DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

PENERAPAN METODE RESAMPLING UNTUK INFERENSI PARAMETER β PADA REGRESI LINEAR SEDERHANA DENGAN DISTRIBUSI BERSAMA KEDUA PEUBAHNYA TIDAK DIKETAHUI

Ketua Peneliti :

Rimuljo Hendradi, S.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

Dibiayai Oleh : Dana Rutin Unair 1997/1998
SK.Rektor Nomor : 5935/J03/PL/1997
Nomor : 51

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA

PENERAPAN METODE RESAMPLING UNTUK INFERENSI PARAMATER β PADA REGRESI LINEAR SEDERHANA DENGAN DISTRIBUSI BERSAMA KEDUA PEUBAHNYATIDAK DIKETAHUI

Peneliti :

Rimuljo Hendradi, S.Si.
Drs. Eto Wuryanto, DEA
Drs. Eko Tjahjono
Ir. Dyah Herawatie, M.Si.
Herry Suprajitno, S.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

Dibiayai	: DANA RUTIN Universitas Airlangga
SK. Rektor Nomor	: 5935 / JO3 / PL / 1997
Tanggal	: 1 Oktober 1997

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

UNIVERSITAS AIRLANGGA

LEMBAGA PENELITIAN

1. Puslit Pembangunan Regional
2. Puslit Obat Tradisional
3. Puslit Pengembangan Hukum
4. Puslit Lingkungan Hidup (5995718)
5. Puslit Pengembangan Gizi (5995720)
6. Puslit/Studi Wanita (5995722)
7. Puslit Olahraga
8. Puslit Bioenergi
9. Puslit Kependudukan dan Pembangunan (5995719)
10. Puslit / Kesehatan Reproduksi

Kampus C, Jl. Mulyorejo Telp. (031) 5995246, 5995248, 5995247 Fax. (031) 5995246, Surabaya 60115

IDENTITAS DAN PENGESAHAN
LAPORAN AKHIR HASIL PENELITIAN

1. a. Judul Penelitian	:	Penerapan Metode Resampling Untuk Inferensi Parameter Betha Pada Regresi Linear Sederhana Dengan Distribusi Bersama Kedua Peubahnya Tidak Diketahui
b. Macam Penelitian	:	(V) Fundamental, ( ) Terapan, ( ) Pengembangan ( ) Institusional
C. Katogori Penelitian	:	(V) I ( ) II ( ) III ( ) IV
2. Kepala Proyek Penelitian		
a. Nama Lengkap Dengan Gelar	:	Rimuljo Hendradi, S.Si.
b. Jenis Kelamin	:	Laki-Laki
c. Pangkat/Golongan dan NIP	:	Penata Muda/IIIa/132 161 178
d. Jabatan Sekarang	:	Staf Pengajar
e. Fakultas/Jurusan/Puslit.	:	MIPA/Matematika
f. Univ./Inst./Akademi	:	Universitas Airlangga
g. Bidang Ilmu Yang Diteliti	:	Statistika Terapan
3. Jumlah Tim Peneliti	:	5 (lima) orang
4. Lokasi Penelitian	:	Lab. Komputasi FMIPA Unair
5. Kerjasama dengan Instansi Lain		
a. Nama Instansi	:	
b. Alamat	:	
6. Jangka Waktu Penelitian	:	4 (empat) bulan
7. Biaya Yang Diperlukan	:	Rp 3.000.000,00
8. Seminar Hasil Penelitian	:	
a. Dilaksanakan Tanggal	:	15 April 1998
b. Hasil Penelitian	:	( ) Baik Sekali (V) Baik ( ) Sedang ( ) Kurang

Surabaya, 15 April 1998

Mengetahui/ Mengesahkan :
a.n. Rektor
Ketua Lembaga Penelitian,

Prof. Dr. Noor Cholies Zaini
NIP. 130 355 372

KATA PENGANTAR

Penulis panjatkan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penelitian dengan judul 'Penerapan Metode Resampling untuk Inferensi Parameter β pada Regresi Linear Sederhana dengan Distribusi Bersama Kedua Peubahnya Tidak Diketahui' dapat diselesaikan pada waktunya.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Rektor Universitar Airlangga
2. Ketua Lembaga Penelitian Universitas Airlangga
3. Dekan FMIPA Universitas Airlangga
4. Semua pihak yang telah membantu selesainya penulisan laporan akhir penelitian ini.

