a basis of $< v_i > + H_{ij}$. $i$ = 1, 2, ..., $n$; $j$ = 1, 2, ..., $k_i$. So $B_{ij} = B_i$ for $j$ = 1, 2, ..., $k_i$. Choose $W = \bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{k_i}(B_{ij} - \{v_i\}))$. Because $< v_i > + H_{ij} \approx K_1 + H_i$ so $|W| = \sum_{i=1}^{n} k_i(\dim_l(K_1 + H_i) - 1)$ if $v_i$ is an element of a local basis of $K_1 + H_i$ and $|W| = \sum_{i=1}^{n} k_i(\dim_l(K_1 + H_i))$ if $v_i$ is not an element of a local basis of $K_1 + H_i$. Futhermore, we can prove that $W$ is a local basis of $G \odot_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} \mathcal{H}$. ■

## 4. Commutative Characterization of Comb and Corona Products Graphs with Respect to the Local Metric Dimension

An operation * defined on two graphs is said commutative if $A*B \cong B*A$ for every graph $A$ and $B$. An operation * defined on two graphs $G$ and $H$ is said commutative with respect to local metric dimension if $\dim_l(G*H) = \dim_l(G*H)$, denoted by $(G*H) \cong_{\dim l} (H*G)$ [9].

In this section, we present commutative characterization of comb and corona products graphs with respect to the local metric dimension.

**Theorem 4.1.** *Let G and H be connected bipartite graphs of order at least two. Then*

$$\dim_l(G) = \dim_l(H) \text{ if and only if } (G\circ H) \cong_{\dim l} (H\circ G)$$

**Proof:** Let $G$ and $H$ be connected bipartite graphs. Let $(G\circ H) \cong_{\dim l} (H\circ G)$. It means that $\dim_l(G\circ H) = \dim_l(H\circ G)$. By Theorem 1.1, we get $\dim_l(G) = \dim_l(H)$.

Conversely, let $\dim_l(G) = \dim_l(H)$. By Theorem 1.1, we get $\dim_l(G) = \dim_l(G\circ H)$ and $\dim_l(H) = \dim_l(H\circ G)$. Therefore $\dim_l(G\circ H) = \dim_l(H\circ G)$. So $(G\circ H) \cong_{\dim l} (H\circ G)$. ∎

For the case of non bipartite graphs, the formula of commutative characterization of generalized comb product with respect to the local metric dimension is presented base on existence of grafting vertex, whether element of a local basis of graph operated.

**Theorem 4.2.** *Let G and H be connected graphs of order at least three. Let G and H be non bipartite graphs. If the grafting vertex of G∘H belongs to a local basis of H and the grafting vertex of H∘G belongs to a local basis of G, then*

$$|V(G)|\dim_l(H-1) = |V(H)|\dim_l(G-1) \text{ if and only if } (G\circ H) \cong_{\dim l} (H\circ G)$$

**Proof**: Let $G$ and $H$ be connected graphs of order at least three. Let $G$ and $H$ be non bipartite graphs. Let the grafting vertex of $G\circ H$ belongs to a local basis of $H$ and the grafting vertex of $H\circ G$ belongs to a local basis of $G$. Let $(G\circ H) \cong_{\dim l} (H\circ G)$.Theorem 1.2, we get $\dim_l(G\circ H) = |V(G)|(\dim_l(H) - 1)$ and $\dim_l(H\circ G) = |V(H)|(\dim_l(G) - 1)$.

Therefore $|V(G)|(\dim_l(H) - 1)) = |V(H)|(\dim_l(G) - 1)$.

So $|V(G)|(\dim_l(H - 1) = |V(H)|(\dim_l(G) - 1)$.

Conversely, let $|V(G)|(\dim_l(H) - 1) = |V(H)|(\dim_l(G) - 1)$. Then

$$|V(G)|(\dim_l(H) - 1) = |V(H)|(\dim_l(G) - 1).$$

Therefore $\dim_l(G\circ H) = \dim_l(H\circ G)$. ∎

For the case grafting vertex does not belong to a local basis of graph operated, given below.

**Theorem 4.3.** *Let G and H be connected graphs of order at least three. Let G and H be non bipartite graphs. If the grafting vertex of GoH does not belong to a local basis of H and the grafting vertex of HoG does not belong to a local basis of G, then*

$$|V(G)|\dim_l(H) = |V(H)|\dim_l(G) \text{ if and only if } (GoH) \cong_{\dim l} (HoG).$$

**Proof**: Let $G$ and $H$ be connected graphs of order at least three. Let $G$ and $H$ be non bipartite graphs. Let the grafting vertex of $GoH$ does not belong to a local basis of $H$ and the grafting vertex of $HoG$ does not belong to a local basis of $G$. Let $(GoH) \cong_{\dim l} (HoG)$. By Theorem 1.2, we get $\dim_l(GoH) = |V(G)|(\dim_l(H))$ and $\dim_l(HoG) = |V(H)|(\dim_l(G))$.

Therefore $|V(G)|(\dim_l(H)) = |V(H)|(\dim_l(G))$. So $|V(G)|\dim_l(H) = |V(H)|\dim_l(G)$.

Conversely, let $|V(G)|(\dim_l(H) = |V(H)|(\dim_l(G))$. Then $\dim_l(GoH) = \dim_l(HoG)$. In other words $(GoH) \cong_{\dim l} (HoG)$ ■

In the next theorems, we present the commutative characterization of generalized corona product with respect to local metric dimension.

**Theorem 4.4.** *Let G and H be non empty connected graphs. if the vertex of $K_1$ does not belong to a local basis of $K_1 + H$ and $K_1 + G$, then*

$$|V(G)|(\dim_l(K_1 + H)) = |V(H)|\dim_l(K_1 + G)) \text{ if and only if } (H \odot G) \cong_{\dim l} (G \odot H)$$

**Proof:** Let $G$ and $H$ be non empty connected graphs. Let the vertex of $K_1$ does not belong to a local basis of $K_1 + H$ and $K_1 + G$. Let $(G \odot H) \cong_{\dim l} (H \odot G)$. Based on Theorem 1.3.(i), we get $\dim_l(G \odot H) = |V(G)| (\dim_l(K_1 + H))$ and $\dim_l(G \odot_k H) = |V(G)| (\dim_l(K_1 + H))$.

Therefore $|V(G)| (\dim_l(K_1 + H)) = |V(H)| (\dim_l(K_1 + G))$.

So $|V(G)| \dim_l(K_1 + H) = |V(H)| \dim_l(K_1 + H)$.

Conversely, let $|V(G)| \dim_l(K_1 + H) = |V(H)| \dim_l(K_1 + H)$. Then

Based on Theorem 1.3.(i), we get $\dim_l(G \odot H) = \dim_l(H \odot G)$.

