DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

INTEGRAL NON EPSILON DELTA PADA [a,b]

Ketua Peneliti :

Drs. Mohammad Imam Utoyo, M.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai Oleh : DIP OPF Unair 1995/1996
SK.Rektor Nomor : 6907/PT03.H/N/1995
Nomor : 45

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

INTEGRAL NON EPSILON DELTA PADA [a,b]

Ketua Peneliti :

Drs. Mohammad Imam Utoyo, M.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA
Dibiayai Oleh : DIP OPF Unair 1995/1996
SK.Rektor Nomor : 6907/PT03.H/N/1995
Nomor : 45

INTEGRAL NON EPSILON DELTA PADA [a,b]

Peneliti :
Drs. Mohammad Imam Utoyo, M.Si.
Dra. Suzyanna
Drs. Eridani
Herry Suprajitno,S.Si
Liliek Susilowati,S.Si

Fakultas/Puslit MIPA

Lembaga Penelitian Universitas airlangga

Dibiayai : DIP OPF Universitas Airlangga
SK. Rektor Nomor : 6907/PT03. H/N/1995
Tanggal : 24 Agustus 1995

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS AIRLANGGA
LEMBAGA PENELITIAN

1. Puslit dan Pembangunan Regional
2. Puslit Obat Tradisional
3. Puslit Pengembangan Hukum
4. Puslit Lingkungan Hidup
5. Puslit dan Pengembangan Gizi
6. Puslit/Studi Wanita
7. Puslit Olahraga
8. Puslit Kependudukan dan Pembangunan
9. Puslit Bioenergi
10. Puslit/Studi Kesehatan Reproduksi

Jl. Darmawangsa Dalam No. 2 Telp. (031) 42322 Fax. (031) 42322 Surabaya 60286

IDENTITAS DAN PENGESAHAN
LAPORAN AKHIR HASIL PENELITIAN

1.	a. Judul Penelitian	: Integral Non Epsilon Delta Pada (a,b)
	b. Macam Penelitian	: (V) Fundamental, ( ) Terapan, ( ) Pengembangan
2.	Kepala Proyek Penelitian	
	a. Nama Lengkap Dengan Gelar	: Drs. Mohammad Imam Utoyo, M.Si.
	b. Jenis Kelamin	: Laki-Laki
	c. Pangkat/Golongan dan NIP	: Penata Muda/IIIa/131 801 397
	d. Jabatan Sekarang	: Staf Pengajar
	e. Fakultas/Jurusan/Puslit	: FMIPA/Matematika
	f. Univ./Inst./Akademi	: Universitas Airlangga
	g. Bidang Ilmu Yang Diteliti	: Analisis
3.	Jumlah Tim Peneliti	: 5 (lima) orang
4.	Lokasi Penelitian	: FMIPA Universitas Airlangga
5.	Kerjasama dengan Instansi Lain	
	a. Nama Instansi	: -
	b. Alamat	: -
6.	Jangka Waktu Penelitian	: 5 (lima) Bulan
7.	Biaya Yang Diperlukan	: Rp 3.000.000,00
8.	Hasil Seminar Penelitian	:
	a. Dilaksanakan Tanggal	: 11 Maret 1996
	b. Hasil Penilaian	: ~~( ) Baik Sekali~~ (V) Baik ( ) Sedang ( ) Kurang

Surabaya, 14 Maret 1996

Mengetahui/ Mengesahkan :
a.n. Rektor
Ketua Lembaga Penelitian,

Prof. Dr. Noor Cholies Zaini
NIP. 130 355 372

RINGKASAN PENELITIAN

Judul Penelitian : Integral Non Epsilon Delta Pada [a,b]
Ketua Peneliti : Mohammad Imam Utoyo
Anggota Peneliti : Suzyanna
Eridani
Herry Suprajitno
Liliek Susilowati
Fakultas : MIPA
Sumber Biaya : DIP OPF Unair
S.K. Rektor No. 6907/PT03.H/N/1995
Tanggal : 24 Agustus 1995

Teori integrasi biasanya dikembangkan dengan melibatkan epsilon delta. Dengan demikian maka dengan mempelajari teori integral selalu melibatkan suatu kesimetrian terhadap suatu titik tertentu. Jika sifat kesimetrian ini dapat dihilangkan maka akan diperoleh suatu pengertian baru dari suatu integral tanpa melibatkan epsilon delta. Pendefinisian baru ini mempunyai syarat yang lebih lemah dibandingkan dengan pendefinisian yang sebelumnya.

Permasalahan penelitian ini adalah mencari definisi untuk integral pada interval tertutup [a,b], kemudian dicari sifat-sifat dasarnya dan mencari hubungan antara integral ini dengan integral sebelumnya.

Pendefinisian integral tanpa epsilon delta ini dikembangkan dari suatu koleksi interval terbuka $\mathcal{I}_x = \{I_x = (u,v) \mid x \in (u,v)\}$ dan $\mathcal{I}[a,b] = \{I_x \mid x \in [a,b]\}$. Dari koleksi interval di atas dibangun suatu partisi dan dari partisi ini selanjutnya dibuat definisi integral tanpa epsilon delta pada [a,b].

Integral tanpa epsilon delta ini selanjutnya juga memenuhi sifat-sifat yang terdapat pada integral sebelumnya dan lebih jauh ditemukan bahwa fungsi yang terintegral Henstock juga terintegral tanpa epsilon delta.

Dengan didefinisikannya integral tanpa epsilon delta ini, maka kita mempunyai suatu alternatif lain dalam mengkaji teori integral.

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan Rachnat dan Hidayahnya sehingga penelitian ini dengan judul : INTEGRAL NON EPSILON DELTA PADA [a,b] yang dibiayai OPF telah dapat diselesaikan tepat pada waktunya.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sampai terselesaikannya penulisan laporan akhir penelitian ini.

Penulis menyadari bahwa tak ada gading yang tak retak. Demikian juga halnya dengan laporan penelitian ini yang masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran dari para pembaca masih sangat kami harapkan.

Surabaya, Februari 1996

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Penelitian

Teori integral merupakan salah satu cabang matematika yang termasuk dalam kelompok analisis dan banyak diterapkan dalam cabang-cabang ilmu lainnya. Seperti pada cabang ilmu lain, teori integral juga berkembang baik dari segi teori maupun dari segi pemakaiannya. Dari segi teori, peneliti teori integral disamping mengkaji sifat-sifat integral yang sudah ada juga berusaha untuk mendapatkan definisi integral dengan syarat lebih lemah dibandingkan dengan pendefinisian integral yang ada pada saat ini.

Dalam teori integral dikenal dua cara pendefinisian integral, yaitu pendefinisian secara deskriptif dan pendefinisian secara konstruktif. Untuk tujuan pemakaian pendefinisian integral secara deskriptif kurang menguntungkan. Hal ini disebabkan fungsi yang akan diintegralkan dengan integral yang disusun secara deskriptif harus memenuhi kriteria tertentu, dan untuk menentukan apakah suatu fungsi memenuhi kriteria tersebut biasanya tidaklah mudah. Mungkin dengan alasan inilah peneliti integral mencari alternatif lain untuk mengatasi kemacetan pengembangan teori integral pada umumnya dan pemakaian integral pada khususnya. Alternatif lain itu adalah mendefinisikan integral secara konstruktif. Dengan demikian dapat dimengerti mengapa perkembangan teori integral yang disusun secara konstuktif relatif lebih pesat.

Sejak abad ke 17, yaitu awal mula perkembangan teori integral,integral yang didefinisikan secara konstruktif selalu melibatkan konsep epsilon delta. Akibatnya, dalam teori integral selalu melibatkan kesimetrian terhadap suatu titik tertentu. Jika kesimetrian ini bisa dihilangkan,maka akan didapatkan suatu definisi integral tanpa melibatkan epsilon delta dan tentu saja definisi integral yang baru ini mempunyai persyaratan yang lebih lemah dari pada persyaratan pada definisi integral sebelumnya.

Dari uraian di atas kami tertarik untuk mengkaji integral tanpa epsilon delta, dalam hal ini dibatasi pada interval tertutup [a,b].

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan penelitian ini adalah :

1. Bagaimana nmendefinisikan integral tanpa epsilon delta pada interval tertutup [a,b] (integral ini disebut integral mulus pada [a,b]) ?
2. Sifat-sifat dasar apakah yang dipenuhi oleh integral ini ?
3. Bagaimana hubungan integral ini dengan integral sebelumnya ?

1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan Penelitian ini adalah untuk :

1. menyusun integral mulus pada interval tertutup [a,b].
2. mencari sifat-sifat penting dari integral mulus. Diharapkan si-

fat yang berlaku pada integral dengan pendefinisian sebelumnya

juga berlaku pada integral mulus.

3. mencari hubungan antara integral ini dan integral yang telah ada sebelumnya. Hubungan yang dimaksudkan di sini adalah apakah fungsi yang terintegral dengan definisi integral sebelumnya juga terintegral mulus atau sebaliknya apakah fungsi yang terintegral mulus juga terintegral dengan definisi integral sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam literatur baku analisis seperti pada Celidze (1989), Henstock (1988), Peng Yee (1989), dan lain-lain serta dalam penelitian analisis seperti pada Cao (1992), Soeparna (1991), dan lain- lain pendefinisian integral secara konstuktif selalu melibatkan epsilon delta. Sebagai contoh adalah pendefinisian integral Henstock-Kurzweil yang diberikan di bawah ini :

Fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \bar{R}$ dikatakan terintegral Henstock-Kurzweil pada $[a,b]$ jika ada bilangan $A = (R^*)\int_a^b f(x)dx$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada fungsi bernilai positif $\delta : [a,b] \longrightarrow R$ sehingga untuk setiap partisi-δ :

$$D = ([u,v];x) = \{a=a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n=b; x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

dengan

$$x_i - \delta(x_i) < a_{i-1} \le x_i \le a_i < x_i + \delta(x_i)$$

berlaku :

$$\left| D\sum f(x)(v-u) - (R^*)\int_a^b f(x)dx \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) - (R^*)\int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Pada tahun 1994 Imam, telah berhasil menyusun konsep topologi non epsilon delta pada sistem bilangan real. Pada tahun yang sama Imam, juga berhasil menyusun kalkulus non epsilon delta, pada pene- litian ini konsep yang diberikan adalah mengenai konsep limit fungsi, kekontinyuan fungsi, dan turunan fungsi.

BAB III

METODE PENELITIAN

Untuk menyelesaikan masalah penelitian ini diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan literatur yang ada hubungannya dengan permasalahan penelitian ini.
2. Menentukan konsep topologi-$n\varepsilon\delta$, konsep kekontinyuan-$n\varepsilon\delta$, dan konsep turunan-$n\varepsilon\delta$ pada sistem bilangan real yang diperlukan untuk menyusun definisi integral mulus dan dalam mencari sifat-sifat integral mulus ini.
3. Membangun koleksi interval sebagai berikut :

   $$\mathcal{I}[a,b] = \{I_x : x \in [a,b]\}.$$

   Melalui koleksi interval ini disusun partisi

   $$P = \{a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_n = b : x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

   dengan

   $$u_i < a_{i-1} \leq x_i \leq a_i < v_i \ , \ I_{x_i} = (u_i, v_i)$$

   untuk setiap i, dan $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}$.

   Melalui $\mathcal{I}[a,b]$ dan partisi di atas selanjutnya disusun integral mulus pada interval [a,b].
4. Mencari sifat-sifat penting dari integral mulus.
5. Mencari hubungan antara integral mulus dengan integral yang ada sebelumnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1. Konsep Topologi Non Epsilon Delta Pada Sistem Bilangan Real

Diketahui R merupakan sistem bilangan real, $I_x = (u,v)$ dengan $x \in I_x$, $\mathcal{J}_x$ merupakan koleksi semua I_x, dan semua himpunan yang dibicarakan dalam bab ini adalah himpunan bagian dari R.

4.1.1. Titik-limit dan Titik-dalam

Definisi 4.1. :

$x \in R$, titik-limit $n\varepsilon\delta$ (dibaca : non epsilon delta) himpunan A, jika untuk setiap $I_x \in \mathcal{J}_x$ berlaku $I_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.