Penulis menyadari bahwa laporan ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu saran dan kritik dari pembaca sangat kami harapkan. Disamping itu, penulis juga berharap laporan ini dapat memberikan informasi ilmiah bagi ilmu pengetahuan dan semoga berguna bagi pengembangan penelitian lebih lanjut.

Surabaya, Pebruari 1998

Penulis

RINGKASAN PENELITIAN

Judul Penelitian	: Penerapan Metode Resampling untuk Inferensi Paramater β pada Regresi Linear Sederhana dengan Distribusi Bersama Kedua Peubahnya Tidak Diketahui
Ketua Peneliti	: Rimuljo Hendradi, S.Si
Anggota Peneliti	: Drs. Eto Wuryanto, DEA Drs. Eko Tjahjono Ir. Dyah Herawatie, M.Si. Herry Suprajitno, S.Si
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Sumber biaya	: DANA RUTIN Universitas Airlangga SK. Rektor Nomor : 5935 / JO3 / PL / 1997 Tanggal : 1 Oktober 1997

Dalam model Regresi Linear Sederhana, kedua peubahnya (*X* dan *Y*) mempunyai distribusi bersama. Dalam banyak buku literatur, telah banyak dibahas tentang regresi dengan asumsi bahwa distribusi bersamanya diketahui. Tetapi untuk distribusi bersama yang tidak diketahui, masih sedikit sekali pembahasannya.

Masalah dari penelitian ini adalah membuat inferensi parameter model regresi sederhana, bila distribusi bersama kedua peubahnya tidak diketahui.

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dalam penelitian ini digunakan metode Resampling, yaitu Jackknife dan Bootstrap. Kedua metode ini dapat digunakan untuk mengaproksimasi distribusi sampling dari suatu statistik beserta karakteristik-karakteristiknya.

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk memberikan salah satu penyelesaian inferensi statistik terutama inferensi parameter β_0 dan β_1 yang merupakan parameter dari model regresi linier sederhana.

Hasil dari penelitian ini adalah nilai dari b_0 = -219.4061 dengan tingkat kepercayaan sebesar 93,5%, dan b_1 = 16.726 726 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99% untuk data Spring , dan b_0 = 19.76682 dengan tingkat kepercayaan 89%, dan b_1 = 1.869955 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99% untuk data Cabezon.

Penelitian ini bisa dilanjutkan untuk Model Regresi Ganda, yaitu model regresi dengan peubah bebas yang lebih dari satu.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Permasalahan

Salah satu tujuan dari ilmu pengetahuan adalah mencari, menggambarkan dan memprediksi hubungan antara kejadian-kejadian di alam. Salah satu caranya adalah dengan menentukan persamaan untuk menjelaskan atau menggambarkan hubungan di antara kuantitas-kuantitas yang ada. Dalam bidang kimia misalnya ingin ditentukan persamaan yang menjelaskan hubungan antara temperatur dan tekanan dalam suatu proses kimia. Dalam bidang ekonomi, ingin diketahui hubungan antara penjualan suatu produk dengan biaya periklanan yang dikeluarkan.

Suatu model yang digunakan untuk menentukan y jika x diketahui, dapat ditulis dalam bentuk

$$y = \mu(x) + \varepsilon$$

dengan $\mu(x)$ didefinisikan sebagai $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Sehingga model diatas dapat ditulis dalam bentuk

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

dengan y merupakan peubah respon atau peubah dependen, sedangkan x adalah peubah prediktor atau peubah independen.

Salah satu obyektif dari masalah diatas adalah mengestimasi parameter model tersebut. Setelah estimasi parameternya diperoleh, langkah selanjutnya adalah melakukan inferensi atau pengujian hipotesis terhadap parameter tersebut.

Menurut Graybill (1970), penyelesaian masalah diatas secara umum dapat dikategorikan menjadi dua, yaitu Model Linear Umum (General Linear Model) dan Model Regresi (Regression Model). Perbedaan utama dari kedua model ini terletak pada peubah independennya. Pada Model Linear Umum, peubah independen-nya adalah tidak acak (nonrandom); sedangkan pada Model Regresi, peubah independen-nya acak (random).