In other words $(G \odot H) \cong_{\dim l} (H \odot G)$. ■

**Theorem 4.5.** *Let G and H be non empty connected graphs of order at least two. If the vertex of $K_1$ belongs to a local basis of $K_1 + H$ and $K_1 + G$. Then*

$$|V(G)|(\dim_l(K_1 + H) - 1) = |V(H)|\dim_l((K_1 + G) - 1)$$

$$\text{if and only if } (H \odot G) \cong_{\dim l} (G \odot H).$$

**Proof:** Let $G$ and $H$ be non empty connected graphs of order at least two. Let the vertex of $K_1$ belongs to a local basis of $K_1 + H$ and $K_1 + G$. Let $(G \odot H) \cong_{\dim l} (H \odot G)$. By Theorem 1.3.(ii), we get,

$\dim_l(G \odot H) = |V(G)| (\dim_l(K_1 + H) - 1)$ and $\dim_l(H \odot G) = |V(H)| (\dim_l(K_1 + G) - 1)$.

Therefore$|V(G)| (\dim_l(K_1 + H) - 1) = |V(H)| (\dim_l(K_1 + G) - 1)$.

Conversely, let $|V(G)|\,(\dim_l(K_1 + H) - 1) = |V(H)|\,(\dim_l(K_1 + G) - 1)$. Then, by Theorem 1.3.(ii), we get $\dim_l(G \odot H) = \dim_l(H \odot G)$. In other words $(G \odot H) \cong_{\dim l} (H \odot G)$. ■

**Acknowledgements:** This research was supported by DRPM Indonesia through Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi Universitas Airlangga 2018.

**References**

[1] G. Chartrand, L. Eroh, M.A. Johnson, and O.R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, Discrete Appl. Math., 105 (200), 99–113.

[2] R. Frucht and F. Harary, On the corona of two graphs, Aequationes Mathematicae, 4(3)(1970), 322-325.

[3] C.D. Godsil and B.D. McKay, A new graph product and its spectrum, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 18 (1978), 21-28.

[4] F. Okamoto, L. Crosse, B. Phinezy, P. Zhang, and Kalamazo, The local metric dimension of graph, Mathematica Bohemica, 135(3)( 2010): 239 – 255.

[5] J.A. Rodriguez-Velazquez, G.A. Barragan-Ramirez, and C.G. Gomez, On the local metric dimension of corona product graphs, Combinatorial And Computational Results, Arxiv: 1308.6689.v1 (Math Co) (2013), 30 Agustus.

[6] J.A. Rodriguez-Velazquez, C.G. Gomez., and G.A. Barragan-Ramirez, Computing the local metric dimension of graph from the local metric dimension of primary subgraph, arxiv:1402.0177v1[math. CO](2014), 2 Feb.

[7] S.W Saputro, N. Mardiana, and I.A. Purwasi, The metric dimension of comb product graph, Graph Theory Conference in Honor of Egawa's 60th Birthday, September 10 to 14, [internet] [citation 22 October 2013]: http://www.rs.tus.ac.jp/egawa_60th_birthday/abstract/contributed_talk/Suhadi_Wido_Saputro.

[8] L. Susilowati, Slamin, M.I. Utoyo, and N. Estuningsih, the similarity of metric dimension and local metric dimension of rooted product graph, Far East Journal of Mathematical Sciences, 97(7) (2015), 841-856.

[9] L. Susilowati, M.I. Utoyo, and Slamin, On commutative characterization of generalized comb and corona products of graphs with respect to the local metric dimension, Far East Journal of Mathematical Sciences, 100(4) (2016), 643-660.

[10] L. Susilowati, M.I. Utoyo, and Slamin, On commutative characterization of graph operation with respect to metric dimension, Journal of Mathematical and Fundamental Sciences, Vol. 49, No. 2, 2017, 156-170.

jmfs@lppm.itb.ac.id

Click here to enable desktop notifications for Airlangga U

Move to Inbox

COMPOSE

Inbox (286)
Starred
Important
Sent Mail
Drafts (50)
Categories
More

liliek

No recent chats
Start a new one

# RE: [jmfs] Submission Acknowledgement from Journal of M

**J.Math.Fund.Sci.** <jmfs@lppm.itb.ac.id>
to me, ayune.rosfiana, utamidyahpurwa.

Dear Authors,

This is to confirm that the manuscript, "The Local Strong Metric Dimension and the Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-k" (M been received for consideration in the Journal of Mathematical and Fundamental Sciences.

Your article will be checked for plagiarism first before it will be reviewed by peer reviewers.

Just a gentle reminder that Author is requested to recommend at least 3 (t international/overseas referees and at least 3 (three) suitable local/domestic referees for your article who do not have any research cooperation with authors within the last three years (please provide names institution and email address). Total candidates of referee is at least 6 (six) referees. It should be better if you can provide referee's ORCID or SCOPUS Author ID or ResearcherID. The Journal will consider carefully a recommended exclusions, but will not always follow the reviewer recommendations. Author is also requested to send the highlights of pape for reviewers. The form of referee candidates and paper's highlights can be obtained at the end of this letter.

The due date to submit the form is 7 (seven) day from the submission date

For your information, author whose paper is accepted for publication in Journal of Mathematical and Fundamental Sciences is subjected to pay U

# The Local Strong Metric Dimension and the Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-$k$

**L. Susilowati, U.D. Purwati, A. Rosfiana**

Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technology, Universitas Airlangga, Surabaya, Indonesia[1], Jl. Mulyorejo Surabaya, 60115

liliek-s@fst.unair.ac.id, ayune.rosfiana@gmail.com, utamidyahpurwati@gmail.com

**Abstract**

Let $G$ be a connected graph and $V(G)$ is a set of vertex $G$ graph. Vertex $w \in V(G)$ is called as a strong resolver of vertices $u, v \in V(G)$, if there is the shortest path $u - w$ which contains $v$ or the shortest path $v - w$ which contains $u$. The set $W \subseteq V(G)$ is called as a strong resolving set of $G$, if for every two distinct vertices in $V(G)$ have a strong resolver in $W$. The minimum cardinality of strong resolving set of $G$ is called as strong metric dimension of $G$, denoted by $dim_s(G)$. The set $W \subseteq V(G)$ is called as a local strong resolving set of $G$ if for every two distinct adjacent vertices in $V(G)$ have a strong resolver in $W$. The minimum cardinality of local strong resolving set of $G$ is called as local strong metric dimension of $G$, denoted by $dim_{sl}(G)$. In this paper, the characterization of graph with certain local strong metric dimension, strong metric dimension of corona product graph of order-$k$, and local strong metric dimension of corona product graph of order-$k$ are examined.

**Key words:** *strong resolver, local strong resolving set, strong metric dimension, local strong metric dimension, corona of order-k*

AMS Subject Classification Numbers: 05C12, 05C76, 05C69.

## 1. INTRODUCTION

Let $G$ be a connected, simple and finite graph. A vertex set in $G$ is denoted by $V(G)$ and a edge set on $G$ is denoted by $E(G)$. The metric dimension concept was introduced by *Harary* in 1976 and the concept has been developed by other researchers. Chartrand, G. *et. al.* [3] found the characterization of graph with certain metric dimension. Sebo and Tannier [11] presented the definition of strong metric dimension on graph and Okamoto, *et al.* [7] developed the metric dimension concept into local metric dimension. Okamoto, *et al.* [7] succeed in finding the characterization of graph with certain local metric dimension. Baca, M., *et al.* [2] succeed in finding the metric dimension of regular bipartite graph, Ali, M., *et al.* [1] found the metric *dimension* of some graphs containing the cycle. Rodriguez, J.A., *et al.* [9] developed the strong metric dimension concept and found the strong metric dimension of strong product graphs.