Teorema 4.2. :

$x \in R$ merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-limit himpunan A.

Bukti : Ambil sebarang x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan $\varepsilon > 0$. Dengan memilih $I_x = N_\varepsilon(x)$, maka $N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Oleh karena itu x merupakan titik-limit himpunan A. Sebaliknya ambil sebarang x titik-limit himpunan A dan $I_x \in \mathcal{J}_x$. Misalkan $I_x = (u,v)$ dan $\varepsilon = \min\{x-u, v-x\}$, maka $\emptyset \neq N_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \subset I_x \cap A - \{x\}$. Sehingga x merupakan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A. ∎

Teorema 4.3. :

Setiap himpunan berhingga tidak mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan berhingga. Jadi A dapat dituliskan sebagai $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dengan $a_i < a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Selanjutnya ambil sebarang $x \in R$, akan ditunjukkan bahwa x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu $x < a_i$ untuk setiap i, $x > a_i$ untuk setiap i, dan ada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$. Jika $x < a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $u < x$ dan $x < v < a_i$, untuk setiap i. Jika $x > a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $x > u > a_i$ untuk setiap i, dan $v > x$. Sedangkan jika ada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$, maka dipilih $a_{i-1} < u = a_i$ jika $a_i < x$ atau $a_{i-1} < u < a_i$ jika $a_i = x$ dan $u < v < a_{i+1}$. Dengan memilih $I_x = (u, v)$, maka $I_x \cap A - \{x\} = \emptyset$. Oleh karena itu x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. ∎

Akibat 4.4. :

Jika A mempunyai titik-limit $n\varepsilon\delta$, maka A tak berhingga.

Teorema 4.5. :

Jika x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$ berlaku $I_x \cap A$ tak berhingga.

Bukti : Andaikan x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A dan ada I_x sehingga $I_x \cap A$ berhingga. Jadi $I_x \cap A$ dapat dituliskan sebagai

$$I_x \cap A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

dengan $a_i < a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Maka terdapat tiga kemungkinan

, yaitu $x < a_i$ untuk setiap i , $x > a_i$ untuk setiap i, dan ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$. Jika $x < a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $u < x$ dan $x < v < a_i$, untuk setiap i. Jika $x > a_i$ untuk setiap i, maka dipilih $x > u > a_i$ untuk setiap i, dan $v > x$. Sedangkan jika ada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sehingga $a_i \leq x < a_{i+1}$, maka dipilih $a_{i-1} < u = a_i$ jika $a_i < x$ atau $a_{i-1} < u < a_i$ jika $a_i = x$ dan $u < v < a_{i+1}$. Dengan memilih $I_x^1 = (u,v)$, maka $I_x^1 \cap A - \{x\} = \emptyset$. Oleh karena itu x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. Kontradiksi.∎

Definisi 4.6. :

$x \in R$ disebut titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A$.

Teorema 4.7. :

x titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A jika dan hanya jika x titik-dalam himpunan A.

Bukti : Ambil sebarang x titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A$. Misalkan $I_x = (u,v)$ dan $\varepsilon = \min\{x-u, v-x\}$, maka $N_\varepsilon(x) \subset I_x \subset A$. Sehingga x merupakan titik-dalam himpunan A. Sebaliknya ambil sebarang x titik-dalam himpunan A, maka ada $N_\varepsilon(x)$, sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A$. Dengan mengambil $I_x = N_\varepsilon(x)$, maka $I_x \subset A$. Sehingga x merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A.∎

4.1.2. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 4.8. :

A disebut himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, jika setiap anggotanya merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A.

Dari definisi 4.8. dan teorema 4.7. diperoleh :

Teorema 4.9. :

A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A himpunan terbuka.

Definisi 4.10. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$, jika setiap titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A termuat dalam A.

Dengan teorema 4.2. dan definisi 4.10. diperoleh :

Teorema 4.11. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A merupakan himpunan tertutup.

Teorema 4.12. :

A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A^c himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ dan x titiklimit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c. Karena x titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c, maka untuk setiap $I_x \in \mathcal{I}_x$, berlaku $I_x \cap A^c - \{x\} \neq \emptyset$. Sehingga I_x bukan merupakan himpunan bagian dari A. Oleh karena itu x bukan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Karena A terbuka $n\varepsilon\delta$, maka $x \in A$ atau

$x \in A^c$. Jadi A^c merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya ambil sebarang A^c himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ dan $x \in A$. Karena $x \notin A^c$, maka x bukan titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A^c. Sehingga ada $I_x \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x \cap A^c - \{x\} = \emptyset$. Karena $x \notin I_x \cap A^c$, maka $I_x \cap A^c = \emptyset$. Sehingga $I_x \subset A$. Oleh karena itu x merupakan titik-dalam $n\varepsilon\delta$ himpunan A. Dengan demikian A merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.∎

Akibat 4.13. :

A himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A^c himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

Teorema 4.14. :

Misalkan $B \subset R$,

$\{A_\iota : A_\iota$ himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ untuk setiap $\iota \in B\}$

dan

$\{C_\iota : C_\iota$ himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$ untuk setiap $\iota \in B\}$,

maka :

(i). $\cup_{\iota \in B} A_\iota$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$

(ii). $\cap_{\iota \in B} C_\iota$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cup_{\iota \in B} A_\iota$, maka ada $\iota \in B$ sehingga $x \in A_\iota$. Karena A_ι merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, maka ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $I_x \subset A_\iota \subset \cup_{\iota \in B} A_\iota$. Oleh karena itu $\cup_{\iota \in B} A_\iota$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

(ii). Karena $\{\cap_{\iota \in B} C_\iota\}^c = \cup_{\iota \in B} C_\iota^c$, maka dengan (i) dan aki bat 4.14. diperoleh $\cap_{\ B}\ C$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.∎

Teorema 4.15. :

Untuk $n \in N$, misalkan $\{A_i : A_i, 1 \leq i \leq n$, himpunan terbuka $n\varepsilon\delta\}$, dan $\{C_i : C_i, 1 \leq i \leq n$, himpunan tertutup $n\varepsilon\delta\}$, maka :

(i). $\cap_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$

(ii). $\cup_{i=1}^{n} C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.

Bukti : (i). Ambil sebarang $x \in \cap_{i=1}^{n} A_i$, maka untuk setiap i, berlaku $x \in A_i$. Karena A_i himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, maka ada $I_x^i \in \mathcal{I}_x$, sehingga $I_x^i \subset A_i$. Dengan memilih $I_x = \cap_{i=1}^{n} I_x^i$, maka $I_x \subset \cap_{i=1}^{n} A_i$. Sehingga $\cap_{i=1}^{n} A_i$ merupakan himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$.

(ii). Karena $\{\cup_{i=1}^{n} C_i\}^c = \cap_{i=1}^{n} C_i^c$, maka dengan (i) dan akibat 4.13. diperoleh $\cup_{i=1}^{n} C_i$ merupakan himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$.∎

Teorema 4.16. :

Setiap himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$ merupakan gabungan beberapa I_x yang saling asing dan paling banyak terhitung.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$. Untuk setiap $x \in A$, dipilih $I_x \in \mathcal{I}_x$ terbesar sehingga $I_x \subset A$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in A$, dengan $x \neq y$, berlaku $I_x \cap I_y = \emptyset$ atau $I_x = I_y$. Jika $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, maka ada $z \in I_x \cap I_y$. Sehingga $I_z = I_x \cup I_y$ memuat x dan y. Oleh karena itu dengan pemilihan I_x dan I_y diperoleh $I_x = I_y = I_z$. Selanjutnya dari pengambilan I_x diperoleh $A = \cup_{x \in A} I_x$, dengan setiap I_x saling asing satu dengan yang lainnya. Untuk membuktikan bahwa $\{I_x\}$

paling banyak terhitung, maka dibangun himpunan $G = \{r \in Q : r \in I_x\}$. Karena $G \subset Q$, dan Q terhitung, maka $\{I_x\}$ paling banyak terhitung.∎

4.1.3. Penutup Suatu Himpunan

Definisi 4.17. :

Himpunan A disebut :

(i). terbatas, jika untuk setiap $x \in R$, ada $I_x \in \mathcal{I}_x$ sehingga $A \subset I_x$.

(ii). terbatas ke atas, jika ada $x \in R$ sehingga $A \subset (-\infty, x)$.

(iii). terbatas ke bawah, jika ada $x \in R$ sehingga $A \subset (x, \infty)$.

Definisi 4.18. :

Jika A' menyatakan himpunan semua titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, maka penutup himpunan A adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A'$.

Teorema 4.19. :

Jika $A \neq \emptyset$ dan terbatas, maka $\sup A \in \bar{A}$ dan $\inf A \in \bar{A}$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan terbatas $n\varepsilon\delta$, Misalkan $a = \sup A$ dan $b = \inf A$. Jika $a \notin A$, maka untuk setiap $I_a \in \mathcal{I}_a$, berlaku $I_a \cap A - \{a\} \neq \emptyset$. Sehingga $a \in A'$. Sedangkan jika $b \notin A$, maka untuk setiap $I_b \in \mathcal{I}_b$, $I_b \cap A - \{b\} \neq \emptyset$. Sehingga $b \in A'$. Jadi $a, b \in \bar{A}$.∎

Teorema 4.20. :

Untuk setiap $A \subset R$, $\bar{A}$ tertutup $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang $x \in \bar{A}^c$, maka $x \notin A'$ dan $x \notin A$. Oleh karena itu ada $I_x \in \mathcal{G}_x$, sehingga $I_x \cap A = \emptyset$. Selanjutnya dari teorema 4.5. I_x tidak memuat titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan A, sehingga $I_x \cap A' = \emptyset$. Oleh karena itu $I_x \cap \overline{A} = \emptyset$. Dengan demikian $I_x \subset \overline{A}^c$. Jadi $\overline{A}^c$ terbuka $n\varepsilon\delta$ atau $\overline{A}$ tertutup $n\varepsilon\delta$. ∎

4.1.4. Himpunan Kompak

Definisi 4.21. :

Keluarga himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$, $\{G_\alpha\}$, disebut selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan A, jika $A \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Definisi 4.22. :

A disebut himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, jika setiap selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan A memuat sub bagian berhingga yang menyelimuti A. Sub bagian tersebut disebut sub selimut berhingga himpunan A.

Teorema 4.23. :

Himpunan bagian tertutup $n\varepsilon\delta$ dari himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ merupakan himpunan kompak $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ dan B sebarang himpunan bagian tertutup $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A. Ambil sebarang $\{G_\alpha\}$ selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ himpunan B. Karena B himpunan tertutup $n\varepsilon\delta$, maka B^c himpunan terbuka $n\varepsilon\delta$. Sehingga $\{G_\alpha\} \cup \{B^c\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari himpunan A.Karena A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, maka ada sub selimut berhingga $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$ yang memuat A. Selanjutnya jika $B \subseteq \{G_{\alpha} : \ldots\}$ maka $\{G_{\alpha} \ldots\} - \{B\}$ merupakan sub selimut berhingga dari $\{G_{\alpha}\}$. Sedangkan jika $B \subseteq \{G_{\alpha} : \ldots\}$, maka $\{G_{\alpha} : \ldots\}$ merupakan sub selimut berhingga dari $\{G_{\alpha}\}$. Oleh karena itu B merupakan himpunan kompak $n\delta$. ∎

Teorema 4.24. :

Diketahui untuk setiap $n \in N$, $I_n = [a_n, b_n]$, dengan $\bar{I}_n \supseteq \bar{I}_{n+1}$, $a = \sup\{a_n : n \in N\}$, dan $b = \inf\{b_n : n \in N\}$, maka

$$[a,b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n .$$

Bukti : Karena untuk setiap $n \in N$, $a_n \le b_n$ dan $a_n \le b_1$, maka $\{a_n : n \in N\}$ terbatas ke atas dan $\{b_n : n \in N\}$ terbatas ke bawah. Sehingga $a = \sup\{a_n : n \in N\}$ dan $b = \inf\{b_n : n \in N\}$ ada. Karena untuk setiap $n \in N$, $a_n \le b_n$, maka $a \le b$. Sehingga dengan pendefinisian a dan b diperoleh untuk setiap $n \in N$, $a_n \le a \le b \le b_n$. Oleh karena itu $[a,b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n$. ∎

Teorema 4.25. :

Untuk setiap $n \in R$, $\bar{I}_n$ kompak $n\delta$.

