KALKULUS NON EPSILON DELTA

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS AIRLANGGA

SURABAYA

1994

KALKULUS

KALKULUS NON EPSILON DELTA

OLEH
MOHAMMAD IMAM UTOYO
NIP : 131 801 397

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

1994

KALKULUS NON EPSILON DELTA

OLEH

MOHAMMAD IMAM UTOYO

NIP. 131 801 397

Karya tulis ini telah diseminarkan di Jurusan Matematika Pada tanggal 23 Desember 1994
dan
disetujui sebagai karya ilmiah bermutu.

Surabaya, 26 Desember 1994

Mengetahui,	Menyetujui,
Ketua Jurusan Matematika	Kalab Matematika
(Dra. Utami Dyah Purwati)	(Drs. Kartono, M.Kom.)
NIP. 131 123 699	NIP. 131 569 358

ABSTRAK

Konsep kalkulus yang terdapat pada beberapa buku kalkulus didekati dengan suatu pendekatan baru tanpa . melibatkan konsep epsilon delta.

KATA PENGANTAR

Rasa syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T., yang atas berkat rahmat dan hidayat-Nya penulis dapat menyelesaikan karya tulis ini.

Pada kesempatan ini tak lupa penulis sampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada :

1. Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
2. Kepala Laboratorium Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNAIR yang telah berkenan menyetujui hasil karya tulis ini sebagai karya ilmiah bermutu.
3. Drs. Isworo Suwondo yang telah memberikan motivasi dalam meyelesaikan penelitian ini.
4. Semua guru penulis dari Sekolah Dasar sampai perguruan tinggi yang telah melimpahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
5. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan karya tulis ini.

Kemudian kritik dan saran penulis harapkan dari pembaca tulisan ini, untuk perbaikan penulisan selanjutnya.

Surabaya, Desember 1994

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Dalam kalkulus, setiap konsep yang dibicarakan biasanya selalu melibatkan epsilon delta. Tetapi dari pengalaman mempelajari kalkulus dengan melibatkan epsilon delta tidaklah mudah. Hal ini menimbulkan pemikiran untuk mencari pendekatan baru dalam mempelajari kalkulus tanpa melibatkan epsilon delta. Diharapkan dengan pendekatan baru ini, mempelajari kalkulus menjadi lebih mudah atau setidaknya pendekatan baru ini dapat menambah khasanah pengetahuan tentang kalkulus.

Darwin telah berhasil menyusun limit tanpa epsilon delta melalui sistem kekonvergenan barisan bilangan real (lihat [Darwin,1991-92]). Lebih jauh dikatakan bahwa karena konsep limit, kekontinyuan, dan turunan fungsi bernilai real dapat didefinisikan melalui limit barisan bilangan real, mamaka dasar-dasar kalkulus dapat dibangun secara lengkap melalui sistem kekonvergenan ini.

Ada dua alasan Darwin dalam mengembangkan konsep ini, yaitu pertama pendekatan ini merupakan alternatif praktis dalam mempelajari kalkulus selain dengan memakai metoda pendekatan baku yaitu menggunakan definisi kekonvergenan barisan bilangan real dengan pendefinisian Cauchy tipe (ε,δ), yang secara tradisional dipakai dalam kalkulus elementer dan analisis real. Sedangkan alasan kedua adalah karena pada abad ke sembilan belas enam sifat sistem kekonvergenan ini dipakai dalam mendefinisikan kekonvergenan Cauchy.

Setelah mempelajari konsep yang dikembangkan Darwin penulis masih merasakan adanya kesulitan baru dalam mempelajari kalkulus melalui pendekatan sistem kekonvergenan ini. Hal ini disebabkan karena jauhnya konsep yang dikembangkan tersebut dengan konsep yang biasa digunakan saat ini.

Dimotivasi hal-hal di atas penulis mencoba untuk mencari pendekatan baru yang tidak jauh berbeda dengan konsep yang ada saat ini. Pada penelitian ini dibatasi pada kalkulus satu variabel dan tidak semua teorema dalam kalkulus yang dikembangkan dalam penelitian ini.

Pendekatan baru ini didasarkan koleksi interval terbuka yang didefinisikan sebagai berikut :

Diberikan $x \in R$, didefinisikan $I_x = (u,v)$ dengan $x \in I_x$. Koleksi himpunan I_x dinotasikan dengan $\mathcal{I}_x$.

Pembagian bab dilakukan sebagai berikut :

bab I, PENDAHULUAN

Di dalam bab ini diberikan latar belakang masalah dan penjelasan tentang apa yang dibicarakan di dalam bab-bab selanjutnya.

Bab II, LIMIT FUNGSI

Di dalam bab ini dibicarakan tentang pengertian limit fungsi tanpa epsilon delta dan beberapa sifat-sifatnya. Definisi limit fungsi ini ekivalen dengan pengertian limit fungsi sebelumnya.