Rodriguez, *et al.* [8] found the local metric dimension of corona product grpahs. Rodriquez, *et al.* [10] continued the research for rooted product graphs. Dorota Kuziak *et. ai.* [5] found strong metric dimension on graph of corona product. Meanwhile, Susilowati, *et al.* [12] found the similarity of metric dimension and local metric dimension of rooted product graph. In this paper, the concept of local strong metric dimension is established and the characterization of graph with certain local metric dimension is presented. Furthermore, the concept of strong metric dimension and local metric dimension is applied in corona product graph of order-$k$.

Let $G$ be a connected graph of order $n$ and $H$ is a graph of order at least two, then $G$ corona $H$ denoted by $G \odot H$ is a graph obtained by taking $n$ multiplication of $H$ which are $H_1, H_2, \dots, H_n$ and connecting vertex $i$ of graph $G$ to all vertices on graph $H_i$ [4]. For every natural number-$k$, *corona* product of order-$k$ of $G$ and $H$ is defined as $G \odot^k H = (G \odot^{k-1} H) \odot H$. Therefore, *corona* product of order-$k$ with natural number-$k$, denoted by $\odot^k$ is defined as:

$$G \odot^k H = \begin{cases} G \odot H & , \ if\ k = 1 \\ (G \odot^{k-1} H) \odot H & , \ if\ k \geq 2 \end{cases}$$

According to Oellermann and Peters-Fransen [5], let $G$ is a connected graph and $u, v \in V(G)$. The interval between vertex $u$ and vertex $v$ is denoted $I[u, v]$ is a set whose members are all of vertices included in the shortest path $u - v$. A vertex $w \in G$ is called as a strong resolver of a pair of $u, v$ if $v \in I[u, w]$ or $u \in I[v, w]$. The set $W \subseteq V(G)$ with $W \neq \emptyset$ is called as a strong resolving set of $G$ if every two vertices in graph $G$ have a strong resolver in $W$. The strong resolving set of $G$ with minimal cardinality is called as a strong basis of $G$ graph. The number of vertices in a strong basis of $G$ graph is called as a strong metric dimension $G$ graph, denoted by $dim_s(G)$.

## 2. Strong Metric Dimension of Corona Product Graph of Order-$k$

The strong resolving set properties in graph to support the main result is presented below.

**Lemma 2.1** *Let $G$ be a connected graph and $s \in V(G)$. If $u, v \in V(G)$ with $d(u, s) = d(v, s)$ then $s$ is not a strong resolver of pair vertices $u, v$.*

**Proof.** Let $G$ be a connected graph and $s, u, v \in V(G)$ with $d(u, s) = d(v, s) = k,\ k \in \mathbb{N}$.

Supposed that $s$ is a strong resolver of pair of vertices $u, v$ so $u \in I[v,s]$ or $v \in I[u,s]$ then there are three cases which are (i) $\in I[v,s]$, $v \notin I[u,s]$, (ii) $u \notin I[v,s]$, $v \in I[u,s]$, and (iii) $u \in I[v,s]$, $v \in I[u,s]$.

(i) Suppose $\in I[v,s]$, $v \notin I[u,s]$, and $I[v,s] = \{v = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k = s\}$. Because $u \in I[v,s]$ so there is $v_i \in I[v,s]$ with $i \in \{1,2,3, \dots, k-1\}$ so $v_i = u$. Then $d(u,s) < d(v,s)$. This is contradicted with statement $d(u,s) = d(v,s)$.

(ii) Suppose $\notin I[v,s]$, $v \in I[u,s]$, and $I[u,s] = \{u = u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k = s\}$. Because $v \in I[v,s]$ so there is $u_i \in I[v,s]$ with $i \subset \{1,2,3, \dots, k-1\}$ then $u_i = v$. Then $d(v,s) < d(u,s)$. This is contradicted with statement $d(u,s) = d(v,s)$.

(iii) Suppose $u \in I[v,s]$ and $v \in I[u,s]$. According to case (i) and case (ii), then it is obtained $d(u,s) < d(v,s)$ and $d(v,s) < d(u,s)$. Because $d(u,s) < d(v,s)$, $d(v,s) < d(u,s)$ then case (iii) is not possible to occur.

According to the explanation above, the three cases are not possible to occur so $s$ is not strong resolver of pair vertices $u, v$. Therefore, if $u, v \in V(G)$ with $d(u,s) = d(v,s)$ then $s$ is not strong resolver pair of vertices $u, v$. ■

**Lemma 2.2** *Let $G$ be a connected graph, $s, u, v \in V(G)$, and $uv \in E(G)$. If $d(u,s) < d(v,s)$ then $u \in I[v,s]$.*

**Proof.** Let $G$ be a connected graph, $s, u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$, $d(v,s) = l$, $d(u,s) = k$ with $k < l$ and $I[u,s] = \{u = u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k = s\}$. Because $uv \in E(G)$ so there are paths $v, u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$ with the length of path $k + 1 \leq l$. Therefore, there are two cases which are (i) $k + 1 < l$ and (ii) $k + 1 = l$.

The case (i) is not possible to happen because if $k + 1 < l$ then the path $v, u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = s$ has the length less than $l$ which causes $d(v,s) < l$. This contradicts with $d(v,s) = l$.

The case (ii) if $k + 1 = l$ then $v, u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = s$ is the shortest path of vertex $v$ to vertex $s$ so that $I[v,s] = \{v, u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Then $u \in I[v,s]$. So if $d(u,s) < d(v,s)$ then $u \in I[v,s]$. ■

**Lemma 2.3** *Let $G$ be a connected graph. If for every $W \subseteq V(G)$ with $|W| = k$ is not strong resolving set of $G$ graph then for every $S \subseteq V(G)$ with $|S| < |W|$ is also not strong resolving set of $G$ graph.*

**Proof.** If for every $W \subseteq V(G)$ with $|W| = k$ is not strong resolving set of $G$ graph. Suppose there is $S \subseteq V(G)$ with $|S| < |W|$ and $S$ is strong resolving set of $G$ graph.

If $|S| = l$ then for every two vertices in $G$ have strong resolver in $S$. Therefore, there is $W' = S \cup \{v_i | i = 1,2, \dots, k-l\}$ with $v_i \in V(G) \setminus S$ so $|W'| = k$ which is strong resolving set of $G$ graph. This contradicts with the statement for every $W \subseteq V(G)$ with $|W| = k$ is not strong resolving set of $G$ graph.

So for every $W \subseteq V(G)$ with $|W| = k$ is not strong resolving set of $G$ graph then for every $S \subseteq V(G)$ with $|S| < |W|$ is also not strong resolving set of $G$ graph. ■

Kuziak, D., *et. al.* [5] have presented the theorem of strong metric dimension of corona product graph, in this paper the theorem of strong metric dimension of corona product graph with different formula is presented. Furthermore, this formula is used to determine metric dimension of corona product graph of order-$k$.