Bukti : Ambil sebarang $n \in R$ dan $I_n \in \mathcal{I}$. Andaikan $\bar{I}_n$ tidak kompak $n\delta$. Misalkan $I_n = [u,v]$ dan $\{G_{\alpha}\}$ merupakan selimut terbuka $n\delta$ dari $\bar{I} = [u,v]$ yang tidak memiliki sub selimut berhingga yang menyelimuti $\bar{I} = [u,v]$. Misalkan $v_1 \in (u,v)$ dengan v_1 merupakan bilangan rasional, maka $\overline{I}_x = [u,y_1] \cup [y_1,v]$ dan salah satu dari $[u,y_1]$ dan $[y_1,v]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian berhingga dari $\{G_\alpha\}$. Misalkan yang tidak da pat diselimuti adalah $[u,y_1]$, namakan $\overline{I}_{x_1}$. Dengan mengambil bilangan rasional $y_2 \in \overline{I}_{x_1}$, maka $\overline{I}_{x_1} = [u,y_2] \cup [y_2,y_1]$ dan salah satu dari $[u,y_2]$ dan $[y_2,y_1]$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha\}$. Namakan yang tidak dapat diselimuti terse but dengan $\overline{I}_{x_2}$. Selanjutnya proses ini dilanjutkan sehingga diperoleh :

(a). Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i} \supset \overline{I}_{x_{i+1}}$.

(b). Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i}$ tidak dapat diselimuti oleh sub bagian dari $\{G_\alpha^*\}$.

Misalkan Untuk setiap $i \in N$, $\overline{I}_{x_i} = [a_i, b_i]$, maka dengan teorema 4.35. diperoleh $a = \sup\{a_i : i \in N\}$ dan $b = \inf\{b_i : i \in N\}$ merupakan anggota dari $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{I}_{x_i}$. Dari proses pembentukan $\overline{I}_{x_i}$, diperoleh $a = b$. Selanjutnya karena $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{I}_{x_i} \subset \overline{I}_x$, maka ada G_α sehingga $a \in G_\alpha$. Oleh karena itu ada $I_a \in \mathcal{G}_a$, sedemikian hingga $I_a \subset G_\alpha$. Menurut pendefinisian a diperoleh ada $i \in N$ se hingga $\overline{I}_{x_i} \subset I_a \subset G_\alpha$. Hal ini bertentangan dengan (b). Jadi $\overline{I}_x$ kompak $n\varepsilon\delta$. ∎

Teorema 4.26. :

A kompak $n\varepsilon\delta$ jika dan hanya jika A tertutup $n\varepsilon\delta$ dan terbatas $n\varepsilon\delta$.

Bukti : Ambil sebarang A himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ dan $x \in A^c$. Untuk setiap $\beta \in A$, dipilih $I_\beta \in \mathcal{J}_\beta$ dan $I_x^\beta \in \mathcal{J}_x$ sehingga $I_\beta \cap I_x^\beta = \emptyset$. Karena $\{I_\beta : \beta \in A\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari A dan A kompak $n\varepsilon\delta$, maka ada $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in A$, sehingga $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{\beta_i}$.

Dari pendefinisian I_β, diperoleh bahwa untuk setiap i ada I_x^i sehingga $I_{\beta_i} \cap I_x^i = \emptyset$. Selanjutnya dipilih $I_x = \bigcap_{i=1}^{k} I_x^i$, maka $I_x \cap \{\bigcup_{i=1}^{k} I_{\beta_i}\} = \emptyset$. Karena $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{\beta_i}$ dan $I_x \cap \{\bigcup_{i=1}^{k} I_{\beta_i}\} = \emptyset$, maka $I_x \subset A^c$. Oleh karena itu A^c terbuka $n\varepsilon\delta$, dengan kata lain A terbuka $n\varepsilon\delta$.

Selanjutnya karena $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_{\beta_i}$, maka untuk setiap $x \in A$, ada $I_x \in \mathcal{J}_x$ sehingga $A \subset I_x$. Oleh karena itu A terbatas $n\varepsilon\delta$. Sebaliknya jika A terbatas, maka untuk setiap $x \in A$, ada $I_x \in \mathcal{J}_x$ sehingga $A \subset \bar{I}_x$. Karena A tertutup $n\varepsilon\delta$ dan $\bar{I}_x$ kompak $n\varepsilon\delta$, maka menurut teorema 4.23. A kompak $n\varepsilon\delta$. $\square$

Teorema 4.27. :

Jika $\{K_\alpha\}$ merupakan koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sehingga irisan setiap sub bagian berhingganya tidak kosong, maka

$$\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \emptyset.$$

Bukti : Ambil sebarang $\{K_\alpha\}$ koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$, sehingga irisan setiap sub bagian berhingganya tidak kosong. Andaikan $\bigcap_\alpha K_\alpha$

$= \emptyset$, maka $K_\beta \cap \{ \bigcap_{\alpha \neq \beta} K_\alpha \} = \emptyset$. Sehingga $K_\beta \subset \{ \bigcap_{\alpha \neq \beta} K_\alpha \}^c$ atau $K_\beta \subset \bigcup_{\alpha \neq \beta} K_\alpha^c$.

Dengan demikian $\{K_\alpha^c : \alpha \neq \beta\}$ merupakan selimut terbuka $n\varepsilon\delta$ dari K_β. Karena K_β kompak $n\varepsilon\delta$, maka ada $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sehingga $K_\beta \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^c$. Dengan demikian diperoleh $K_\beta \cap \{ \bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i} \} = \emptyset$. Kontradikisi.∎

Akibat 4.28. :

Jika $\{K_n\}$ merupakan koleksi himpunan kompak $n\varepsilon\delta$ dengan $K_n \supset K_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

4.2. Barisan Bilangan Real

Dalam bagian ini akan diberikan konsep barisan tanpa melibatkan epsilon delta.

Definisi 4.29. :

Barisan $\{p_n\}$ dikatakan konvergen $n\varepsilon\delta$ dalam A, jika ada $p \in A$ sehingga untuk setiap $I_p \in \mathcal{I}_p$, ada $n_o \in N$ sehingga $p_n \in I_p$ untuk setiap $n \geq n_o$. Jika $\{p_n\}$ konvergen $n\varepsilon\delta$ ke p, maka dinotasikan dengan $n\varepsilon\delta$-$p_n \longrightarrow p$ atau $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

Teorema 4.30. :

$n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} p_n = p$ jika dan hanya jika $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

Bukti : Ambil sebarang barisan $\{p_n\}$ dengan $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} p_n = p$. Selanjutnya ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dan dipilih $I_p = N_\varepsilon(p)$. Karena

$n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p$, maka ada $n_0 \in N$ sehingga $p_n \in N_\delta(p)$ untuk setiap $n \geq n_0$. Dengan demikian $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Sebaliknya ambil sebarang barisan $\{p_n\}$ dengan $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Selanjutnya ambil sebarang $I_p \in \mathscr{I}_p$, misalkan $I_p=(u,v)$ dan $\delta=\min\{p-u, v-p\}$. Maka $N_\delta(p) \subset I_p$. Sehingga ada ada $n_0 \in N$ sehingga $p_n \in N_\delta(p) \subset I_p$ untuk setiap $n \geq n_0$. Jadi $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p$. ∎

Teorema 4.31. :

Diketahui $\{p_n\}$ barisan dalam A.

Jika $p, p' \in A$, $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p$, dan $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p'$, maka $p = p'$.

Bukti : Ambil sebarang $\{p_n\}$ barisan dalam A. Misalkan $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p$ dan $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p'$. Akan ditunjukkan bahwa $p = p'$.

Ambil sebarang $I_0 \in \mathscr{I}_0$, misalkan $I_0 = (-\alpha, \beta)$ dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Karena $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p$, dan $n\delta-\lim_{n\to\infty} p_n = p'$, maka $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$, berlaku $p_n \in (p-\frac{\alpha}{2}, p+\frac{\beta}{2})$ dan $p_n \in (p'-\frac{\beta}{2}, p'+\frac{\alpha}{2})$. Oleh karena itu

$$p' - p = p' - p_{n_0} + p_{n_0} - p \in I_0.$$

Jadi $p = p'$. ∎

Selanjutnya akan dibicarakan tentang barisan Cauchy dan hubungannya dengan kekonvergenan suatu barisan.

Definisi 4.32. :

Barisan $\{p_n\}$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $I_0 \in \mathscr{I}_0$, misalkan $I_o = (-s, t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$, ada $n_o \in N$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n_o$, berlaku

$$p_n \in I_{p_m} = (p_m - s, p_m + t).$$

Teorema 4.33. :

$\{p_n\}$ barisan konvergen $n\in\delta$ jika dan hanya jika $\{p_n\}$ barisan Cauchy.

Bukti : Ambil sebarang $\{p_n\}$ barisan konvergen $n\in\delta$, misalkan konvergen ke p. Akan ditunjukkan bahwa $\{p_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Ambil sebarang $I_o \in \mathcal{I}_o$, misalkan $I_o = (-s, t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$. Karena $\{p_n\}$ konvergen ke p, maka ada $n_o \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_o$, berlaku $p_n \in I_p = (p - \frac{l}{2}, p + \frac{l}{2})$ dengan $l = \min\{s, t\}$. Oleh karena itu untuk setiap $n, m \geq n_o$, berlaku

$$p_n = p_n - p + p - p_m + p_m \in (p_m - l, p_m + l) \subset (p_m - s, p_m + t).$$

Jadi $p_n \in I_{p_m} = (p_m - s, p_m + t)$. Dengan demikian barisan $\{p_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Sebaliknya ambil sebarang $\{p_n\}$ barisan Cauchy maka untuk setiap $I_o \in \mathcal{I}_o$, misalkan $I_o = (-s, t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$, ada $n_o \in N$, sehingga untuk setiap $n, m \geq n_o$, berlaku $p_n \in I_{p_m} = (p_m - s, p_m + t)$. Oleh karena itu untuk setiap $n \geq n_o$ berlaku $p_n \in (p_{n_o} - s, p_{n_o} + t)$. Dengan demikian barisan $\{p_n\}$ terbatas. Sehingga ada $I_x \in \mathcal{I}_x$, sehingga $\{p_n : n \in N\} \subset \overline{I}_x$. Misalkan $E_m = \{p_n : n \geq m\}$, maka untuk setiap $m \in N$, berlaku $\overline{E}_m \subseteq \overline{I}_x$. Karena untuk setiap $m \in N$, $\overline{E}_m$ kompak dan $\overline{E}_m \supseteq \overline{E}_{m+1}$, maka menurut teorema 4.27. diperoleh $\cap \overline{E}_m \neq \emptyset$.

Karena untuk setiap I_o ada $n_o \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_o$, berlaku untuk setiap $x, y \in E_n$, $x-y \in I_o$, maka $\cap \bar{E}_n$ memuat satu anggota. Sebab jika tidak misalkan $x, y \in \cap \bar{E}_m$ dengan $x \neq y$, misalkan $x < y$, maka $[x,y] \subseteq \cap \bar{E}_m$. Hal ini berarti $y-x \in [x-y, \frac{y-x}{2}]$. Kontradiksi. Misalkan $\cap \bar{E}_m = \{p\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{p_n\}$ konvergen ke p. Ambil sebarang $I_o \in \mathcal{I}_o$, maka dengan pendefinisian $\bar{E}_m$, maka ada $n_o \in N$ sehingga untuk setiap $m \geq n_o$, berlaku untuk setiap $x, y \in \bar{E}_m$, $x-y \in I_o$. Karena untuk setiap m, $p \in \bar{E}_m$, maka untuk setiap $n \geq n_o$, berlaku $p_n - p \in I_o$. Dengan demikian

$n\delta\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} (p_n - p) = 0$ atau $n\delta\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$. $\square$

4.3. Kekontinyuan

Dalam bagian ini akan dibicarakan tentang kekontinyuan fungsi real tanpa melibatkan konsep epsilon delta. Sebelum membicarakan tentang kekontinyuan suatu fungsi terlebih dahulu dibicarakan tentang pengertian limit fungsi tanpa epsilon delta beserta sifat-sifatnya.