Bab III, KEKONTINYUAN FUNGSI

Di dalam bab ini dibicarakan tentang pengertian kekontinyuan fungsi tanpa epsilon dan beberapa sifat-sifatnya.

Bab IV, TURUNAN FUNGSI

Di dalam bab ini dibicarakan tentang pengertian turunan fungsi tanpa epsilon dan beberapa sifat-sifatnya.

BAB II

LIMIT FUNGSI

Dalam pendahuluan telah disebutkan bahwa pendefinisian limit, kekontinyuan, dan turunan fungsi didasarkan pada koleksi interval terbuka $\mathcal{I}_x$, yaitu koleksi interval terbuka I_x dengan $x \in I_x$. Di bawah ini diberikan definisi limit fungsi non epsilon delta.

Definisi 2.1. :

Diketahui fungsi $f : D_f \longrightarrow R$ dengan $D_f \subseteq R$ dan $a \in D_f$. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ jika untuk setiap $I_L \in \mathcal{I}_L$ ada I_a sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap D_f$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in \mathcal{I}_L$.

Pendefinisian lama dari limit fungsi adalah sebagai berikut :

Definisi 2.2. :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D_f$ dengan $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Selanjutnya diberikan teorema yang menyatakan keekivalenan kedua definisi di atas.

Teorema 2.3. :

Definisi 2.1. dan definisi 2.2. adalah ekivalen.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : D_f \longrightarrow R$ dan $a \in D_f$. Diketahui $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dengan definisi 2.1.. Akan ditunjukkan bahwa dengan definisi 2.2. $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $I_L = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Karena $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dengan definisi 2.1. maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap D_f$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in I_L$. Misalkan $I_a = (a-s, a+t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$. Selanjutnya ambil $\delta \in \min\{s,t\}$, maka $(a-\delta, a+\delta) \subseteq I_a$. Sehingga untuk setiap $x \in D_f$ dengan $0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dengan demikian $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dengan definisi 2.2.. Sebaliknya misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dengan difinisi 2.2.. Ambil sebarang $I_L \in \mathcal{I}_L$. Misalkan $I_L = (L-s, L+t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$. Ambil $\varepsilon = \min\{s,t\}$, maka $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subseteq I_L$. Karena dengan definisi 2.2. $\lim_{x \to a} f(x) = L$, maka ada $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x \in D_f$ dengan $|x - a| < \delta$ dan $x \neq a$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pilih $I_a = \{x \in R : |x - a| < \delta\}$, maka untuk setiap $x \in I_a \cap D_f$ dengan $x \neq a$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ atau $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subseteq I_L$. Jadi $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dengan definisi 2.1.. ∎

Kemudian jika kedua definisi limit fungsi diperhatikan, maka definisi tersebut di atas sama-sama didasarkan pada interval terbuka. Tetapi pada definisi lama, yaitu definisi 2.2., interval yang dipakai mempunyai persyaratan yang lebih ketat dari pada persyaratan pada definisi baru,yaitu definisi 2.1.. Dengan persyaratan lebih longgar memungkinkan pendefinisian baru akan lebih mudah digunakan dari pada definisi lama.

Contoh 2.1.:

Dengan menggunakan kedua definisi di atas buktikan bahwa jika diketahui fungsi $f:(0,\infty)\longrightarrow R$ dengan $f(x)=\sqrt{x}$, maka $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$.

Penyelesaian : Pertama akan dibuktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}= 2$ dengan menggunakan definisi 2.1.. Ambil sebarang $I_2 \in \mathcal{I}_2$, misalkan $I_2=(2-s,2+t)$ dengan $s> 0$ dan $t> 0$. Selanjutnya pilih $p=$ maks$\{0,2-s\}$ dan $I_4=(p^2,(2+t)^2)$. Maka diperoleh bahwa untuk setiap $x\in I_4\cap(0,\infty)$ dengan $x \neq 4$, berlaku $f(x) \in I_4$. Dengan kata lain $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}=2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}=2$ dengan menggunakan definisi 2.2.. Biasanya sebelum membuktikan suatu limit fungsi terlkebih dahulu dilakukan langkah awal sebagai berikut :

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|\sqrt{x} - 2|\,|\sqrt{x} + 2|}{|\sqrt{x} + 2|} = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|}.$$

Misalkan $|x - 4| < 1$, maka $-1 < x-4 < 1$ atau $3 < x < 5$.