**Theorem 2.4** *Let $G$ and $H$ be connected graphs with orders of $n_1$ and $n_2$ with $n_1, n_2 \geq 2$, so $dim_s(G \odot H) = (|V(G)| - 1)|V(H)| + dim_s(H)$.*

**Proof.** Suppose $V(G) = \{u_i | i = 1,2, \dots, n_1\}$ with $n_1 \geq 2$, $V(H) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n_2\}$ with $n_2 \geq 2$, $H_i$ is a copy of $H$graph order-$i$ with $i = 1,2, \dots, n_1$, $V(H_i) = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, n_2\}$ with $i = 1,2, \dots, n_1$. Therefore, $V(G \odot H) = V(G) \bigcup_{i=1}^{n_1} V(H_i)$ and $E(G \odot H) = E(G) \bigcup_{i=1}^{n_1} E(H_i) \cup \{u_i v_{ij} \,|\, u_i \in V(G),\ v_{ij} \in V(H_i)\}$. Suppose $dim_s(H_i) = k$ with $k < n_2$ and $S_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{ik}\}$ is strong basis of $H_i$ graph. $S = S_1 \bigcup_{i=2}^{n_1} V(H_i)$ is chosen. Because $H_i$ isomorphic with $H$ for every $i \in \{1,2, \dots, n_1\}$ so $|S| = (n_1 - 1)|V(H)| + k$ or $|S| = (|V(G)| - 1)|V(H)| + dim_s(H)$.

Furthermore, it is shown that $S$ is strong resolver of $G \odot H$ graph. Two distinctive vertices $x, y \in V(G \odot H)$ were taken, so there are four possible pairs of vertices which are (i) $x, y \in V(G)$, (ii) $x \in V(G)$ and $y \in V(H_i)$ with $i \in \{1,2, \dots, n_1\}$, (iii) $x, y \in V(H_i)$ with $i \in \{1,2, \dots, n_1\}$

and (iv) $x \in V(H_i)$ and $y \in V(H_j)$, $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,\dots,n_1\}$. After that, it is shown that every possible pair of two vertices has strong resolver in $S$.

(i) If $x, y \in V(G)$, there is $i,j \in \{1,2,\dots,n_1\}$ with $i \neq j$ so $x = u_i$ and $y = u_j$. Vertex $v_{i1} \in S$ is selected. Because $u_i \in I[u_j, v_{i1}]$, $v_{i1}$ is strong resolver of vertices $u_i, u_j$, so a pair of vertices $u_i, u_j$ has strong resolver in $S$.

(ii) If $x \in V(G)$ and $y \in V(H_i)$, there are $l, i \in \{1,2,\dots,n_1\}$, $j \in \{1,2,\dots,n_2\}$ so $x = u_l$ and $y = v_{ij}$. There are two possibilities which can happen, namely $l = i$ or $l \neq i$.

  a. If $u_l \in V(G)$, $v_{ij} \in V(H_i)$ with $l = i$ so $u_l = u_i$ and $v_{ij}$ is adjacent with $u_i$. $v_{m1} \in S$ is selected with $m \neq i$, $m \in \{1,2,\dots,n_1\}$ so $d(u_i, v_{m1}) < d(v_{ij}, v_{m1})$. Based on **Lemma 2.2**, $u_i \in I[v_{ij}, v_{m1}]$ and $v_{m1}$ is strong resolver of vertices $u_i, v_{ij}$. Therefore, a pair of vertices $u_i, v_{ij}$ has strong resolver in $S$.

  b. If $u_l \in V(G)$, $v_{ij} \in V(H_i)$ with $l \neq i$ and $v_{l1} \in S$ is selected. Because $u_l \in I[v_{ij}, v_{l1}]$ so $v_{l1}$ is strong resolver of vertices $u_i, u_j$, so a pair of vertices $u_i, u_j$ has strong resolver in $S$.

(iii) If $x, y \in V(H_i)$ with $i \in \{1,2,\dots,n_1\}$ there is $j, m \in \{1,2,\dots,n_2\}$ so $x = v_{ij}$ and $y = v_{im}$. Because $S_i$ is strong basis of $H_i$ graph, so there is $v \in S_i$ which is strong resolver of a pair of vertices $v_{ij}, v_{im}$. Because $S_i \subseteq S$, a pair of vertices $v_{ij}, v_{im}$also has strong resolver in $S$.

(iv) If $x \in V(H_i)$ and $y \in V(H_j)$ with $i \neq j$ and $i,j \in \{1,2,\dots,n_1\}$, there are $m, n \in \{1,2,\dots,n_2\}$ so $x = v_{im}$ and $y = v_{jn}$. Because $= S_1 \cup_{i=2}^{n_1} V(H_i)$ , $v_{im} \in S$ or $v_{jn} \in S$ so $v_{im} \in I[v_{im}, v_{jn}]$ or $v_{jn} \in I[v_{im}, v_{jn}]$. Therefore, a pair of vertices $v_{im}, v_{jn}$ has strong resolver in di $S$.

Based on the explanation above, $S$ is strong resolving set of $G \odot H$ graph. Furthermore, it is shown that $S$ is strong resolving set of $G \odot H$ graph which has minimal cardinality. $S' \subseteq V(G \odot H)$ is taken with $|S'| < |S|$ so the maximum cardinality of $S'$ is $|S| - 1$. Suppose $|S'| = |S| - 1$. Without losing the generality of proof, $S = S_1 \cup_{i=2}^{n_1} V(H_i)$ is selected so there are two cases, which are (i) $S' = S_1 \backslash \{x\} \cup_{i=2}^{n_1} V(H_i)$ with $x \in S_1$ and (ii) $S' = S_1 \cup_{i=2}^{n_1} V(H_i) \backslash \{y\}$ with $y \in V(H_i)$, for one $i \in \{2,3,\dots,n_1\}$.

(i) Without losing the generality of proof, suppose $S' = S_1 \backslash \{v_{11}\} \cup_{i=2}^{n_1} V(H_i)$ so a set which consisted of $H_1$ element which become $S'$ element is $W = \{v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1k}\}$ with $|W| = |S_1| - 1$. Because $S_1 = \{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1k}\}$ is strong basis of $H_1$ and $v_{11} \notin W$ so $W$ is not strong resolving set of $H_1$ and there are two vertices in di $H_1$ which don't have strong resolver $W$, if $v_{1x}$ and $v_{1y}$, $x, y \in \{1,2, \ldots, n_2\}$. Furthermore, it is shown that $v_{1x}, v_{1y}$ also doesn't have strong resolver$S'$. $v \in S' \setminus W$ is taken so $d(v_{1x}, v) = d(v_{1y}, v)$ so according to **Lemma 2.1**, $v$ is not strong resolver of vertices $v_{1x}, v_{1y}$ and a pair of vertices $v_{1x}, v_{1y}$ does not have strong resolver in $S' \setminus W$. Because $v_{1x}, v_{1y}$ do not have strong resolver in di $W$ and $S' \setminus W$, a pair of vertices $v_{1x}, v_{1y}$ does not have strong resolver in $S'$ and $S'$ is not strong resolving set

(ii) Without losing the generality of proof, suppose $S' = S_1 \cup V(H_2) \backslash \{v_{21}\} \cup_{i=3}^{n_1} V(H_i)$. Because $S_1 = \{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1k}\}$ with $k < n_2$ so there are $v_{1n_2} \in H_1$ and $v_{1n_2} \notin S'$, and there is $v_{1n_2}, v_{21} \notin S'$. It is proven that $v_{1n_2}, v_{21}$ do not have strong resolver in $S'$. $s \in S'$ is taken so there are three possibilities, namely (1) $s \in S_1$ (2) $s \in V(H_2)$, (3) $s \in V(H_i)$ with $i \in \{3,4, \ldots, n_1\}$