Definisi 4.34. :

Misalkan $f : D_f \longrightarrow R$ merupakan suatu fungsi dengan D_f merupakan daerah definisi fungsi f. Jika y titik limit $n\delta$ himpunan D_f, maka $n\delta\text{-}\lim\limits_{x \longrightarrow y} f(x) = L$ jika untuk setiap $I_L \in \mathcal{I}_L$, ada $I_y \in \mathcal{I}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ dengan $x \neq y$, berlaku $f(x) \in I_L$.

Setelah diberikan definisi limit fungsi $n\varepsilon\delta$, selanjutnya akan diberikan teorema yang menyatakan keekivalenan definisi limit fungsi $n\varepsilon\delta$ dan definisi limit fungsi sebelumnya.

Teorema 4.35.

$n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to y} f(x) = L$.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : D_f \longrightarrow R$ dengan

$$n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = L.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to y} f(x) = L$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $I_L = N_\varepsilon(L)$, maka ada I_y sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_L = N_\varepsilon(L)$. Misalkan $I_y = (u,v)$ dan $\delta = \min\{y-u, v-y\}$, maka untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f \subseteq I_y \cap D_f$, berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(L)$. Dengan kata lain $\lim_{x \to y} f(x) = L$. Sebaliknya jika $\lim_{x \to y} f(x) = L$, maka akan ditunjukkan bahwa $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = L$. Ambil sebarang $I_L \in \mathscr{I}_L$, misalkan $I_L = (a,b)$ dan $\varepsilon = \min\{L-a, b-L\}$, maka ada $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f$, berlaku

$$f(x) \in N_\varepsilon(L) \subseteq I_L.$$

Selanjutnya pilih $I_y = N_\delta(y)$, maka untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$, berlaku $f(x) \in I_L$. Dengan kata lain $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = L$. ∎

Syarat perlu dan cukup untuk menentukan apakah suatu fungsi mempunyai limit fungsi $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam teorema di bawah ini.

Syarat perlu dan cukup ini berhubungan dengan limit $n\varepsilon\delta$ suatu barisan.

Teorema 4.36. :

Misalkan y titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan D_f.

$n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{x \to y} f(x) = L$ jika dan hanya jika $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f, dengan $x_n \neq y$, yang konvergen $n\varepsilon\delta$ ke y.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f: D_f \longrightarrow R$ dan sebarang y titik-limit $n\varepsilon\delta$ himpunan D_f. Jika $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{x \to y} f(x) = L$, akan ditunjukkan bahwa $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f, dengan $x_n \neq y$, yang konvergen $n\varepsilon\delta$ ke y. Ambil sebarang barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $x_n \neq y$ dan $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$. Selanjutnya ambil sebarang $I_L \in \mathcal{G}_L$. Karena $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{x \to y} f(x) = L$, maka ada $I_y \in \mathcal{G}_y$ sehingga $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_L$. Diketahui pula bahwa $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$, sehingga ada $n_o \in N$, sehingga untuksetiap $n \geq n_o$ berlaku $x_n \in I_y$. Dengan demikian untuk setiap $n \geq n_o$ berlaku $f(x_n) \in I_L$. Jadi $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$. Sebaliknya andaikan untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $x_n \neq y$ dan $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$, berlaku $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ tetapi $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{x \to y} f(x) \neq L$. Karena $n\varepsilon\delta$-$\lim\limits_{x \to y} f(x) \neq L$, maka ada $I_L \in \mathcal{G}_L$, sehingga untuk setiap $I_y \in \mathcal{G}_y$ ada $x \in I_y \cap D_f$ dengan $x \neq y$ dan $f(x) \notin I_L$. Selanjutnya untuk setiap $n \in N$, pilih $I_y^n = (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$ maka ada $x_n \in I_y^n \cap D_f$ dengan $x_n \neq y$ dan $f(x_n) \notin I_L$.

Dengan pemilihan x_n diperoleh barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $x_n \neq y$ dan $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = y$ tetapi $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq L$. Kontradiksi. ∎

Ketunggalan limit fungsi $n\varepsilon\delta$ diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.37. :

Jika $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x)$ ada, maka nilai limitnya tunggal.

Bukti : Menurut teorema 4.36. dan 4.31. diperoleh bahwa jika $n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x)$ ada, maka nilai limitnya tunggal. ∎

Selanjutnya diberikan syarat cukup untuk menentukan apakah suatu fungsi tidak mempunyai limit fungsi $n\varepsilon\delta$. Pembuktian dari teorema ini serupa dengan pembuktian teorema 4.36.

Definisi 4.38. :

Fungsi $f\colon D_f \longrightarrow R$ dikatakan kontinyu $n\varepsilon\delta$ pada $y \in D_f$, jika untuk setiap $I_{f(y)} \in \mathcal{G}_{f(y)}$ ada $I_y \in \mathcal{G}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Jika f kontinyu pada $x \in D_f$, maka f dikatakan kontinyu pada D_f.

Kekonvergenan definisi kekontinyuan $n\varepsilon\delta$ fungsi dan definisi kekontinyuan fungsi sebelumnya diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.39. :

f kontinyu $n\delta$ pada D_f jika dan hanya jika f kontinyu pada D_f.

Bukti : Ambil sebarang $f: D_f \to R$ dengan f kontinyu $n\delta$ pada $y \in D_f$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinyu pada y. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $I_{f(y)} = N_\varepsilon(f(y))$, maka ada $I_y \in \mathcal{S}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y))$. Misalkan $I_y = (a,b)$ dan $\delta = \min\{y-a, b-y\}$, maka $N_\delta(y) \subset I_y$. Dengan demikian untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y))$. Oleh karena itu f kontinyu pada y. Sebaliknya jika f kontinyu pada $y \in D_f$, maka akan ditunjukkan bahwa f kontinyu $n\delta$ pada y. Ambil sebarang $I_{f(y)} \in \mathcal{S}_{f(y)}$, misalkan $I_{f(y)} = (a,b)$ dan $\varepsilon = \min\{f(y)-a, b-f(y)\}$. Maka ada $N_\delta(y)$ sehingga untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y)) \subset I_{f(y)}$. Selanjutnya pilih $I_y = N_\delta(y)$, maka untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Dengan kata lain f kontinyu $n\delta$ pada y. ∎

Dua syarat perlu dan cukup untuk menentukan kekontinyuan suatu fungsi diberikan pada dua teorema di bawah ini.

Teorema 4.40. :

Misalkan y titik-limit $n\delta$ himpunan D_f dengan $y \in D_f$. f kontinyu $n\delta$ pada y jika dan hanya jika $n\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$.

Bukti : Ambil sebarang $f: D_f \to R$ dengan f kontinyu pada y titik-limit $n\delta$ himpunan D_f. Akan ditunjukkan bahwa

$$n\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = f(y).$$

Ambil sebarang $I_{f(y)} \in \mathcal{J}_{f(y)}$. Karena f kontinyu $n\delta$ pada y, maka ada $I_y \in \mathcal{J}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ dengan $x \neq y$ berlaku

$f(x) \in I_{f(y)}$. Oleh karena itu $n\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$. Sebaliknya jika $n\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$, maka untuk setiap $I_{f(y)} \in \mathcal{J}_{f(y)}$ ada $I_y \in \mathcal{J}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ dengan $x \neq y$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Karena $y \in D_f$, maka untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Dengan kata lain f kontinyu pada y. ∎

Teorema 4.41. :

f kontinyu di y jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = y$ berlaku $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(y)$.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : D_f \to R$ dengan f kontinu $n\delta$ pada y, akan ditunjukkan bahwa $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(y)$ untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = y$. Ambil sebarang barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = y$. Selanjutnya ambil sebarang $I_{f(y)} \in \mathcal{J}_{f(y)}$. Karena $n\delta\text{-}\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$, maka ada $I_y \in \mathcal{J}_y$ sehingga $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Diketahui pula bahwa $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = y$, sehingga ada $n_o \in N$, sehingga untuksetiap $n \geq n_o$ berlaku $x_n \in I_y$. Dengan demikian untuk setiap $n \geq n_o$ berlaku $f(x_n)$

$I_{f(c)}$. Oleh karena itu $n\delta\text{-}\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Sebaliknya andaikan untuk setiap barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = c$, berlaku

$$n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c) \text{ tetapi } n\delta\text{-}\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c).$$

Karena $n\delta\text{-}\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$, maka ada $I_{f(c)} \in \mathcal{I}_{f(c)}$ sehingga untuk setiap $I_c \in \mathcal{I}$ ada $x \in I_c \cap D_f$ dan $f(x) \notin I_{f(c)}$. Selanjutnya untuk setiap $n \in N$, pilih $I_n = (c - \frac{\delta}{n}, c + \frac{\delta}{n})$ maka ada $x_n \in I_n \cap D_f$ dengan $f(x_n) \notin I_{f(c)}$. Dengan pemilihan x_n diperoleh barisan $\{x_n\}$ dalam D_f dengan $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = c$ tetapi $n\delta\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq f(c)$. Kontradiksi. ∎

4.4. Turunan

Definisi 4.42. :

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$ suatu fungsi. f dikatakan terdeferensial pada $c \in (a,b)$ jika $n\delta\text{-}\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ ada dan ditulis

$f'(c) = n\delta\text{-}\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. $f'(c)$ disebut turunan f pada c.

Selanjutnya akan diberikan suatu teorema yang menyatakan eksistensi fungsi kontinyu $n\delta$ yang berhubungan dengan fungsi diferensiabel.

Teorema 4.43. :

Jika $f : (a,b) \longrightarrow R$ mempunyai turunan pada $c \in (a,b)$ jika dan hanya jika fungsi kontinyu $n\delta$, $f^{*} : (a,b) \longrightarrow R$, yang memenuhi : untuk setiap $x \in (a,b)$ berlaku :

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c) \text{ dan } f^*(c) = f'(c).$$

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$. Jika f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$, maka $n\varepsilon\delta\text{-}\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x - c}$ ada dan

$f'(c) = n\varepsilon\delta\text{-}\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x - c}$. Selanjutnya definisikan fungsi

$f : (a,b) \longrightarrow R$ dengan

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} &, \text{ jika } x \neq c \\ f'(c) &, \text{ jika } x = c. \end{cases}$$

Dengan demikian f^* kontinyu $n\varepsilon\delta$ dan memenuhi

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c) \text{ dan } f^*(c) = f'(c).$$

Sebaliknya jika ada fungsi $f^* : (a,b) \longrightarrow R$ yang kontinyu $n\varepsilon\delta$ dan memenuhi $f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c)$ dan $f^*(c) = f'(c)$,

maka

$$n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to c} f^*(x) = n\varepsilon\delta\text{-}\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x - c} = f^*(c) = f'(c).$$

Dengan demikian f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$.∎

Hubungan antara fungsi yang dapat diturunkan dengan fungsi kontinyu $n\varepsilon\delta$ dapat dilihat pada teorema di bawah ini.

Teorema 4.44. :

Jika $f : (a,b) \longrightarrow R$ terdefferensial pada c, maka f kontinyu $n\varepsilon\delta$ pada c.

Bukti : Karena c titik limit $n\varepsilon\delta$ pada interval (a,b) dan

$n\varepsilon\delta\text{-}\lim\limits_{x \to c} f(x) = n\varepsilon\delta\text{-}\lim\limits_{x \to c} \{f(c) + (x-c)f^*(c)\} = f(c)$, maka f kontinu $n\varepsilon\delta$ pada c.∎

Di dalam bagian ini dibicarakan pengertian dan sifat-sifat integral tanpa melibatkan epsilon delta. Sebelum membicarakan tentang pengertian integral terlebih dahulu akan didefinisikan suatu himpunan yang memegang peranan penting di dalam teori integral yang akan dibangun.