Sehingga $\sqrt{x} > \sqrt{3}$ dan $\sqrt{x} + 2 > \sqrt{3} + 2$. Dengan demikian

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|\sqrt{x} - 2|\,|\sqrt{x} + 2|}{|\sqrt{x} + 2|} = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|} < \frac{|x - 4|}{\sqrt{3}+2}.$$

Setelah langkah awal dilakukan, pembuktian soal di atas siap untuk dibuktikan.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\{1,\varepsilon(\sqrt{3}+2)\}$, maka untuk setiap $x\in (0,\infty)$ dengan $x \neq 4$ dan $|x-4| < \delta$, berlaku $|x-4|< \varepsilon(\sqrt{3}+2)$ dan $\dfrac{1}{|\sqrt{x}+2|} < \dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$. Sehingga

$$|\sqrt{x} - 2| = \frac{|\sqrt{x} - 2|\,|\sqrt{x} + 2|}{|\sqrt{x} + 2|} = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|} < \varepsilon.$$

Jadi $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.

Kesulitan terbesar dalam membuktikan limit fungsi dengan menggunakan definisi 2.2. adalah mencari nilai δ jika diberikan nilai ε. Salah satu penyebab kesulitan ini adalah penggunaan nilai mutlak. Penggunaan nilai mutlak ini dipengaruhi penggunaan metrik pada analisis yang kemudian diterapkan pada kalkulus. Jika pada kalkulus (khususnya kalkulus pada satu variabel) penggunaan nilai mutlak diganti dengan interval, maka definisi 2.2. berubah menjadi :

Definisi 2.3. :

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D_f \cap (a-\delta, a+\delta)$ berlaku $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Salah satu keuntungan penggunaan interval pada pendefinisian ini adalah interval lebih mudah dibayangkan dari pada nilai mutlak. Penggunaan definisi 2.3. pada contoh 1. adalah sebagai berikut :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Selanjutnya pilih $p = \text{maks}\{0, 2-\varepsilon\}$ dan $\delta = \min\{4-p, (2+\varepsilon)^2-4\}$. Maka diperoleh untuk setiap $x \in (4-\delta, 4+\delta)$ dengan $x \neq 4$ berlaku $f(x) \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

Selanjutnya di bawah ini diberikan beberapa sifat limit fungsi dengan pembuktian menggunakan definisi 2.1..

Teorema 2.4. :

Diketahui fungsi $f : A \longrightarrow R$ dan $g : A \longrightarrow R$. Jika $a \in A$, $k \in R$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, maka

(i). $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$

(ii). $\lim\limits_{x \to a} (k + f)(x) = k + L$

(iii). $\lim\limits_{x \to a} (kf)(x) = kL$

(iv). $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = LM$

(v). $\lim\limits_{x \to a} \{f/g\}(x) = L/M$.

Bukti : (i). Ambil sebarang $I_{L+M} \in \mathcal{I}_{L+M}$, misalkan $I_{L+M} = (L+M-s, L+M+t)$ dengan $s > 0$ dan $t > 0$. Karena $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, maka ada I_a^1, $I_a^2 \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a^1 \cap A$ dan $y \in I_a^2 \cap A$ dengan $x \neq a$ dan $y \neq a$ berlaku :

$$f(x) \in (L-\frac{s}{2}, L+\frac{t}{2}) \text{ dan } g(y) \in (M-\frac{s}{2}, M+\frac{t}{2}).$$

Selanjutnya pilih $I_a = I_a^1 \cap I_a^2$, maka untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in (L+M-s, L+M+t) = I_{L+M}$.

Jadi $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$.

(ii). Ambil sebarang $I_{k+L} \in \mathcal{I}_{k+L}$, misalkan $I_{k+L} = (k+L-s, k+L+t)$. Karena $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in (L-s, L+t)$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_a$ dengan $x \neq a$ berlaku

$$(k+f)(x) = k + f(x) \in (k+L-s, k+L+t).$$

Jadi $\lim\limits_{x \to a} (k + f)(x) = k + L$.

(iii). Ambil sebarang $k \in R$ dan $I_{kL} \in \mathcal{I}_{kL}$. Misalkan

$I_{kL} = (c,d)$. Terdapat dua kemungkinan nilai k, yaitu $k = 0$ dan $k \neq 0$. Jika $k = 0$, maka untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in I_{kL}$. Sedangkan jika $k \neq 0$, dan karena

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in (c/k, d/k)$ jika $k > 0$ dan $f(x) \in (d/k, c/k)$ jika $k < 0$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $(kf)(x) = k\ f(x) \in (c,d) = I_{kL}$. Jadi $\lim_{x \to a} (kf)(x) = kL$.

(iv). Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa :

(a). $\lim_{x \to a} \{f(x) - L\} = 0$.

(b). Jika $L = 0$ dan $M = 0$, maka $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

(a). Ambil sebarang $I_o \in \mathcal{I}_o$, misalkan $I_o = (a,b)$. Karena $\lim_{x \to a} f(x) = L$, maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $L \in (a+s, b+s)$. Sehingga $f(x) - L \in I_o$. Dengan demikian $\lim_{x \to a} \{f(x) - L\} = 0$.