1) Suppose $s \in S'$, $s \in S_1$, there is $j \in \{1,2, \ldots, k\}$ so $s = v_{1j}$. It is proven that $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{1j}]$ and $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{1j}]$. Because $v_{1n_2}, v_{1j} \in V(H_1)$ so if $v \in I[v_{1n_2}, v_{1j}]$ is taken, it causes $v \in V(H_1)$ so $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{1j}]$. Because $I[v_{21}, v_{1j}] = I[v_{21}, u_2] \cup I[u_2, u_1] \cup I[u_1, v_{1j}]$ and $v_{21}u_2, u_1v_{1j} \in E(G \odot H)$ so $I[v_{21}, u_2] = \{v_{21}, u_2\}$ and $I[u_1, v_{1j}] = \{u_1, v_{1j}\}$, therefore $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, u_2]$ and $v_{1n_2} \notin I[u_1, v_{1j}]$. Because $u_2, u_1 \in V(G)$ so if $u_t \in I[u_2, u_1]$ is taken, it causes $u_t \in V(G)$ so $v_{1n_2} \notin I[u_2, u_1]$. Therefore, $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{1j}]$. Because $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{1j}]$ and $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{1j}]$ so $v_{1j}$ is not strong resolver of a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$, so a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$ does not have strong resolver in $S_1$.

2) Suppose $s \in S'$, $s \in V(H_2)$, there is $j \in \{1,2, \ldots, n_2\}$ so $s = v_{2j}$. It is proven that $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{2j}]$ and $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{2j}]$. Because $v_{21}, v_{2j} \in V(H_2)$ so if $v \in I[v_{21}, v_{2j}]$ is taken, it causes $v \in V(H_2)$ so $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{2j}]$. Because $I[v_{1n_2}, v_{2j}] = I[v_{1n_2}, u_1] \cup I[u_1, u_2] \cup I[u_{u_2j}, v_{2j}]$ and $v_{1n_2}u_1, u_2v_{2j} \in E(G \odot H)$ so $I[v_{1n_2}, u_1] = \{v_{1n_2}, u_1\}$ and $I[u_2, v_{2j}] = \{u_2, v_{2j}\}$. Therefore, $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, u_1]$ and $v_{21} \notin I[u_2, v_{2j}]$.

Because $u_1, u_2 \in V(G)$ so fro $u_t \in I[u_1, u_2]$ causes $u_t \in V(G)$, so $v_{21} \notin I[u_1, u_2]$. therefore $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{2j}]$. Because $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{2j}]$ and $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{2j}]$ so $v_{2j}$ are not strong resolver of a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$, so a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$ does not have strong resolver in $V(H_2)$.

3) Suppose $s \in S'$, $s \in V(H_i)$ with $i \in \{3,4,\dots,n_1\}$, there is $j \in \{1,2,\dots,n_2\}$ so $s = v_{ij}$. It is proven that $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{ij}]$ and $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{ij}]$. Because $I[v_{21}, v_{ij}] = I[v_{21}, u_2] \cup I[u_2, u_i] \cup I[u_i, v_{ij}]$ and $v_{21}u_2, u_i, v_{ij} \in E(G \odot H)$ so $I[v_{21}, u_2] = \{v_{21}, u_2\}$ and $I[u_i, v_{ij}] = \{u_i, v_{ij}\}$, so $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, u_2]$ and $v_{1n_2} \notin I[u_i, v_{ij}]$. Because $u_2, u_i \in V(G)$ so for $u_t \in I[u_2, u_i]$ causes $u_t \in V(G)$, so $v_{1n_2} \notin I[u_2, u_i]$. Therefore, $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{ij}]$. Because $I[v_{1n_2}, v_{ij}] = I[v_{1n_2}, u_1] \cup I[u_1, u_i] \cup I[u_i, v_{ij}]$ and $v_{1n_2}u_1, u_iv_{ij} \in E(G \odot H)$ so $I[v_{1n_2}, u_1] = \{v_{1n_2}, u_1\}$ and $I[u_i, v_{ij}] = \{u_i, v_{ij}\}$, so $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, u_1]$ and $v_{21} \notin I[u_i, v_{ij}]$. Because $u_1, u_i \in V(G)$ so for $u_t \in I[u_1, u_i]$ causes $u_t \in V(G)$, so $v_{21} \notin I[u_1, u_i]$. Therefore, $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{ij}]$. Because $v_{1n_2} \notin I[v_{21}, v_{ij}]$ and $v_{21} \notin I[v_{1n_2}, v_{ij}]$ so $v_{ij}$ is not strong resolver of a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$, so a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$ does not have strong resolver in $V(H_i)$ with $i \in \{3,4,\dots,n_1\}$ and so a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$ does not have strong resolver in $S'$.

Because a pair of vertices $v_{1n_2}, v_{21}$ does not have strong resolver in $S_1$, di $V(H_2)$, or in $V(H_i)$ with $i \in \{3,4,\dots,n_1\}$, . Thus, $v_{1n_2}, v_{21}$ also does not have strong resolver in $S'$. Therefore, $S'$ is not strong resolving set.

According to case (i) and (ii), it is obtained that a $S' \subseteq V(G \odot H)$ with $|S'| = |S| - 1$ is not strong set resolving set of $G \odot H$ graph. Because $S'$ is not strong resolving set of $G \odot H$ graph, so according to **Lemma 2.3**, $S'' \subseteq V(G \odot H)$ with $|S''| < |S'|$is also not strong resolving set of $G \odot H$ graph. So, $S$ is strong basis of $G \odot H$ graph and $dim_s(G \odot H) = (|V(G)| - 1)|V(H)| + dim_s(H)$. ■

**Corollary 2.5** *Let $G, H$ be a connected graph of order at least two. so*

$$dim_s(G \odot^k H) = (|V(G \odot^{k-1} H)| - 1)|V(H)| + dim_s(H).$$

**Proof.** Let $G, H$ be a connected graph of order at least two and $G' = G \odot^{k-1} H$, so $(G \odot^{k} H) = G' \odot H$. According to **Theorem 2.4**, which states that $dim_s(G' \odot H) = (|V(G')| - 1)|V(H)| + dim_s(H)$, so $dim_s(G \odot^{k} H) = (|V(G \odot^{k-1} H)| - 1)|V(H)| + dim_s(H)$. ■

## 3. Local Metric Dimension of a Graph

A set of $W \subseteq V(G)$ with $W \neq \emptyset$ is called as **local strong resolving set** of graph $G$ if every two adjacent vertices in $G$, it has strong resolver in $W$. Local strong resolving set of $G$ with minimum cardinality is called as **local strong basis** of $G$ graph. The cardinality of local strong basis of graph $G$ is called as **local strong metric dimension** of $G$ graph, denoted by $dim_{sl}(G)$.

Local strong metric dimension of certain graphs is presented below, those graphs are path graph $P_n$, cycle graph $C_n$. star graph $S_n$, and complete graph $K_n$, to obtain the characterization of graph with certain local strong metric dimension.