[illegible] 4.5.1. :

Untuk setiap [illegible][a,b] diambil tepat satu I_x. Koleksi semua I_x tersebut ditulis dengan [illegible][a,b].

Eksistensi partisi pada himpunan [illegible][a,b] diberikan di dalam teorema di bawah ini.

[illegible] 4.5.2. :

Untuk setiap [illegible][a,b] ada partisi

$$P = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b; [illegible], \ldots, [illegible]\}$$

dengan

[illegible] $I_x = (u_i, v_i)$ untuk setiap [illegible], dan

$$[a,b] \; [illegible] \; n \; [illegible].$$

[illegible] : Ambil sebarang [illegible][a,b]. Karena setiap $I_x \in$ [illegible][a,b] merupakan himpunan terbuka n[illegible] dan $[a,b] \subseteq \bigcup_{I_x \in [illegible][a,b]} I_x$, dapat disimpulkan [illegible][a,b] merupakan selimut terbuka n[illegible] selang[a,b]. Karena [a,b] merupakan himpunan kompak n[illegible], ada $I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n} \in$ [illegible][a,b] dengan

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, sehingga $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}$. Oleh karena itu untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n-1$ berlaku $I_{x_i} \cap I_{x_{i+1}} \neq \emptyset$. Dengan demikian dapat dipilih $a_0 = a$,

$a_n = b$, dan untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$ dipilih $a_i \in I_{x_i} \cap I_{x_{i+1}}$ dengan $x_i \le a_i \le x_{i+1}$. Jadi

$$P = \{a_0=a, a_1, \ldots, a_n=b: x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

merupakan partisi dengan $u_i = a_{i-1} \le x_i \le a_i = v_i$ dan $I_{x_i} = (u_i, v_i)$ untuk setiap i.∎

Definisi 4.5.3. :

Partisi P yang diperoleh dari $\mathscr{G}[a,b]$ pada definisi 4.5.2. disebut partisi mulus, sedangkan $\mathscr{G}[a,b]$ disebut pembangkit partisi mulus P. Partisi mulus P yang dibangkitkan oleh $\mathscr{G}[a,b]$ dinotasikan dengan $P \ll \mathscr{G}[a,b]$.

Lema di bawah ini banyak digunakan dalam pembuktian teorema-teorema dalam teori integral.

Lema 4.5.4. :

Untuk setiap dua pembangkit partisi mulus pada selang [a,b] $\mathscr{G}_1[a,b]$ dan $\mathscr{G}_2[a,b]$, maka

$$\mathscr{G}[a,b] = \{I_x^1 \cap I_x^2 : I_x^1 \in \mathscr{G}_1[a,b] \text{ dan } I_x^2 \in \mathscr{G}_2[a,b]\}$$

juga pembangkit partisi mulus pada selang yang sama. Lebih lanjut, jika $P \in \wp[a,b]$ maka $P \in \wp_1[a,b]$ dan $P \in \wp_2[a,b]$.

Bukti : Ambil sebarang $\wp_1[a,b]$ dan $\wp_2[a,b]$ dua pembangkit partisi mulus pada $[a,b]$, misalkan

$$\wp[a,b] = \{ I^1_{x} \cap I^2_{x} : I^1_{x} \in \wp_1[a,b] \text{ dan } I^2_{x} \in \wp_2[a,b] \}.$$

Ambil sebarang $P \in \wp[a,b]$, misalkan

$$P = \{ a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b ; x_1, x_2, \ldots, x_n \}.$$

Maka dengan teorema 4.5.2. diperoleh :

$u_i \leq a_{i-1} \leq x_i \leq a_i \leq v_i$ dan $I_{x_i} = (u_i, v_i)$ untuk setiap i. Dari pendefinisian $\wp[a,b]$ diperoleh :

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n-1$ berlaku :

$a_i \in (I^1_{x_i} \cap I^2_{x_i}) \cap (I^1_{x_{i+1}} \cap I^2_{x_{i+1}}) = (I^1_{x_i} \cap I^1_{x_{i+1}}) \cap (I^2_{x_i} \cap I^2_{x_{i+1}})$, dengan

$I^1_{x_i}, I^1_{x_{i+1}} \in \wp_1[a,b]$ dan $I^2_{x_i}, I^2_{x_{i+1}} \in \wp_2[a,b]$, sehingga

$$a_i \in I^1_{x_i} \cap I^1_{x_{i+1}} \quad \text{dengan } I^1_{x_i}, I^1_{x_{i+1}} \in \wp_1[a,b]$$

dan

$$a_i \in I^2_{x_i} \cap I^2_{x_{i+1}} \quad \text{dengan } I^2_{x_i}, I^2_{x_{i+1}} \in \wp_2[a,b].$$

Selanjutnya $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (I^1_{x_i} \cap I^2_{x_i}) \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} I^1_{x_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} I^2_{x_i})$ dengan

$I^1_{x_i} \in \wp_1[a,b]$ dan $I^2_{x_i} \in \wp_2[a,b]$. Sehingga diperoleh :

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I^1_{x_i} \quad \text{dengan } I^1_{x_i} \in \wp_1[a,b]$$

dan

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}^{2} \text{ dengan } I_{x_i}^{2} \in \mathcal{I}_2[a,b].$$

Kemudian $I_{x_i} = (u_i, v_i) = I_{x_i}^{1} \cap I_{x_i}^{2}$ dengan $I_{x_i}^{1} \in \mathcal{I}_1[a,b]$ dan $I_{x_i}^{2} \in \mathcal{I}_2[a,b]$. Sehingga diperoleh :

$$I_{x_i} = (u_i, v_i) \subset I_{x_i}^{1} = (u_i^{1}, v_i^{1})$$

dan

$$I_{x_i} = (u_i, v_i) \subset I_{x_i}^{2} = (u_i^{2}, v_i^{2}).$$

Dari uraian di atas diperoleh P-$\mathcal{I}_1$[a,b] dan P-$\mathcal{I}_2$[a,b].∎

Setelah dibangun himpunan $\mathcal{I}$[a,b] dan partisi mulus P-$\mathcal{I}$[a,b], selanjutnya didefinisikan integral fungsi f : [a,b] → R.

Definisi 4.5.5. :

Fungsi f : [a,b] → R dikatakan terintegral mulus pada [a,b], jika ada A ∈ R, sehingga untuk setiap $I_A \in \mathcal{I}_A$, ada $\mathcal{I}$[a,b] sehingga untuk setiap P-$\mathcal{I}$[a,b], misalkan

$$P = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \text{ berlaku :}$$

$$P\sum f(x)(v-u) = \sum_{j=1}^{m} f(y_j)(c_j - c_{j-1}) \in I_A,$$

dengan m ≤ n, $\{y_j : 1 \le j \le m\} \subseteq \{x_i : 1 \le i \le n\}$, $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{y_i}$, $c_j = a_i$ dan $c_{j-1} = a_{i-1}$ jika $y_j = x_i$, dan untuk setiap i≠j, berlaku I_{y_i} bukan himpunan bagian dari I_{y_j}. Nilai A disebut nilai integral mulus fungsi f pada [a,b] dan dituliskan dengan $A = (M)\int_a^b f$.

Setelah didefinisikan integral suatu fungsi, selanjutnya akan diberikan suatu teorema yang menyatakan ketunggalan nilai integrasi tersebut.

Teorema 4.5.6. : (Teorema ketunggalan nilai integral)

Jika f terintegral mulus pada [a,b], maka nilai integralnya tunggal.

Bukti : Ambil sebarang f fungsi terintegral mulus pada [a,b], misalkan A dan B dua nilai integral mulusnya. Akan ditunjukkan bahwa A = B. Ambil sebarang $I_\varepsilon \in \mathcal{I}_0$ dengan $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ dan $\varepsilon > 0$. Karena $(M)\int_a^b f = A$ dan $(M)\int_a^b f = B$, maka ada δ_1 [a,b] dan δ_2 [a,b] sehingga untuk setiap $P_1 - \delta_1$ [a,b] dan $P_2 - \delta_2$ [a,b] berlaku :

$$P_1 \sum f(x)(v-u) \in \left(A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

dan

$$P_2 \sum f(x)(v-u) \in \left(B - \frac{\varepsilon}{2}, B + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pilih δ[a,b] = $\{I_1^{\delta} \cap I_2^{\delta} : I_1^{\delta} \in \delta_1$ [a,b] dan $I_2^{\delta} \in \delta_2$ [a,b]$\}$, maka dengan lemma 4.5.4. diperoleh untuk setiap $P - \delta$[a,b] berlaku $P - \delta_1$ [a,b] dan $P - \delta_2$ [a,b]. Sehingga

$$B - A = B - P \sum f(x)(v-u) + P \sum f(x)(v-u) - A \in I_\varepsilon.$$

Oleh karena itu A = B. ∎

Definisi 4.5.7.

$M[a,b] = \{f : [a,b] \to \bar{R} : f$ terintegral mulus pada $[a,b]\}$.

Dengan menggunakan operasi penjumlahan dua fungsi dan operasi perkalian fungsi dengan anggota R. ternyata himpunan M[a,b] merupakan suatu ruang linear. Hal ini dituangkan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.5.8. :

M[a,b] merupakan ruang linear.

Bukti : Untuk membuktikan M[a,b] merupakan ruang linear, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap $f,g \in M[a,b]$ dan untuk setiap $\alpha \in R$ berlaku : $f + g$ dan $\alpha f \in M[a,b]$. Ambil sebarang $f,g \in M[a,b]$, misalkan $(M)\int_a^b f = A$ dan $(M)\int_a^b g = B$, akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b (f+g) = A+B$. Ambil sebarang $I_{A+B} \in \mathcal{I}_{A+B}$, misalkan $I_{A+B} = (A+B-\varepsilon, A+B+\varepsilon)$. Karena $(M)\int_a^b f = A$ dan $(M)\int_a^b g = B$, maka ada $\delta_1[a,b]$ dan $\delta_2[a,b]$ sehingga untuk setiap $P_1-\delta_1[a,b]$ dan $P_2-\delta_2[a,b]$ berlaku :

$$P_2\Sigma\, f(x)(v-u) \in (B - \tfrac{\varepsilon}{2}, B + \tfrac{\varepsilon}{2})$$

dan

$$P_1\Sigma\, f(x)(v-u) \in (A - \tfrac{\varepsilon}{2}, A + \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Pilih $\delta[a,b] = \{I_x^1 \cap I_x^2 : I_x^1 \in \delta_1[a,b]$ dan $I_x^2 \in \delta_2[a,b]\}$, maka dengan lemma 4.5.4. diperoleh untuk setiap $P-\delta[a,b]$, berlaku $2P-\delta_1[a,b]$ dan $P-\delta_2[a,b]$. Sehingga

$$P\Sigma\, (f+g)(x)(v-u) = P\Sigma\, f(x)(v-u) + P\Sigma\, g(x)(v-u) \in I_{A+B}.$$

Oleh karena itu $(M)\int_a^b (f+g) = A+B$, sehingga $f+g \in M[a,b]$. Selanjutnya Ambil sebarang $f \in M[a,b]$ dan $\alpha \in R$, misalkan $(M)\int_a^b f = A$.

Akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b \alpha f = \alpha A$. Ambil sebarang $I_{\alpha A} \in \mathcal{I}_{\alpha A}$, misalkan $I_{\alpha A} = (c,d)$. Karena $(M)\int_a^b f = A$ maka ada $\delta[a,b]$ sehingga untuk setiap $P \ll \delta[a,b]$ berlaku :

$$P\Sigma\, f(x)(v-u) \in \left(\frac{c}{\alpha},\frac{d}{\alpha}\right), \text{ jika } \alpha > 0$$

atau

$$P\Sigma\, f(x)(v-u) \in \left(\frac{d}{\alpha},\frac{c}{\alpha}\right), \text{ jika } \alpha < 0.$$

Sehingga $P\Sigma(\alpha f)(x)(v-u) = \alpha P\Sigma f(x)(v-u) \in I_{\alpha A}$. Sedangkan jika $\alpha = 0$, maka $P\Sigma \alpha f(x)(v-u) \in I_{\alpha A}$. Oleh karena itu $(M)\int_a^b \alpha f = \alpha A$. Dengan demikian $\alpha f \in M[a,b]$. ∎

Teorema 4.5.9. :

Untuk setiap $c \in [a,b]$, jika $f \in M[a,c]$ dan $f \in M[c,b]$, maka $f \in M[a,b]$ dan $(M)\int_a^b f = (M)\int_a^c f + (M)\int_c^b f$.