(b). Ambil sebarang $I_o \in \mathcal{I}_o$, misalkan $I_o = (-a,b)$ dan $p = \min\{a,b\}$. Karena $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, maka ada $I_a^1 \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a^1 \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in (-p,p)$. Dengan cara sama ada $I_a^2 \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a^2 \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in (-1,1)$. Selanjutnya pilih $I_a = I_a^1 \cap I_a^2$, maka untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $f(x) \in I_o$. Dengan demikian jika $L = 0$ dan $M = 0$, maka $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.

Selanjutnya karena

$$\{f(x)g(x) - LM\} = \{f(x) - L\}\{g(x) - M\} - 2LM + Lg(x) + Mf(x),$$

maka menurut (i), (ii), (iii), (a), dan (b) diperoleh

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = LM.$$

(v). Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa jika $M\neq 0$, maka $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. Ambil sebarang $I_{\frac{1}{M}} \in \mathcal{I}_{\frac{1}{M}}$, misalkan $I_{\frac{1}{M}} = (a,b)$.

Jika $M > 0$, maka dipilih $p > 0$ sehingga $\frac{1}{M} \in (p,b) \subseteq (a,b)$. Karena $\lim_{x\to a} g(x) = M$, maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $g(x) \in (\frac{1}{b},\frac{1}{p})$. Oleh karena itu untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $\frac{1}{g(x)} \in (p,b) \subseteq I_{\frac{1}{M}}$.

Dengan demikian $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. Selanjutnya jika $M<0$, maka dipilih $p < 0$ sehingga $\frac{1}{M} \in (a,p) \subseteq (a,b)$. Karena $\lim_{x\to a} g(x) = M$, maka ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $g(x) \in (\frac{1}{p},\frac{1}{a})$. Oleh karena itu untuk setiap $x\in I_a \cap A$ dengan $x \neq a$ berlaku $\frac{1}{g(x)} \in (a,p) \subseteq I_{\frac{1}{M}} = (a,b)$. Dengan demikian $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$. Dari sifat di atas dan menurut (iv) berlaku $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$. ∎

Setelah dibicarakan tentang limit fungsi tanpa epsilon delta, pada bab berikutnya dibicarakan tentang kekontunyuan fungsi beserta sifat-sifatnya.

BAB III

KEKONTINYUAN FUNGSI

Dalam bagian ini akan dibicarakan tentang kekontinyuan fungsi tanpa melibatkan konsep epsilon delta. Fungsi yang dibicarakan di sini terbatas pada fungsi dengan satu variabel dan beberapa sifat limit fungsi dikaji dengan definisi yang baru.

Definisi 3.1. :

Fungsi $f: D_f \longrightarrow R$ dikatakan kontinyu pada $y \in D_f$, jika untuk setiap $I_{f(y)} \in \mathcal{I}_{f(y)}$ ada $I_y \in \mathcal{I}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Jika f kontinyu pada setiap $x \in D_f$, maka f dikatakan kontinyu pada D_f.

Kekonvergenan definisi kekontinyuan fungsi dan definisi kekontinyuan fungsi sebelumnya diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 3.2. :

f kontinyu pada $y \in D_f$ jika dan hanya jika f kontinyu pada $y \in D_f$.

Bukti : Ambil sebarang $f: D_f \longrightarrow R$ dengan f kontinyu pada $y \in D_f$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinyu pada y. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $I_{f(y)} = N_\varepsilon(f(y))$, maka ada $I_y \in \mathcal{I}_y$ sehingga untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y))$. Misalkan $I_y = (a,b)$ dan $\delta = \min\{y-a, b-y\}$, maka $N_\delta(y) \subseteq I_y$. Dengan demikian untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y))$. Oleh karena itu f kontinyu pada y. Sebaliknya jika f kontinyu pada $y \in D_f$, maka akan ditunjukkan bahwa f kontinyu pada y. Ambil sebarang $I_{f(y)} \in \mathcal{G}_{f(y)}$, misalkan $I_{f(y)} = (a,b)$ dan $\varepsilon = \min\{f(y)-a, b-f(y)\}$. Maka ada $N_\delta(y)$ sehingga untuk setiap $x \in N_\delta(y) \cap D_f$ berlaku $f(x) \in N_\varepsilon(f(y)) \subseteq I_{f(y)}$. Selanjutnya pilih $I_y = N_\delta(y)$, maka untuk setiap $x \in I_y \cap D_f$ berlaku $f(x) \in I_{f(y)}$. Dengan kata lain f kontinyu pada y.∎

Contoh 3.3. :

Tunjukkan bahwa fungsi f dengan $f(x) = x^2$ kontinyu pada $x = 1$.