**Theorem 3.1** $dim_{sl}(P_n) = 1$.

**Proof.** Suppose $V(P_n) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n\}$, $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-1\}$, $P_n$ graph has path of $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ and $S = \{v_1 | \deg v_1 = 1\}$ is selected.

It is proven that $S$ is local strong resolver of $P_n$ graph. Two adjacent vertices $v_i, v_{i+1} \in V(P_n)$, $v_i v_{i+1} \in E(P_n)$ with $i = 1,2, \dots, n-1$ are taken, so $v_i \in I[v_1, v_{i+1}]$ therefore $v_1$ is strong resolver of vertices $v_i, v_{i+1} \in V(P_n)$. Hence, $S$ is local strong resolving set of $P_n$ graph.

Local strong resolving set of a graph is not possible to be empty set, so set $S$ is local strong resolving set with minimum cardinality therefore $S$ is local strong basis of $P_n$ graph. Thus, $dim_{sl}(P_n) = 1$. ■

**Theorem 3.2** $dim_{sl}(C_n) = \begin{cases} 1 & if\ n\ is\ even \\ 2 & if\ n\ is\ odd \end{cases}$

**Proof.** Suppose $C_n$ graph has order $n$ so there are two possibilities which are; $n$ is even number or $n$ is odd number.

**Case 1.** For even $n$ which is $n = 2k, k \geq 2$.

Suppose $V(C_n) = \{u_i, v_i | i = 1,2, \dots, k\}$ and

$E(C_n) = \{u_i u_{i+1},\ u_k v_k,\ v_i v_{i+1}, u_1 v_1 | i = 1,2,\dots,k-1\}$, $C_n$ graph has cycle of $u_1, u_2, \dots u_{k-1}, u_k, v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, u_1$ and $S = \{u_1\}$ is selected. It is proven that $S$ is local strong resolver of $C_n$ graph. Two adjacent vertices of $u, v \in V(C_n)$, $uv \in E(C_n)$ are taken, so there are four possible pairs which are $(i)\, u = u_i, v = u_{i+1}$ for $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, $(ii)\, u = u_k, v = v_k$, $(iii)\, u = v_i, v = v_{i+1}$, for $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, and $(iv)\, u = u_1,\ v = v_1$. Furthermore, it is shown that every possible pair of vertices has strong resolver in $S$.

(i) $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$ with $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ is taken, so $u_i \in I[u_1, u_{i+1}]$ therefore $u_1$ is strong resolver of a pair of vertices $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$.

(ii) $u_k v_k \in V(C_n)$ is taken, so $u_k \in I[u_1, v_k]$ therefore $u_1$ is strong resolver of a pair of vertices $u_k, v_k$.

(iii) $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$ with $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ is taken, so $v_i \in I[u_1, v_{i+1}]$ therefore $u_1$ is strong resolver of a pair of vertices $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$.

(iv) $u_1, v_1 \in V(C_n)$ is taken, so $u_1 \in I[u_1, v_1]$ therefore $u_1$ is strong resolver of a pair of vertices $u_1, v_1$.

Based on the explanation above, $u_1$ is strong resolver for every possible adjacent pair of vertices in $C_n$, so $S$ is local strong resolving set of $C_n$ graph. Local strong resolving set of a graph is not possible to be an empty set, so $S$ is local strong resolving set with minimum cardinality, therefore $S$ is local strong basis of $C_n$ graph. Thus, $dim_{sl}(C_n) = 1$ is for even $n$.

**Case 2.** For odd $n$, which is $n = 2k + 1,\ k \geq 1$

Suppose $V(C_n) = \{w, u_i, v_i | i = 1,2,\dots,k\}$ and

$E(C_n) = \{wu_1,\ u_i u_{i+1},\ u_k v_k,\ v_i v_{i+1}, v_1 w | i = 1,2,\dots,k-1\}$, $C_n$ graph has cycle of $w, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, v_k, v_{k-1}, \dots, v_1, w$ and $S = \{w, u_1\}$ is taken. It is proven that $S$ is local strong resolving set of $C_n$ graph with odd $n$. Two adjacent vertices $u, v \in V(C_n)$, $uv \in E(C_n)$ are taken, so there are five possible pairs which are $(i)\, u = w,\ v = u_1$, $(ii)\, u = u_i,\ v = u_{i+1}$, $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$, $(iii)\, u = u_k, v = v_k$, $(iv)\, u = v_i, v = v_{i+1}$, $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ and (v) $u = v_1,\ v = w$. Furthermore, it is shown that every possible pair of vertices has strong resolver $S$.

(i) $u_1, w \in V(C_n)$ is taken, so $w \in I[u_1, w]$ therefore $w$ is strong resolver of a pair of vertices $u_1, w \in V(C_n)$.

(ii) $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$ with $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ is taken, so $u_i \in I[w, u_{i+1}]$ therefore $w$ is strong resolver of a pair of vertices $u_i, u_{i+1} \in V(C_n)$.

(iii) $u_k, v_k \in V(C_n)$ is taken, so $u_k \in I[u_1, v_k]$ therefore $u_1$ is strong resolver of a pair of vertices $u_k, v_k \in V(C_n)$

(iv) $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$ with $i \in \{1,2,\dots,k-1\}$ is taken, so $v_i \in I[w, v_{i+1}]$ therefore $w$ is strong resolver of a pair of vertices $v_i, v_{i+1} \in V(C_n)$.

(v) $v_1, w \in V(C_n)$ is taken, so $w \in I[v_1, w]$ therefore $w$ is strong resolver of a pair of vertices $v_1, w \in V(C_n)$.

According to the explanation above, it is obtained that every two adjacent vertices in $C_n$ can be strong resolved by vertex $w$ or vertex $u_1$, so $S$ is local strong resolving set of $C_n$ graph.

Furthermore, it is shown that $S$ is minimum local strong resolving set. $S' \subseteq V(C_n)$ with $|S'| < S$ is taken, so $S'$ is *singleton*. Because $C_n$ is cycle graph with order odd $n$, therefore there are two adjacent vertices which each of them has distance of $\frac{n-1}{2}$ to $s \in S'$. Without losing the generality of proof, $S' = \{w\}$ is selected. Therefore, $d(u_k, w) = d(v_k, w) = k$ so according to **Lemma 2.1**, $w$ is not strong resolver of vertices $u_k, v_k$. Thus, a pair of vertices $u_k, v_k$ does not have strong resolver in $S'$ and $S'$ is not local strong resolving set of $C_n$ graph. Thus, $S$ is minimum local strong resolving set or local strong basis of $C_n$ graph and $dim_{sl}(C_n) = 2$ for odd $n$. ■

**Theorem 3.3** $dim_{sl}(S_n) = 1$.

**Proof.** Suppose $V(S_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$, $E(S_n) = \{v_n v_i | i = 1,2,\dots,n-1\}$ and $W = \{v_n\}$ are taken. Two adjacent vertices $v_n, v_i \in V(S_n)$ with $i = 1,2,\dots,n-1$ are taken, so $v_n \in I[v_n, v_i]$ therefore $v_n$ is strong resolver of vertices $v_n, v_i$. Hence, $W$ is local strong resolving set of $S_n$ graph.