Bukti : Ambil sebarang $c \in [a,b]$, $f \in M[a,c]$, dan $f \in M[c,b]$. Misalkan $(M)\int_a^c f = A$ dan $(M)\int_c^b f = B$. akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b f = A+B$. Ambil sebarang $I_{A+B} \in \mathcal{I}_{A+B}$, misalkan $I_{A+B} = (A+B-\varepsilon, A+B+t)$ dengan $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$. Karena $(M)\int_a^c f = A$ dan $(M)\int_c^b f = B$, maka ada $\delta_1[a,c]$ dan $\delta_2[c,b]$ sehingga untuk setiap $P_1 \ll \delta_1[a,b]$ dan $P_2 \ll \delta_2[a,b]$ berlaku :

$$P_1\Sigma\, f(x)(v-u) \in \left(B-\frac{\varepsilon}{2}, B+\frac{t}{2}\right)$$

dan

$$P_2\Sigma\, f(x)(v-u) \in \left(A-\frac{\varepsilon}{2}, A+\frac{t}{2}\right).$$

Selanjutnya pilih

$\mathcal{I}[a,b] = \{I' \cap I_\delta : I' \in \mathcal{I}[a,c], I'' \in \mathcal{I}[c,b], c \in I_\delta\} \cup$

$\{I'' \cap I_\delta : I'' \in \mathcal{I}(c,b], I'' \neq \emptyset [c,b], c \notin I_\delta\} \cup$

$\{I' \cap I_\delta : I' \in \mathcal{I}[a,c] \text{ dan } I' \neq \emptyset [a,c]\}$,

maka diperoleh untuk setiap $P \prec \mathcal{I}[a,b]$, misalkan

$$P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n ; x_1, \ldots, x_n\}$$

ada sehingga $x_k = c$. Oleh karena itu

$$P_1 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} ; x_1, \ldots, x_{k-1}\}$$

merupakan $P_1 \prec \mathcal{I}_1[a,b]$ dan

$$P_2 = \{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n ; x_k, \ldots, x_n\}$$

merupakan $P_2 \prec \mathcal{I}_2[a,b]$. Sehingga

$$P\Sigma f(x)(v-u) = P_1\Sigma f(x)(v-u) + P_2\Sigma f(x)(v-u) \in I_{A+B}.$$

Jadi $(M)\int_a^b f = A + B$, dan dengan demikian $f \in M[a,b]$. ∎

Selanjutnya akan diberikan syarat Cauchy pada integral mulus. Syarat Cauchy ini akan digunakan dalam membuktikan teorema yang menyatakan bahwa jika f terintegral mulus pada [a,b], maka f juga terintegral mulus pada $[c,d] \subset [a,b]$.

Teorema 4.3.10. (Syarat Cauchy Integral Mulus)

$f \in M[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $I_0 \in \mathcal{I}_0$, ada $\mathcal{I}[a,b]$ sehingga untuk setiap $P_1 \prec \mathcal{I}[a,b]$ dan $P_2 \prec \mathcal{I}[a,b]$ berlaku

$$P_1\Sigma f(x)(v-u) - P_2\Sigma f(x)(v-u) \in I_0.$$

Bukti : Ambil sebarang $f \in M[a,b]$, misalkan $(M)\int_a^b f = A$. Selanjutnya ambil sebarang $I_0 \in \mathcal{I}_0$, dengan $I_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dan $\varepsilon > 0$. Karena

$(M)\int_a^b f = A$, maka ada $\delta[a,b]$ sehingga untuk setiap $P-\delta[a,b]$ berlaku :

$$P\sum f(x)(v-u) \in I_A = (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

dengan $\rho = \min\{\cdot, \varepsilon\}$. Sehingga untuk setiap $P_1 - \delta[a,b]$ dan $P_2 - \delta[a,b]$ berlaku :

$$P_1\sum f(x)(v-u) - P_2\sum f(x)(v-u) \in (-\rho,\rho) \subset I_0 = (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Sebaliknya diketahui untuk setiap $I_0 \in \mathcal{I}_0$, ada $\delta[a,b]$ sehingga untuk setiap $P_1 - \delta[a,b]$ dan $P_2 - \delta[a,b]$ berlaku :

$$P_1\sum f(x)(v-u) - P_2\sum f(x)(v-u) \in I_0.$$

Akan ditunjukkan bahwa $f \in M[a,b]$. Selanjutnya untuk setiap $n \in N$, pilih $I_0^n = (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ dengan $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n > 0, s_n \ge s_{n+1}, s_n \ge s_{n+1}, n\delta - \varepsilon_n \longrightarrow 0$, dan $n\delta - \varepsilon_n \longrightarrow 0$. Maka untuk setiap n, ada $\delta_n[a,b]$ sehingga untuk setiap $P_1 - \delta_n[a,b]$ dan $P_2 - \delta_n[a,b]$ berlaku :

$$P_1\sum f(x)(v-u) - P_2\sum f(x)(v-u) \in I_0^n,$$

dan untuk setiap $I_0^n \in \delta_n[a,b]$ dan $I_0^{n+1} \in \delta_{n+1}[a,b]$ berlaku :

$$I_0^n \supseteq I_0^{n+1}.$$

Untuk setiap $n \in N$, misalkan $\rho_n = P_n\sum f(x)(v-u)$ dengan $P_n - \delta_n[a,b]$. Maka $\{\rho_n\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya ambil sebarang $I_0 \in \mathcal{I}_0$, maka ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n \ge n_0$ berlaku $I_0^n = (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \subseteq I_0$. Sehingga dari lemma 4.5.4. diperoleh untuk setiap $P-\delta_n[a,b]$, maka juga $P-\delta_{n_0}[a,b]$. Sehingga untuk setiap n, $m \ge n_0$, misalkan $n > m$, berlaku:

$$\rho_n - \rho_m = P_n\sum f(x)(v-u) - P_m\sum f(x)(v-u) \in I_0^n \in I_0.$$

Oleh karena itu $\{p_n\}$ me[illegible] $n\to\infty$, sehingga menurut teorema 3.27 barisan $\{p_n\}$ konvergen, misalkan konvergen $n\to\infty$ ke A. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b f = A$. Ambil sebarang $I_A \in \mathcal{I}_A$, misalkan $I_A = (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Karena barisan $\{p_n\}$ konvergen $n\to\infty$ ke A, maka ada $n_1 \in N$, sehingga untuk setiap $n \geq n_1$, berlaku :

$$p_n \in I_A^1 = (A-\frac{\varepsilon}{2}, A+\frac{\varepsilon}{2}).$$

Karena $n\to\infty$ $-s_n \longrightarrow 0$ dan $n\to\infty$ $-t_n \longrightarrow 0$, maka ada $n_2 \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_2$, berlaku $I_0^n \subseteq (-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$. Oleh karena itu untuk setiap $n \geq n_2$, $P_1-\delta_n[a,b]$, dan $P_2-\delta_n[a,b]$ berlaku :

$$P_1\sum f(x)(v-u) - P_2\sum f(x)(v-u) \in I_0^n \subseteq (-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}).$$

Selanjutnya pilih n_0 = maks $\{n_1, n_2\}$, maka diperoleh untuk setiap $P-\delta_{n_0}[a,b]$ berlaku :

$$P\sum f(x)(v-u) = P\sum f(x)(v-u) - p_{n_0} + p_{n_0} \in I_A = (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

Oleh karena itu $(M)\int_a^b f = A$. Sehingga $f \in M[a,b]$. ∎

Teorema 4.5.11. :

Untuk setiap $[c,d] \subseteq [a,b]$, jika $f \in M[a,b]$, maka $f \in M[c,d]$.

Bukti : Ambil sebarang $f \in M[a,b]$ dan $[c,d] \subseteq [a,b]$, akan ditunjukkan bahwa $f \in M[c,d]$. Ambil sebarang $I_0 \in \mathcal{I}_0$. Karena $f \in M[a,b]$, maka dengan teorema 4.5.10. ada $\delta[a,b]$ sehingga untuk setiap $P-\delta[a,b]$ dan $Q-\delta[a,b]$ berlaku :

$$P\sum f(x)(v-u) - Q\sum f(x)(v-u) \in I_0.$$

Pilih

$\mathcal{F}[a,c] = \{I \in \mathcal{F}[a,b] : I \subseteq [a,c]\}$, $\mathcal{F}[c,d] = \{I \in \mathcal{F}[a,b] : I \subseteq [c,d]\}$, dan $\mathcal{F}[d,b] = \{I \in \mathcal{F}[a,b] : I \subseteq [d,b]\}$. Ambil sebarang $P_1 \in \mathcal{F}[c,d]$, $P_2 \in \mathcal{F}[c,d]$, $P_3 \in \mathcal{F}[a,c]$, dan $P_4 \in \mathcal{F}[d,b]$, maka untuk berlaku $P_3 \cup P_1 \cup P_4 \in \mathcal{F}[a,b]$. Sehingga

$$|P_1 \sum f(x)(v-u) - P_2 \sum f(x)(v-u)| =$$

$$|P_1 \sum f(x)(v-u) + P_3 \sum f(x)(v-u) + P_4 \sum f(x)(v-u)$$

$$- \{P_2 \sum f(x)(v-u) + P_3 \sum f(x)(v-u) + P_4 \sum f(x)(v-u)\}| =$$

$$|(P_1 \cup P_3 \cup P_4) \sum f(x)(v-u) - (P_2 \cup P_3 \cup P_4) \sum f(x)(v-u)| < \varepsilon .$$

Oleh karena itu dengan teorema 4.5.10. diperoleh $f \in M[c,d]$. ∎

Dari teorema 4.5.11. diperoleh untuk setiap $x \in [a,b]$, jika $f \in M[a,b]$, maka $f \in M[a,x]$. Sehingga dapat didefinisikan fungsi $F : [a,b] \to R$, dengan $F(x) = (M)\int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Dari pendefinisian fungsi F, diperoleh :

$F(a) = (M)\int_a^a f = (M)\int_a^a f + (M)\int_a^b f - (M)\int_a^b f = (M)\int_a^b f - (M)\int_a^b f = 0$ dan untuk setiap partisi $P = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n\}$ berlaku :

$$(M)\int_{a_{i-1}}^{a_i} f = \{F(a_i) - F(a_{i-1})\}.$$

Untuk selanjutnya $(M)\int_{a_{i-1}}^{a_i} f = \{F(a_i) - F(a_{i-1})\}$ dinotasikan dengan $F(a_{i-1}, a_i)$. Fungsi F yang didefinisikan di atas disebut primitif fungsi f.

Selanjutnya jika $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $f \in M[a,b]$ dan $(M)\int_a^b f=0$. Ternyata jika $f(x) = 0$ a.e. pada $[a,b]$ yaitu

$$\mu(\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}) = 0,$$

dengan $\mu(X)$ menyatakan ukuran himpunan X, maka $(M)\int_a^b f = 0$. Hal ini diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.5.12. :

Jika $f(x) = 0$ a.e. pada $[a,b]$, maka $(M)\int_a^b f = 0$.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f:[a,b] \longrightarrow \bar{R}$, dengan $f(x)=0$ a.e. pada $[a,b]$. Akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b f = 0$. Ambil sebarang $I \in \mathcal{N}_0$, misalkan $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ dengan $\varepsilon > 0$, dan $\delta > 0$. Misalkan $X = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$, maka X berukuran nol, oleh karena itu ada $I_{x_n} = (u_n, v_n) \in \mathcal{N}_{x_n}$ dengan $x_n \in [a,b]$, $I_{x_n} \cap I_{x_{n+1}} = \emptyset$, dan $x_n < x_{n+1}$ sehingga

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) \in I_\varepsilon .$$

Oleh karena itu untuk setiap $x \in X$, ada I_{x_n} sehingga $x \in I_{x_n}$, dan ada $x \in X^c$ sehingga $x \in I_x$. Selanjutnya akan dibangun $\mathcal{P}[a,b]$ sebagai berikut :

(i). Jika $x < u_1$, maka dipilih $I_x = (a_i, b_i)$ dengan $a_i \in I_{x_{i-1}} \cap X^c$, untuk setiap $i = 2, 3, \ldots$, $a_1 \in [a, u_1)$, dan $b_i \in I_{x_i} \cap X^c$ untuk setiap $i \in N$.