Penyelesaian : Ambil sebarang $I_{f(1)} \in \mathcal{G}_{f(1)}$, misalkan

$$I_{f(1)} = (f(1)-s, f(1)+t),$$

dengan $s > 0$ dan $t > 0$. Pilih $p = \text{maks}\{0, f(1)-s\}$ dan $I_1 = (\sqrt{p}, \sqrt{(f(1)+t)})$. Maka untuk setiap $x \in I_1$ berlaku $f(x) \in \mathcal{G}_{f(1)}$. Jadi f kontinyu pada $x = 1$. ∎

Jika diperhatikan definisi 3.1. dan definisi 2.3. dapat disimpulkan bahwa fungsi f kontinyu pada $x = a$, jika berlaku :

1. $f(a)$ ada
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Tetapi sebaliknya tidak berlaku, yaitu jika f kontinyu pada $x = a$, maka belum tentu ketiga hal di atas terpenuhi.

Contoh : Misalkan f fungsi dengan $f(x) = x^2$, untuk $x \in [0,1]$

dan $f(x) = 1$ untuk $x = 5$. Jelas bahwa f kontinyu pada $x = 5$ tetapi $\lim_{x \to 5} f(x)$ tidak ada.

Teorema 3.4. :

Jika fungsi f dan g kontinyu pada a, maka fungsi $f+g$, $k + f$ dengan $k \in R$, kf dengan $k \in R$, fg, dan f/g jika $g(y) \neq 0$ juga kontinyu pada a.

Bukti : Pembuktian teorema ini serupa dengan pembuktian teorema 2.4., dengan perubahan setiap $x \neq a$ dihilangkan dari pembuktian.

Selanjutnya akan diberikan syarat cukup agar fungsi komposisi kontinyu.

Teorema 3.5. :

Misalkan $f : D_f \longrightarrow R$, $g : D_g \longrightarrow R$ dengan $f(D_f) \subseteq D_g$, dan $h : D_f \longrightarrow R$ dengan $h(x) = (g \circ f)(x)$ untuk setiap $x \in D_f$. Jika f kontinyu pada $a \in D_f$ dan g kontinyu pada $f(a)$, maka h kontinyu pada a.

Bukti : Ambil sebarang $I_{h(a)} \in \mathcal{I}_{h(a)}$. Karena $h(a) = g(f(a))$ dan g kontinyu pada $f(a)$, maka ada $I_{f(a)} \in \mathcal{I}_{f(a)}$ sehingga untuk setiap $y \in I_{f(a)}$, berlaku $g(y) \in I_{h(a)}$. Selanjutnya f kontinyu pada a, sehingga ada $I_a \in \mathcal{I}_a$ sehingga untuk setiap $x \in I_a$ berlaku $f(x) \in I_{f(a)}$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_a$ berlaku $g(f(x)) = h(x) \in I_{h(a)}$. Jadi h kontinyu pada a. ∎

BAB IV

TURUNAN FUNGSI

Dalam bab ini dibicarakan tentang turunan fungsi pada interval terbuka (a,b), beserta beberapa sifat-sifatnya. Dalam hal ini pendefinisian dan pembuktian teorema tidak melibatkan epsilon delta.

Definisi 4.1. :

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$ suatu fungsi. f dikatakan dapat diturunkan (differensiabel) pada $c \in (a,b)$ jika $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x - c}$ ada dan ditulis $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x - c}$.

$f'(c)$ disebut turunan f pada c.

Selanjutnya akan diberikan suatu teorema yang menyatakan eksistensi fungsi kontinyu yang berhubungan dengan fungsi differensiabel.

Teorema 4.2. :

Jika $f: (a,b) \longrightarrow R$ mempunyai turunan pada $c \in (a,b)$ jika dan hanya jika fungsi kontinyu, $f^*: (a,b) \longrightarrow R$, yang memenuhi : untuk setiap $x \in (a,b)$ berlaku :

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c) \text{ dan } f^*(c) = f'(c).$$

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$. Jika f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$, maka $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x - c}$ ada dan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x - c}.$$

Selanjutnya definisikan fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$ dengan

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{, jika } x \neq c \\ \\ f'(c) & \text{, jika } x = c. \end{cases}$$

Dengan demikian f^* kontinyu dan memenuhi

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c) \text{ dan } f^*(c) = f'(c).$$

Sebaliknya jika ada fungsi f^*: $(a,b) \longrightarrow R$ yang kontinyu dan memenuhi $f(x) - f(c) = (x - c)f^*(c)$ dan $f^*(c) = f'(c)$, maka

$$\lim_{x \to c} f^*(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x - c} = f^*(c) = f'(c).$$

Dengan demikian f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$.∎

Hubungan antara fungsi yang dapat diturunkan dengan fungsi kontinyu dapat dilihat pada teorema di bawah ini.

Teorema 4.3. :

Jika $f : (a,b) \longrightarrow R$ dapat diturunkan pada c, maka f kontinyu pada c.

Bukti : Karena c titik limit pada interval (a,b) dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \{f(c) + (x-c)f^*(c)\} = f(c),$$

maka f kontinu pada c.∎

Dengan menggunakan sifat aljabar dari limit fungsi diperoleh sifat aljabar dari turunan fungsi yang diberikan dalam teorema d bawah ini.