Local strong resolving set of a graph is not possible to be an empty set, so $W$ is local strong resolving set with minimum cardinality therefore $W$ is local strong basis of $S_n$ graph. Thus, $dim_{sl}(S_n) = 1$. ■

**Theorem 3.4** $dim_{sl}(K_n) = n - 1$ with $n \geq 2$.

**Proof.** Suppose $V(K_n) = \{v_i | i = 1,2,\dots,n\}$, $E(K_n) = \{v_i v_j | \, i \neq j \text{ and } i,j = 1,2,\dots,n\}$, and $S = \{v_i | i = 1,2,\dots,n-1\}$ are taken. Two adjacent vertices of $v_i, v_j \in V(K_n)$ with $i \neq j$ and $i = 1,2,\dots,n$ are taken, so $v_i \in S$ or $v_j \in S$ therefore $v_i \in I[v_i, v_j]$ or $v_j \in I[v_i, v_j]$. Thus, every two vertices in $K_n$ graph has strong resolver in $S$ and $S$ is local strong resolving set of $K_n$ graph.

Furthermore, it is shown that $S$ is minimum local strong resolving set $S' \subseteq V(K_n)$ with $|S'| < S$ is taken so there are two vertices in $K_n$ graph which are not a member of $S'$. for example $u$ and $v$. $s \in S'$ is taken, so $d(u,s) = d(v,s) = 1$ therefore according to **Lemma 2.1,** $s$ is not strong resolver of vertices $u,v$. Hence, a pair of vertices $u,v$ does not have strong resolver in $S'$ and $S'$ is not local strong resolving set of $K_n$ graph. Thus, $S$ is local strong basis of $K_n$ graph and $dim_{sl}(K_n) = n - 1$. ■

The characterization of graph with certain local strong metric dimension is presented below.

**Theorem 3.5.** *Let $G$ be a connected graph of order $n \geq 2$, so*

*i* $dim_{sl}(G) = 1$ *if and only if $G$ is bipartite graph*

*ii* $dim_{sl}(G) = n - 1$ *if and only if $G = K_n$*

**Proof.** Let $G$ be a connected graph of order $n \geq 2$

(i) ($\Leftarrow$) Suppose $G$ is bipartite graph with $V(G)$ is partitioned to be $V_1 \neq \phi$ and $V_2 \neq \phi$ also $S = \{u\}$ with $u \in V_2$ is selected. $x, y \in V(G)$ with $xy \in E(G)$ is taken, so $x \in V_1, y \in V_2$ or $y \in V_1, x \in V_2$. Because $G$ is a connected graph and $xy \in E(G)$ so there is the shortest path $x - u$ and the shortest path $y - u$ with $d(x,u) < d(y,u)$ or $d(y,u) < d(x,u)$. According to **Lemma 2.2**, it is obtained $x \in I[y,u]$ or $y \in I[x,u]$ so u is strong resolver of vertices $x, y$. Therefore, $S$ is local strong resolving set of $G$ graph.

Local strong resolving set of a graph is not possible to be an empty set, so $S$ is local strong resolving set with minimum cardinality therefore $S$ is local strong basis of $G$ graph. Thus, $dim_{sl}(G) = 1$.

($\Rightarrow$) Suppose $dim_{sl}(G) = 1$ and if $G$ is not bipartite graph, so there are $v_1, v_2 \in V_1$, $u_1, u_2, u \in V_2$ with $v_1u_1, v_2u_2 \in E(G)$ and $u_1u_2 \in E(G)$ therefore an odd cycle of $u_2, v_2, u, \dots, v_1, u_1, u_2$ is formed. According to **Theorem 3.2,** so $dim_{sl}(G) \geq 2$. This contradicts with $dim_{sl}(G) = 1$. Thus, $G$ is bipartite graph.

(ii) ($\Leftarrow$) Suppose $G = K_n$, so according to **Theorem 3.4** $dim_{sl}(G) = n - 1$.

($\Rightarrow$)If $dim_{sl}(G) = n - 1$ and $G \ncong K_n$, there are $u, v \in V(G)$ with $uv \notin E(G)$. Because $uv \notin E(G)$so $\deg u \leq n - 2$ and $\deg v \leq n - 2$ therefore $V(G) - \{u, v\}$ is local strong resolving set of $G$ graph. This contradicts with $dim_{sl}(G) = n - 1$. ■

## 4. Local Strong Metric Dimension of Operation Graph of Corona Order-*k* Product

The theorem of local strong metric dimension of operation graph of corona order-*k* product is presented below.

**Theorem 4.1** *Let $G, H$ be a connected graph of order $n_1$ and $n_2$, so $dim_{sl}(G \odot H) = |V(G)|\, dim_{sl}(H)$.*

**Proof.** Suppose $V(G) = \{u_i | i = 1,2, \dots, n_1\}$, $V(H) = \{v_i | i = 1,2, \dots, n_2\}$, $H_i$ is a copy of $H$ graph order-$i$ with $i = 1,2, \dots, n_1$, $V(H_i) = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, n_2\}$ and $E(G \odot H) = E(G) \cup_{i=1}^{n_1} E(H_i) \cup \{u_i v_{ij} \mid u_i \in V(G),\ v_{ij} \in V(H_i)\}$. Suppose $dim_{sl}(H_i) = k$ and $S_i = \{v_{ij} | j = 1,2, \dots, k\}$ are local strong basis of $H_i$ graph. $S = \cup_{i=1}^{n_1} S_i$ is selected.

Two adjacent vertices $x, y \in V(G \odot H)$, $xy \in E(G \odot H)$ is taken. There are three possible pairs of vertices, which are (i) $x, y \in V(G)$, (ii) $x \in V(G)$ $y \in V(H_i)$, and (iii) $x, y \in V(H_i)$. Furthermore, it is shown that every possible pair has strong resolver in $S$.

(i) If $x, y \in V(G)$ so there are $i, j \in \{1,2, \dots, n_1\}$ with $i \neq j$ therefore $x = u_i$ and $y = u_j$. $v_{i1} \in S$ is selected. Because $u_i \in I[u_j, v_{i1}]$ so $v_{i1}$ is strong resolver of vertices $u_i, u_j$. Therefore, a pair of vertices $u_i, u_j$ has strong resolver $S$.

(ii) If $x \in V(G)$ and $y \in V(H_i)$ with $xy \in E(G \odot H)$ so there are $i \in \{1,2, \dots, n_1\}$, $j \in \{1,2, \dots, n_2\}$ therefore $x = u_i$ and $y = v_{ij}$. $v_{m1} \in S$ with $m \neq i, m \in \{1,2, \dots, n_1\}$ is selected. Because $u_i \in I[v_{ij}, v_{m1}]$ so $v_{m1}$ is strong resolver of vertices $u_i, v_{ij}$. Therefore, a pair of vertices $u_i, v_{ij}$ has strong resolver in $S$.

(iii) If $x, y \in V(H_i)$ so there are $j, m \in \{1,2, \dots, n_2\}$ with $j \neq m$ therefore $x = v_{ij}$ and $y = v_{im}$. Because $S_i$ is local strong basis of $H_i$ graph, there is $v \in S_i$ which is strong resolver of a pair of vertices $v_{ij}, v_{im}$. Because $S_i \subseteq S$ maka pasangan titik $v_{ij}, v_{im}$ also has local strong resolver in $S$.