(ii). Jika $x = v_i$, maka dipilih $I_x = (c_i, d_i)$ dengan $c_i \in I_{x_-} \cap X$, $d_i \in I_{x_+} \cap X$, dan ada $p, q \in X \cap (I_u \cup I_v)^c \cap I_x$ dengan $p < q$.

(iii). Jika $x \in X \cap I_{u_i} \cap I_{x_i}$, maka dipilih $I_{x_i} = I_{u_i} \cap I_{x_i}$.

(iv). Jika $x \in X \cap I_v \cap I_x$, maka dipilih $I_{x_i} = I_v \cap I_{x_i}$.

(v). Jika $x \in X \cap (I_u \cup I_v)^c \cap I_{x_i}$, maka dipilih $I_{x_i} = (I_{u_i} \cup I_{v_i})^c \cap I_{x_i}$.

(vi). Jika $x \in X \cap (I_u \cup I_v)' \cap I_{x_i}$, maka dipilih $I_x = I_x$.

(vii). Jika $x \in [a,b] - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n$, maka dipilih $I_x \in \mathcal{P}_x$ sehingga

$$I_x \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Selanjutnya ambil sebarang $P \in \mathcal{P}[a,b]$, misalkan

$$P = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b; y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Jika ada i sehingga $y_i \in X$, maka ada I_{x_n} sehingga $y_i \in I_{x_n}$. Dengan demikian terdapat tiga kemungkinan nilai y_i, yaitu :

$y_i \in X \cap I_{u_n} \cap I_{x_n}$, $y_i \in X \cap I_{v_n} \cap I_{x_n}$, atau $y_i \in X \cap (I_{u_n} \cup I_{v_n})^c \cap I_{x_n}$.

Jika $y_i \in X \cap I_{u_n} \cap I_{x_n}$, maka $I_{y_i} \subset I_{u_n} \cap I_{x_n}$. Karena $u_n \notin I_{y_i}$, maka ada k dengan $k < i$, sehingga $u_n \in I_{y_k}$. Karena yang memuat u_n hanya I_{u_n}, maka $I_{y_k} = I_{u_n}$. Tetapi $I_{y_i} \subset I_{u_n}$. Sehingga nilai $f(y_i)(a_i - a_{i-1})$ tidak dimasukkan dalam perhitungan

$$P \sum f(v)(v-u).$$

Selanjutnya jika $y_i \in X \cap I_{v_n} \cap I_{x_i}$, maka $I_{y_i} \subset I_{v_n} \cap I_{x_n}$. Karena $v_n \in I_{y_i}$, maka ada k dengan $k > n$ sehingga $v_n \in I_{y_k}$. Karena yang memuat v_n hanya I_{v_n}, maka $I_{y_k} = I_{v_n}$. Tetapi $I_{y_i} \subset I_{v_n}$. Sehingga nilai $f(y_i)(a_i - a_{i-1})$ tidak dimasukkan dalam perhitungan $P\Sigma f(y)(v-u)$.

Sedangkan jika $y_i \in X \cap (I_{u_n} \cup I_{v_n})^c \cap I_{x_n}$, maka

$$I_{y_i} \subset (I_{u_n} \cup I_{v_n})^c \cap I_{x_n}.$$

Oleh karena itu ada $p \in \{(I_{u_n} \cup I_{v_n})^c \cap I_{x_n} - I_{y_i}\} \cap X^c$, sehingga ada k dengan $k \neq i$ sehingga $p \in I_{y_k}$. Karena yang memuat p hanya I_{x_n} maka $I_{y_k} = I_{x_n}$. Tetapi $I_{y_i} \subset I_{x_n}$. Sehingga nilai $f(y_i)(a_i - a_{i-1})$ tidak dimasukkan dalam perhitungan $P\Sigma f(x)(v-u)$.

Jadi untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ berlaku $P\Sigma f(x)(v-u) = 0 \in I_0$. Dengan kata lain $(M)\int_a^b f = 0$. ∎

Dari teorema 4.5.12. dapat disimpulkan bahwa jika $f = g$ a.e. pada $[a,b]$ dan $f, g \in M[a,b]$, maka $(M)\int_a^b f = (M)\int_a^b g$. Demikian pula jika $f, g \in M[a,b]$ dengan $f \leq g$ a.e. pada $[a,b]$, maka $(M)\int_a^b f \leq (M)\int_a^b g$. Hal ini dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.5.13. :

Jika $f, g \in M[a,b]$ dan $f \leq g$ a.e., maka $(M)\int_a^b f \leq (M)\int_a^b g$.

Bukti : Ambil sebarang $f, g \in M[a,b]$ dengan $f \leq g$ a.e. akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b f \leq (M)\int_a^b g$. Misalkan $(M)\int_a^b f = A$ dan $(M)\int_a^b g = B$. Selanjutnya ambil sebarang $I_0 \in \mathcal{I}_0$, misalkan $I_0 = (s,t)$.

Misalkan $X = \{x \in [a,b] : f(x) > g(x)\}$, maka X berukuran 0. Seperti pada teorema 4.5.12. ada $\delta[a,b]$ sehingga untuk setiap $P-\delta[a,b]$, misalkan $P = \{a_0=a, a_1, \ldots, a_n=b; x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, berlaku

$P\sum f(x)(v-u) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, $P\sum g(x)(v-u) \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon)$, dan

$$A-\varepsilon < P\sum f(x)(v-u) \le P\sum g(x)(v-u) < B+\varepsilon .$$

Jadi $A = (M)\int_a^b f \le (M)\int_a^b g = B$. ∎

Untuk membuktikan bahwa fungsi primitif dari $f \in M[a,b]$ merupakan fungsi kontinyu $m\delta$, diperlukan teorema di bawah ini.

Teorema 4.5.14. :

Untuk setiap $[c,d] \subseteq [a,b]$, jika $f \in M[a,b]$ dengan F primitif fungsi f, maka untuk setiap $I_{F(c,d)} \in \mathcal{I}_{F(c,d)}$, misalkan $I_{F(c,d)} = (F(c,d)-\varepsilon, F(c,d)+\varepsilon)$, dengan $\varepsilon>0$ dan $\varepsilon>0$, ada $\delta[c,d]$ sehingga untuk setiap $P-\delta[c,d]$ berlaku :

$$P\sum f(x)(v-u) \in I_{F(c,d)} = (F(c,d)-\varepsilon, F(c,d)+\varepsilon),$$

maka

$$\sum_1 f(x)(v-u) \in (\sum_1 F(u,v)-2\varepsilon, \sum_1 F(u,v)+2\varepsilon)$$

dengan $\sum_1 f(x)(v-u)$ sebagai jumlah parsial deret $P\sum f(x)(v-u)$.

Bukti : Ambil sebarang $[c,d] \subseteq [a,b]$ dan $f \in M[a,b]$. Dengan teorema 4.5.11. diperoleh $f \in M[c,d]$, sehingga untuk setiap $I_{F(c,d)} \in \mathcal{I}_{F(c,d)}$, dengan $I_{F(c,d)} = (F(c,d)-\varepsilon, F(c,d)+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ dan $\varepsilon>0$, ada $\delta[c,d]$

sehingga untuk setiap $P \in \delta[c,d]$ berlaku :

$$P_1 \Sigma f(x)(v-u) \in I_{F(c,d)} = (F(c,d)-\varepsilon, F(c,d)+\varepsilon).$$

Selanjutnya ambil sebarang $\Sigma_1 f(x)(v-u)$ jumlah parsial deret $P_1\Sigma f(x)(v-u)$. Misalkan $E_1 = \cup(u,v)$ merupakan gabungan interval terbuka yang bersesuaian dengan $\Sigma_1 f(x)(v-u)$ dan $E_2 = \overline{[c,d]-E_1}$. Dengan teorema 4.5.9. dan 4.5.11. diperoleh $f \in M[E_2]$. Oleh karena itu ada $\delta_1[E_2]$, sehingga untuk setiap $P_1 \in \delta_1[E_2]$ berlaku :

$$\Sigma_2 f(x)(v-u) \in (\Sigma_2 F(u,v)-\varepsilon, \Sigma_2 F(u,v)+\varepsilon).$$

Dengan demikian serupa dengan teorema 4.5.9. ada $\delta_2[c,d]$ sehingga untuk setiap $P_2 \in \delta_2[c,d]$ berlaku :

$$P_2 \Sigma f(x)(v-u) = \Sigma_1 f(x)(v-u) + \Sigma_2 f(x)(v-u) \in I_{F(c,d)}.$$

Oleh karena itu

$$\Sigma_1 f(x)(v-u) = P_2 \Sigma f(x)(v-u) - \Sigma_2 f(x)(v-u) \in (\Sigma_1 F(u,v)-2\varepsilon, \Sigma_1 F(u,v)+2\varepsilon). \blacksquare$$

Teorema 4.5.15. :

Jika $f \in M[a,b]$, maka primitif fungsi f adalah kontinu $n\varepsilon$.

Bukti : Ambil sebarang $f \in M[a,b]$, misalkan F fungsi primitif dari f. Akan ditunjukkan bahwa F kontinu $n\varepsilon$ pada $[a,b]$. Ambil sebarang $\nu \in [a,b]$ dan $I_{F(\nu)} \in \mathcal{I}_{F(\nu)}$, misalkan $I_{F(\nu)} = (F(\nu)-\varepsilon, F(\nu)+\varepsilon)$, dengan $\varepsilon > 0$ dan $\varepsilon > 0$. Karena $(M)\int_a^b f = F(a,b)$ maka ada $\delta_1[a,b]$ sehingga untuk setiap $P \in \delta_1[a,b]$, misalkan

$$P = \{a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},$$

ada $\xi_i = \nu$ dan $P\Sigma f(x)(v-u) \in I_{F(a,b)} = (F(a,b)-\frac{\varepsilon}{4}, F(a,b)+\frac{\varepsilon}{4})$ atau

$$P\in\{f(x)(v-u)-F(u,v)\}\subset\left(-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Selanjutnya terdapat dua kemungkinan nilai $f(x)$, yaitu $f(x)=0$ atau $f(x)\neq 0$. Misalkan $f(x)=0$. Ambil sebarang $x\in I_x\in\mathscr{D}[a,b]$ dengan $I_x\in\mathscr{D}[a,b]$, misalkan $u<v$. Kemudian dibangun $\mathscr{D}_x[a,b]$ sehingga untuk setiap $P\in\mathscr{D}_x[a,b]$, misalkan

$$P=\{a_0=a,a_1,\ldots,a_n=b;x_1,x_2,\ldots,x_n\},$$

ada

$$x_i=x,\ x\in I_{x_{i-1}}\cap I_{x_i}\ \text{, dan}\ x\in I_{x_i}\cap I_{x_{i+1}}.$$