Teorema 4.4. :

Jika fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$ dan fungsi $g : (a,b) \longrightarrow R$ dapat diturunkan pada c, maka fungsi $f + g$, fg, dan f/g jika $g(c) \neq 0$ dapat diturunkan pada c dan

(i). $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(ii). $(fg)'(c) = f'(c)g'(c)$

(iii). $(f/g)'(c) = f'(c)/g'(c)$.

Turunan fungsi berantai diberikan dalam teorema d bawah ini.

Teorema 4.5. : (Aturan Rantai)

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$ dan $g : f(a,b) \longrightarrow R$. Jika f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$ dan g dapat diturunkan pada $f(c)$, maka $g \circ f$ dapat diturunkan pada c dan

$$(g \circ f)'(c) = f'(c)g'(f(c)).$$

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$ dan $g : f(a,b) \longrightarrow R$. Misalkan f dapat diturunkan pada $c \in (a,b)$ dan g dapat diturunkan pada $f(c)$, akan ditunjukkan bahwa $g \circ f$ dapat diturunkan pada c dan

$$(g \circ f)'(c) = f'(c)g'(f(c)).$$

Karena f dapat diturunan pada $c \in (a,b)$, maka menurut teorema 4.2. ada fungsi f^* kontinyu pada c dan

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{, jika } x \neq c \\ f'(c) & \text{, jika } x = c. \end{cases}$$

Dengan cara yang sama karena g dapat diturunkan pada $f(c)$, maka ada fungsi g^* kontinyu pada $f(c)$ dan

$$g^*(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)}, & \text{jika } y \in I_{f(c)} \subseteq f(a,b) \text{ dan } y \neq f(c) \\ g'(f(c)) & , \text{ jika } y = f(c). \end{cases}$$

Karena f kontinyu pada c, maka ada $I_c \in \mathcal{I}_c$ sehingga untuk setiap $x \in I_c \cap (a,b)$ berlaku $f(x) \in I_{f(c)}$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_c \cap (a,b)$, berlaku :

$$\lim_{x \to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} =$$

$$\lim_{x \to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x - c} =$$

$$\lim_{x \to c} g^*(f(x))f^*(x) = g^*(f(c))f^*(c) =$$

$$g'(f(c))f'(c). \blacksquare$$

Pengertian fungsi differensiabel kanan dan kiri diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 4.6. :

Misalkan $f : [a,b] \to R$ dan f kontinyu pada $c \in [a,b]$.

f dikatakan differensiabel kanan pada c jika

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x - c} \text{ ada,}$$

baik berhingga maupun tak berhingga dan dinotasikan dengan $f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x - c}$. Sebaliknya f dikatakan differensiabel kiri jika

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x - c} \text{ ada,}$$

baik berhingga maupun tak berhingga dan dinotasikan dengan $f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x - c}$.

Dengan demikian fungsi f differensiabel pada c jika $f'_-(c)=f'_+(c)$. Jika $c \in (a,b)$ dan $f'(c)=+\infty$, maka $f'_-(c)= +\infty$

dan $f'_+(c)=+\infty$. Sedangkan jika $f'(c)=-\infty$, maka $f'_-(c) = -\infty$ dan $f'_+(c) = -\infty$.

Teorema di bawah ini dapat digunakan untuk menentukan kemonotonan suatu fungsi.

Teorema 4.7. :

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$. Jika ada $c \in (a,b)$, sehingga $f'(c) > 0$ atau $f'(c) = +\infty$, maka ada $I_c \subseteq (a,b)$ sehingga untuk setiap $x \in I_c$ berlaku :

$f(x) > f(c)$ jika $x > c$ dan $f(x) < f(c)$ jika $x < c$.

Bukti : Ambil sebarang $f:(a,b) \longrightarrow R$, misalkan ada $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) > 0$ atau $f'(c) = +\infty$. Jika $f'(c)$ berhingga, maka ada fungsi kontinyu , f^*, sehingga

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{, jika } x \neq c \\ f'(c) & \text{, jika } x = c. \end{cases}$$

Karena f^* kontinyu pada c, maka ada $I_c^1 \in \mathcal{G}_c$ sehingga untuk setiap $x \in I_c^1 \cap (a,b)$ berlaku $f^*(x) \in I_{f^*(c)} = (0,k)$. Karena c titik dalam interval (a,b), maka ada $I_c^2 \in \mathcal{G}_c$ sehingga $I_c^2 \subseteq (a,b)$. Selanjutnya pilih $I_c = I_c^1 \cap I_c^2$, maka untuk setiap $x \in I_c$ berlaku $f^*(x) \in I_{f^*(c)=f'(c)} = (0,k)$. Dengan demikian untuk setiap $x \in I_c$ berlaku $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. Atau dengan kata lain $f(x)-f(c)$ dan $x-c$ mempunyai tanda sama. ▮

Dengan cara sama diperoleh teorema di bawah ini.