Based on the explanation above, $S$ is local strong resolving set. Furthermore, it is shown that $S$ is minimum local strong resolving set. $S' \subseteq V(G \odot H)$ with $|S'| < |S|$ is taken, so there is $x \in S_i$ with $i \in \{1,2,\dots,n_1\}$ and $x \notin S'$ which result in $W \subseteq S_i$, $W \subseteq S'$ with $|W| < |S_i|$. Because $S_i$ is local strong basis of $H_i$ graph and $|W| < |S_i|$ so $W$ is not local strong resolving set of $H_i$ graph and there are two vertices $v_{ix}, v_{iy} \in V(H_i)$ which do not have strong resolver in $W$.

Moreover, it is shown that $v_{ix}, v_{iy}$ also do not have strong resolver in $S'$. $v \in S' \setminus W$ is taken, so $d(v_{ix}, v) = d(v_{iy}, v)$ therefore according to **Lemma 2.1**, $v$ us not strong resolver of vertices $v_{ix}, v_{iy}$ and a pair of vertices $v_{ix}, v_{iy}$ does not have strong resolver in $S' \setminus W$. Because $v_{ix}, v_{iy}$ do not have strong resolver in $W$ and also $S' \setminus W$ so $S'$ is not local strong resolving set of $G \odot H$ graph. Thus, $S$ is local strong basis of $G \odot H$ graph and $dim_{sl}(G \odot H) = |V(G)|.dim_{sl}(H)$. ■

**Corollary 4.2** *Let $G, H$ be a connected graph of order at least two, so*

$$dim_{sl}(G \odot^k H) = |V(G \odot^{k-1} H)|.dim_{sl}(H).$$

**Proof.** Let $G, H$ be a connected graph of order at least two and $G' = G \odot^{k-1} H$, so $(G \odot^k H) = G' \odot H$. According to **Theorem 4.1** which states that $dim_{sl}(G' \odot H) = |V(G')| dim_{sl}(H)$ thus it is obtained

$$dim_{sl}(G \odot^k H) = |V(G \odot^{k-1} H)| dim_{sl}(H). \blacksquare$$

**Acknowledgements:** This research is supported by DRPM Indonesia through *Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi* Universitas Airlangga 2018.

## Suggestion

Inspired by the research done by Susilowati, *et. al.* [13] and Susilowati, *et. al.* [14], this research can be continued to find the commutative characterization of corona operation through strong metric dimension or local strong metric dimension.

## References

[1] Ali, M., Ali, G., Ali, U., & Rahim, M.T., On Cycle Related Graphs with Constan Metric Dimension, Open Journal of Discrete Mathematics 2 (2012) 21-23.

[2] Baca, M., Baskoro, E.T., Salman, A. N. M., Saputro, S. W., & Suprijanto, D., The Metric Dimension of Regular Bipartite Graphs, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 54(102) No. 1 (2011) 15-28.

[3] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., & Oellermann, O.R., Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph, Discrete Appl. Math., 105 (2000) 99–113.

[4] Iswadi, H., Baskoro, E.T., and Simanjuntak, R., On the metric dimension of corona product graphs, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), 52 (2) (2011) 155 – 170.

[5] Kuziak, D., Yero, I.G., and Rodriguez-Valazquez, J.A., On The Strong Metric Dimension of Corona Product Graphs and Join Graphs, Discrete Appl. Math., **161** (2013) 1022-1027.

[6] Oellermann, O.R, Peters-Fransen, J., The Strong Metrik Dimension of Graphs and Digraphs, Discrete Appl. Math., **155** (2007) 356-364.

[7] Okamoto, F., Crosse, L., Phinezy, B., and Kalamazoo, The Lokal Metrik Dimension of a Graph, Mathematica Bohemica, **135**:3 (2010) 239-255.

[8] Rodriguez-Velazquez, J.A., Barragan-Ramirez, G.A., & Gomez, C.G., On the Local Metric Dimension of Corona Product Graphs, Combinatorial And Computational Results, Arxiv: 1308.6689.v1 (Math Co) (2013), 30 Agustus.

[8] Rodriguez-Velazquez, J.A., Kuziak, D., Yero, I.G., & Sigarreta, J.M., The Metric Dimension of Strong Product Graphs, Combinatorial And Computational Results, Arxiv: 1305.0363.v1 (Math Co) (2013), 2 May.

[10] Rodriguez-Velazquez, Gomez. C.G., & Barragan-Ramirez, G.A., 2014, Computing the Local Metric Dimension of Graph From The Local Metric Dimension of Primary Subgraph, arxiv:1402.0177v1[math. CO] (2014) 2 Feb.

[11] Sebo, A. and Tannier, E., On Metrik Generator of Graphs, Mathematics of Operator Research, 29:2 (2004) 383-393.

[12] Susilowati, L., Slamin, Utoyo, M.I., & Estuningsih, N., The Similarity of Metric Dimension and Local Metric Dimension of Rooted Product Graph, Far East Journal of Mathematics Sciences, 97 (7) (2015) 841-856.

[13] Susilowati, L., Utoyo, M.I., and Slamin, On commutative characterization of generalized comb and corona products of graphs with respect to the local metric dimension, Far East Journal of Mathematical Sciences, 100(4) (2016) 643-660.

[14] Susilowati. L., Utoyo. M.I., and Slamin. On commutative characterization of graph operation with respect to metric dimension, Journal of Mathematical and Fundamental Sciences, 49 (2) (2017) 156-170.

MISEIC

# CERTIFICATE

OF APPRECIATION | No : 008056/UN38.I/DL/2018

is presented to

**Liliek Suslowati**

*as Paper Presenter*

*entitled*

Rank Free Module and Torsion Module over Quadratic Complex Field

in Mathematics, Informatics, Science, and Education International Conference (MISEIC) 2018
with theme :
"Emerging Trends of Research Mathematics, Informatics, Science, Education"

at Best Western Papilio Hotel,
Jl. Jendral Ahmad Yani no. 176-178,
Surabaya 60235, Indonesia
on July 21st, 2018

Vice Rector I of Unesa

Dr.sc.agr. Yuni Sri Rahayu, M.Si.

Conference Chair

Rooselyna Ekawati, M.Sc., Ph.D.

MISEIC

Indexed by:

Published in:

# SERTIFIKAT

Sertifikat ini diberikan kepada :

## Raden Panji Maharjo Tri Wibowo

yang telah aktif berpartisipasi sebagai pemakalah dengan judul :

## Penerapan Metode Heuristik untuk Penentuan Dimensi Metrik Graf

di Konferensi Nasional Matematika XIX
pada tanggal 24 Juli - 26 Juli 2018 di Universitas Brawijaya Malang

Malang, 25 Juli 2018

Dr. Intan Muchtadi, S.Si, M.Si, DEA
PRESIDEN INDOMS

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si.,M.Si.,Ph.D
KETUA JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UB

Syaiful Anam, S.Si.,MT.,Ph.D
KETUA PELAKSANA KNM XIX

DISELENGGARAKAN OLEH :

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Brawijaya

IndoMS
Indonesian Mathematical Society