Selanjutnya dipilih $\mathscr{D}[a,b]=\{I^1_x\cap I^2_x : I^1_x\in\mathscr{D}_1[a,b]$ dan $I^2_x\in\mathscr{D}_2[a,b]\}$ sehingga menurut lemma 4.5.4. untuk setiap $P\in\mathscr{D}[a,b]$, maka juga $P\in\mathscr{D}_1[a,b]$ dan $P\in\mathscr{D}_2[a,b]$. Oleh karena itu ada $P\in\mathscr{D}[a,b]$, misalkan $P=\{a_0=a,a_1,\ldots,a_n=b;x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, sehingga $x_i=v$, $a_{i-1}=u$, dan $a_i=v$. Oleh karena itu menurut teorema 4.5.14. diperoleh :

$$F(v)-F(u)-f(x)(v-u)=F(v)-F(u)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

atau

$$F(x)\in I_{F(x)}.$$

Sedangkan jika $f(x)\neq 0$, maka dipilih $I_x=(u,v)\in\mathscr{D}_x$, dengan $v-u<\frac{\varepsilon}{4f(x)}$, jika $f(x)>0$ atau $v-u<\frac{-\varepsilon}{4f(x)}$, jika $f(x)<0$. Ambil sebarang $x\in I_x$, misalkan $u<v$. Kemudian dibangun $\mathscr{D}_x[a,b]$ sehingga untuk setiap $P\in\mathscr{D}_x[a,b]$, misalkan

$$P=\{a_0=a,a_1,\ldots,a_n=b;x_1,x_2,\ldots,x_n\},$$

ada

$$x_i=x,\ x\in I_{x_{i-1}}\cap I_{x_i}\ \text{, dan}\ x\in I_{x_i}\cap I_{x_{i+1}}.$$

Selanjutnya dipilih

$$\mathscr{D}[a,b] = \{I^1_x \cap I^2_y : I^1_x \in \mathscr{D}_1[a,b], I^2_y \in \mathscr{D}_2[a,b] \text{ dan } x \neq y\} \cup$$

$$\{I_y \cap I^1_y \cap I^2_y : I_y \in \mathscr{D}_1[a,b], I^2_y \in \mathscr{D}_2[a,b]\},$$

sehingga menurut lemma 4.5.4. untuk setiap $P \in \mathscr{D}[a,b]$, misalkan $P = \{a_0=a, a_1, \dots, a_n=b; x_1, x_2, \dots, x_n\}$, maka juga $P \in \mathscr{D}_1[a,b]$, $P \in \mathscr{D}_2[a,b]$, dan ada $x_i = y$, $a_{i-1} = x$ dan $a_i = y$. Oleh karena itu menurut teorema 4.5.14. diperoleh :

$$F(y)-\varepsilon < F(x) = F(x)-F(y)-f(y)(x-y)+F(y)+f(y)(x-y) < F(y)+\varepsilon$$

atau

$$F(x) \in I_{F(y)}.$$

Jadi F kontinyu pada $[a,b]$. ∎

Sebelum membuktikan bahwa F fungsi primitif dari fungsi $f \in I[a,b]\delta$ terdifferensial a.e. dengan $F'(x) = f(x)$ a.e. pada $[a,b]$, terlebih dahulu akan diberikan keekivalenan *Vitalli's covering theorem* dengan *Vitalli's covering theorem nδ.* Dengan suatu catatan pembuktian *Vitalli's covering theorem* tidak dibicarakan di sini.

Lema 4.5.16. :

Dua pernyataan di bawah ini ekivalen :

(1). (Vitalli's covering theorem)

Jika koleksi himpunan tertutup $\mathscr{A} = \{[u,v] : u, v \in R\}$ bersifat :

(i). $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

(ii). Untuk setiap $x \in X$ dan $\delta > 0$, ada $[u,v] \in \mathcal{A}$ sehingga $x \in [u,v]$ dan $v-u < \delta$,

maka

untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $[u_i, v_i] \in \mathcal{A}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

sehingga $\mu(X) \le \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) + \varepsilon$.

(2) (Vitali's covering theorem $n\varepsilon$)

Jika koleksi himpunan tertutup $\mathcal{A} = \{[u,v] : u, v \in R\}$

bersifat :

(i). $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

(ii). Untuk setiap $x \in X$ dan $I_\omega \in \mathcal{I}_\omega$, ada $[u,v] \in \mathcal{A}$ sehingga $x \in [u,v]$ dan $v-u \in I_\omega$,

maka

untuk setiap $I_\omega \in \mathcal{I}_\omega$, ada $[u_i, v_i] \in \mathcal{A}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

sehingga $\mu(X) - \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \in I_\omega$.

Catatan : $\mu(X)$ menyatakan ukuran himpunan X.

Bukti : Cukup ditunjukkan bahwa pernyataan untuk setiap $\delta > 0$ dan setiap $[u,v]$, berlaku $v-u < \delta$ dengan pernyataan untuk setiap $I_\omega \in \mathcal{I}_\omega$ dan $[u,v]$, berlaku $v-u \in I_\omega$ adalah ekivalen. Misalkan untuk setiap $\delta > 0$ dan setiap $[u,v]$, berlaku $v-u < \delta$. Selanjutnya ambil sebarang $I_\omega = (-s, t) \in \mathcal{I}_\omega$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$ dan ambil sebarang $[u,v]$, maka $0 < v-u < t$, sehingga $v-u \in I_\omega$. Sebaliknya misalkan untuk setiap $I_{\varepsilon} \in \mathcal{B}_{\varepsilon}$ dan [u,v], berlaku $v-u \in I_{\varepsilon}$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan sebarang [u,v], maka $v-u \in I_{\varepsilon}=(-s,\varepsilon)$ dengan $s>0$. Oleh karena itu $v-u < \varepsilon$. ∎

Dengan menggunakan Vitalli's covering theorem *n.5*, akan dibuktikan teorema di bawah ini.

Teorema 4.3.17. :

Jika $f \in M[a,b]$ dan F fungsi primitif f, maka F terdiferensial a.e. pada [a,b] dan $F'(x) = f(x)$ a.e. pada [a,b].

Bukti : Misalkan

$$X = \{x \in [a,b] : F'(x) \text{ tidak ada atau } F'(x) \neq f(x)\},$$

akan ditunjukkan bahwa $\mu(X) = 0$. Untuk setiap $x \in X$, ada $I_{f(x)} \in \mathcal{B}_{f(x)}$ dengan $I_{f(x)} = (f(x)-s_x, f(x)+t_x)$, $s_x > 0$, dan $t_x > 0$ sehingga untuk setiap $I = (u_j, v_j) \ni x$, ada $y \in (u_j, x)$ sehingga berlaku :

$$F(x) - F(y) - f(x)(x-y) < -s_x(x-y)$$

atau

$$F(x) - F(y) - f(x)(x-y) > t_x(x-y),$$

atau ada $y \in (x, v_j)$ sehingga berlaku :

$$F(y) - F(x) - f(x)(y-x) < -s_x(y-x)$$

atau

$$F(y) - F(x) - f(x)(y-x) > t_x(y-x).$$

Selanjutnya untuk setiap n dibangun himpunan

$$X_n = \{x \in X : s_x \quad \text{dan} \quad t_x \quad\},$$

sehingga $X = \bigcup_{n=1} X_n$. Untuk menunjukkan bahwa $\mu(X) = 0$, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap $n \in N$, $\mu(X_n) = 0$. Ambil sebarang X_n, maka koleksi interval-interval $[u_x, x]$ dan $[x, v_x]$ di atas memenuhi hipotesis Vitalli's covering theorem $\mathcal{I}$. Sehingga untuk setiap $I_0 \in \mathcal{I}_0$, ada $[u_i, v_i] \in \mathcal{I}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga

$$\mu(X_n) - \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \in I_0 .$$

Ambil sebarang $I_0 = (-s, t) \in \mathcal{I}_0$, maka ada $[u_i, v_i] \in \mathcal{I}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ sehingga

$$\mu(X_n) - \sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \in (-\frac{s}{2}, \frac{t}{2}).$$

Selanjutnya karena $f \in M[a,b]$, maka $\in [a,b]$ sehingga untuk setiap $P \in [a,b]$ berlaku

$$P\{f(x)(v-u) - F(u,v)\} \in (-\frac{p}{2n}, \frac{p}{2n}),$$

dengan $p = \min\{s,t\}$. Selanjutnya jika untuk setiap $x \in X$, dipilih

$$I_x = (u_x, v_x) \in I_x^1 \cap \mathcal{I}[a,b],$$

maka diperoleh :

$$0 > -\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i) \ge -\sum_{i=1}^{n} \{\{F(v_i) - F(u_i) - f(x_i)(v_i - u_i)\}/s_x\} \ge$$

$$-n \sum_{i=1}^{n} \{\{F(v_i) - F(u_i) - f(x_i)(v_i - u_i)\} \ge -\frac{p}{2}.$$

Dengan demikian $\mu(X_n) \in I_0$. Jadi $\mu(X) = 0$. ∎

Sebagai penutup dari penelitian ini akan ditunjukkan bahwa fungsi terintegral Henstock juga terintegral mulus.

Teorema 4.5.18. :

Jika fungsi $f : [a,b] \to R$ terintegral Henstock, maka f terintegral mutlak.

Bukti : Ambil sebarang fungsi terintegral Henstock $f: [a,b] \to R$. Karena $R \subset \bar{R}$, fungsi f dapat dipandang sebagai fungsi dari [a,b] ke $\bar{R}$. Misalkan $(H)\int_a^b f = A$, akan ditunjukkan bahwa $(M)\int_a^b f = A$. Ambil sebarang $I_A = (A-s, A+t) \in \mathcal{I}_A$, dengan $s>0$ dan $t>0$. Pilih $p = \min\{s,t\}$, maka ada fungsi bernilai positif $\delta : [a,b] \to R$ sehingga untuk setiap partisi δ-fine $D = ([u,v];x)$ berlaku

$$\left|\sum f(x)(v-u) - A\right| < \frac{p}{2}$$

(lihat [P.Y. Lee,1989] definisi fungsi terintegral Henstock hal. 5). Selanjutnya pilih

$$\mathcal{F}[a,b] = \{I_x = (x-\delta(x), x+\delta(x)) : x \in [a,b]\}.$$

Dari pemilihan $\mathcal{F}[a,b]$ diperoleh bahwa setiap P-$\mathcal{F}[a,b]$ merupakan δ-fine $D = ([u,v];x)$. Sehingga dengan menggunakan lema Henstock (lihat [P.Y. Lee,1989] pembuktian teorema 3.7 hal. 12) diperoleh untuk setiap P-$\mathcal{F}[a,b]$ berlaku :

$$\left|P\sum f(x)(v-u) - A\right| < p$$

atau

$$P\sum f(x)(v-u) \in (A-p, A+p) \subset I_A.$$

Jadi $(M)\int_a^b f = A$. ∎

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Melalui koleksi interval-interval terbuka $\mathcal{G}_x$ dan $\mathcal{G}[a,b]$ dapat didefinisikan integral suatu fungsi pada interval tertutup [a,b] dengan tidak melibatkan epsilon delta. Sifat-sifat dasar dari integral sebelumnya juga dipenuhi oleh integral tanpa epsilon delta ini. Selanjutnya fungsi terintegral Henstock ternyata juga terintegral tanpa epsilon delta.

5.2. Saran

Perlu dikaji lebih lanjut tentang sifat-sifat lain dari integral tanpa epsilon delta dan integral ini perlu dikembangkan ke ruang yang lebih luas, misalkan pada ruang R^n.

DAFTAR PUSTAKA

Cao, Sergio S., 1992, The Henstock Integral for Banach Valued Functions, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Volume 16, Number 1.

Celicze, V.G. and Dzvarseisvili, A.G. 1989, *The Theory of the Denjoy Integral and Some Application*, WorldScientific, Singapore.

Henstock, Ralp (1988), *Lectures on the Theory of Integration*, World Scientific, Singapore.

Mohammad Imam Utoyo, (1994), Kalkulus Non Epsilon Delta, *Terdaftar pada Lembaga Penelitian Universitas Airlangga*, No. 50/LP/I/1995/B/I, Surabaya.

Mohammad Imam Utoyo, (1994), Konsep Topologi Non Epsilon Delta Pada Sistem Bilangan Real, *Terdaftar pada Lembaga Penelitian Universitas Airlangga*, No. 43/LP/XI/1994/C/I, Surabaya.

Peng Yee, Lee (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

Soeparna Darmawijaya (1991), Integral Dasar Deskriptif, *Laporan Penelitian FMIPA UGM.*