Teorema 4.8. :

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$. Jika ada $c \in (a,b)$, sehingga $f'(c) < 0$ atau $f'(c) = -\infty$, maka ada $I_c \subseteq (a,b)$ sehingga untuk setiap $x \in I_c$ berlaku :

$f(x) > f(c)$ jika $x < c$ dan $f(x) < f(c)$ jika $x > c$.

Pengertian maksimum lokal dan minimum lokal diberikan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 4.9. :

Misalkan $f : (a,b) \longrightarrow R$ dan $x_o \in (a,b)$. f dikatakan mempunyai maksimum lokal di x_o jika ada $I_{x_o} \in \mathcal{I}_{x_o}$ sehingga untuk setiap $x \in I_{x_o} \cap (a,b)$ berlaku $f(x) \leq f(x_o)$. Sebaliknya f dikatakan mempunyai minimum lokal jika ada $I_{x_o} \in \mathcal{I}_{x_o}$ sehingga untuk setiap $x \in I_{x_o} \cap (a,b)$ berlaku $f(x) \geq f(x_o)$.

Di bawah ini diberikan syarat perlu suatu fungsi mempunyai maksimum atau minimum lokal.

Teorema 4.10. :

Jika $f : (a,b) \longrightarrow R$ mempunyai maksimum lokal maupun minimum lokal pada $c \in (a,b)$ dan f mempunyai turunan pada c, maka $f'(c) = 0$.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$ yang mempunyai maksimum lokal maupun minimum lokal pada $c \in (a,b)$ dan mempunyai turunan pada c. Akan ditunjukkan bahwa $f'(c) = 0$. Andaikan $f'(c) > 0$ atau $f'(c) = +\infty$. Menurut teorema 4.7. ada

$I_c \subseteq (a,b)$ sehingga untuk setiap $x \in I_c$ berlaku :

$f(x) > f(c)$ jika $x > c$ dan $f(x) < f(c)$ jika $x < c$.

Dengan demikian f(c) tidak mempunyai maksimum maupun minimum lokal pada c. Kontradiksi. Selanjutnya andaikan $f'(c) < 0$ atau $f'(c) = -\infty$. Menurut teorema 4.8. ada $I_c \subseteq (a,b)$ sehingga untuk setiap $x \in I_c$ berlaku :

$f(x) > f(c)$ jika $x < c$ dan $f(x) < f(c)$ jika $x > c$.

Dengan demikian f(c) tidak mempunyai maksimum maupun minimum lokan pada c. Kontradiksi. Jadi $f'(c) = 0$. ∎

Teorema Rolle, teorema nilai rata-rata, dan generalisasi teorema nilai tengah diberikan dalam teorema-teorema di bawah ini.

Teorema 4.11. : (Teorema Rolle)

Jika $f : [a,b] \longrightarrow R$ differensiabel pada (a,b), f kontinyu pada a dan b, dan $f(a) = f(b)$, maka ada $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Bukti : Karena f mempunyai turunan pada (a,b) dan kontinyu pada a dan b, maka menurut teorema 4.3. f kontinyu pada [a,b]. Selanjutnya andaikan $f(a) = f(b)$ dan untuk setiap $c \in (a,b)$ berlaku $f'(c) \neq 0$. Maka dengan teorema 4.10. f tidak mempunyai minimum lokal atau maksimal lokal pada (a,b). Karena $f(a) = f(b)$ dan f differensiabel pada (a,b), maka f merupakan fungsi konstan pada (a,b).. Oleh karena itu $f'(c) = 0$ untuk setiap $c \in (a,b)$. Kontradiksi. ∎

Teorema 4.12. : (Teorema Nilai Rata-rata Untuk Turunan)

Jika $f : [a,b] \longrightarrow R$ differensiabel pada (a,b) dan kontinyu pada a dan b, maka ada $c \in (a,b)$ sehingga

$$f'(c)(b-a) = f(b)-f(a).$$

Bukti : Definisikan fungsi $\varphi : [a,b] \longrightarrow R$ dengan

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dengan pendefinisian φ diperoleh :

(i). φ kontinyu pada a dan b

(ii). φ differensiabel pada (a,b)

(iii). $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Dengan demikian menurut teorema 4.11. ada $c \in (a,b)$ sehingga $\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Dengan kata lain

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \blacksquare$$

Teorema 4.13. : (Generalisasi Teorema Nilai Tengah)

Jika fungsi $f : [a,b] \longrightarrow R$ dan $g : [a,b] \longrightarrow R$ differensiabel pada (a,b) dan kontinyu pada a dan b serta tidak ada $x \in (a,b)$ sehingga $f'(x)$ dan $g'(x)$ keduanya tak berhingga, maka ada $c \in (a,b)$ sehingga

$$f'(c)\{g(b)-g(a)\} = g'(c)\{f(b)-f(a)\}.$$

Bukti : Definisikan fungsi $\varphi : [a,b] \longrightarrow R$ dengan

$$\varphi(x) = f(x)\{g(b)-g(a)\} - g(x)\{f(b)-f(a)\}.$$

Dari definisi φ diperoleh :

(i). φ kontinyu pada a dan b

(ii). φ differensiabel pada (a,b) dan jika ada $x \in (a,b)$ sehingga $\varphi'(x)$ tak berhingga maka salah satu dari

$f'(x)$ atau $g'(x)$ tak berhingga.

(iii). $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$.

Oleh karena itu menurut teorema 4.11. ada $c \in (a,b)$ sehingga

$$\varphi'(c) = f'(c)\{g(b)-g(a)\} - g'(c)\{f(b)-f(a)\} = 0.$$

Dengan kata lain $f'(c)\{g(b)-g(a)\} = g'(c)\{f(b)-f(a)\}$.■

Di bawah ini diberikan sebuah teorema yang serupa dengan teorema 4.13, tetapi fungsinya didefinisikan pada interval terbuka (a,b).

Teorema 4.14. :

Jika fungsi $f : (a,b) \longrightarrow R$ dan $g : (a,b) \longrightarrow R$ differensiabel pada (a,b), $f(a^+)$, $g(a^+)$, $f(b^-)$, dan $g(b^-)$ ada dan berhingga serta tidak ada $x \in (a,b)$ sehingga $f'(x)$ dan $g'(x)$ keduanya tak berhingga, maka ada $c \in (a,b)$ sehingga

$$f'(c)\{g(b^-)-g(a^+)\} = g'(c)\{f(b^-)-f(a^+)\}.$$

Bukti : Definisikan fungsi F dan G pada $[a,b]$ dengan

$$F(x) = \begin{cases} f(a^+), & \text{jika } x = a \\ f(x), & \text{jika } x \in (a,b) \\ f(b^-), & \text{jika } x = b \end{cases}$$

dan

$$G(x) = \begin{cases} g(a^+), & \text{jika } x = a \\ g(x), & \text{jika } x \in (a,b). \\ g(b^-), & \text{jika } x = b \end{cases}$$

Dari pendefinisian F dan G diperoleh bahwa F dan G memenuhi kondisi teorema 4.13.. Dengan demikian ada $c \in (a,b)$ sehingga $F'(c)\{G(b)-G(a)\} = G'(c)\{F(b)-F(a)\}$. Dengan kata lain $f'(c)\{g(b^-)-g(a^+)\} = g'(c)\{f(b^-)-f(a^+)\}$.■

Syarat cukup agar fungsi naik tajam, turun tajam, maupun merupakan fungsi konstan diberikan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 4.15. :

Jika $f : [a,b] \longrightarrow R$ differensiabel pada (a,b) dan kontinyu pada a dan b, maka

(i). Jika $f'(x)>0$ pada (a,b), maka f naik tajam

(ii). Jika $f'(x) < 0$ pada (a,b), maka f turun tajam

(iii). Jika $f'(x) = 0$ pada (a,b), maka f fungsi konstan.

Bukti : Ambil sebarang fungsi $f : [a,b] \longrightarrow R$ dengan f differensibel pada (a,b) dan kontinyu pada (a,b). Selanjutnya ambil sebarang $x,y \in [a,b]$ dengan $x < y$. Karena $[x,y] \subseteq [a,b]$ maka semua sifat yang dipunyai $[a,b]$ juga dipunyai $[x,y]$. Dengan demikian menurut teorema 4.12. ada $c \in [a,b]$ sehingga

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Oleh karena itu :

(i). Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f'(c) > 0$. Oleh karena itu $f(x) < f(y)$. Dengan kata lain f naik tajam.

(ii). Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f'(c) < 0$. Oleh karena itu $f(x) > f(y)$. Dengan kata lain f turun tajam.

(iii). Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f'(c)= 0$. Oleh karena itu $f(x) = f(y)$. Dengan kata lain f konstan. ∎

Akibat teorema 4.15. diberikan di dalam pernyataan di bawah ini.

Akibat 4.16. :

Jika f dan g fungsi kontinyu pada [a,b] dan mempunyai turunan sama dan berhingga, maka f−g konstan dalam [a,b].

DAFTAR PUSTAKA

[Apostol,1974] Apostol, *Mathematical Analysis*,Second Edition, Addision-Wesley Publishing Company,Inc., Reading, Mass., 1974.

[Bartle,1976] Bartle,Robert G., *The Elemen of Real Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons.,New York, 1976

[Darwin,1991-92] Peek, Darwin E. ,Limits Without Epsilons, *Real Analysis Exchange Editorial Board*, 1991-92, hal. 751-758.