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh sebagai berikut : ingin diketahui hubungan antara tinggi badan (*Y*) seorang mahasiswa laki-laki dari suatu perguruan tinggi tertentu, jika berat badannya (*X*) diketahui. Pada model linear umum, peneliti terlebih dahulu menentukan ke-*n* nilai berat badan yang akan diambil. Ke-*n* nilai berat badan yang akan diambil sampelnya tersebut dapat dinyatakan dengan x_1, x_2, ... x_n. Dari ke-*n* populasi berat badan tersebut masing-masing diambil satu sampel atau lebih, selanjutnya dicatat tinggi badannya. Misalnya dari masing-masing populasi nilai berat badan diambil sebanyak satu sampel, datanya dapat dinyatakan dengan (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n). Dari data ini, dapat diestimasi nilai dari parameter β_0, β_1 dan $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Selain itu dapat juga digunakan untuk menyusun selang kepercayaan dan pengujian hipotesis terhadap parameter yang diminati. Kualitas dari prosedur inferensi ini tentu saja tergantung pada nilai *x* yang telah ditentukan terlebih dahulu, dan tentu saja peneliti dapat memilih nilai *x* sedemikian hingga hasil inferensinya optimum.

Pada model regresi linear, peneliti mengambil sampel acak sejumlah n mahasiswa laki-laki dari Perguruan Tinggi tersebut, dan selanjutnya masing-masing dicatat tinggi (*Y*) dan berat badannya (*X*). Sampel yang terambil dapat dinyatakan dengan (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), ... (X_n,Y_n), dan dari data ini dapat dibuat inferensi tentang β_0, β_1 dan $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x$. Inferensi

ini tergantung nilai x yang terambil atau teramati, tetapi karena nilai-nilai pengamatan tersebut merupakan peubah acak, maka data tersebut tidak dapat dikontrol oleh si peneliti.

Dalam model regresi sederhana antara dua peubah *Y* dan *X*, kedua peubah tersebut mempunyai distribusi bersama. Dalam buku literatur, telah banyak dibahas tentang regresi linear dengan asumsi bahwa distribusi bersamanya diketahui, yaitu berdistribusi normal. Tetapi untuk kasus distirbusinya tidak diketahui, masih sedikit sekali pembahasannya.

Dalam penelitian ini, akan dibahas kasus bebas distribusi (distribution-free), yaitu kasus distribusi bersama antara *Y* dan *X* tidak diketahui. Berkaitan dengan hal tersebut, kesulitan yang dihadapi ialah berkaitan dengan inferensi parameternya.

Untuk mengatasi hal tersebut, digunakan metode Resampling (Jackknife dan Bootstrap). Kedua metode tersebut dapat digunakan untuk mengaproksimasi distribusi sampling dari suatu statistik dan karakteristik-karakteristiknya. Metode ini akan diselesaikan dengan bantuan program statistika S-Plus, yang digunakan untuk mengimplementasikan algoritma yang dibuat berdasarkan teori yang terkait.

1.2. Perumusan Masalah

Dari latar belakang yang diuraikan diatas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

Bagaimana inferensi parameter β pada regresi linear sederhana jika distribusi kedua peubahnya tidak diketahui ?

1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menggunakan metode Resampling, yaitu Jackknife dan Bootstrap, untuk melakukan inferensi parameter β pada model regresi linear sederhana, dengan distribusi bersama kedua peubahnya tidak diketahui.

Sedangkan manfaat dari penelitian ini adalah memberikan alternatif dalam penyelesaian masalah inferensi parameter β, bila asumsi yang mendasari model regresi tersebut tidak dapat dipenuhi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Secara umum model regresi linear sederhana dapat dinyatakan menurut persamaan (Drapper, 1996)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

dengan Y : peubah tak bebas

X : peubah bebas

β_0 , β_1 : parameter yang akan diduga

ε : galat acak yang berdistribusi Normal $(0,\sigma^2)$

Dalam Graybill (1970), model diatas dapat dinyatakan sebagai fungsi distribusi bersyarat

$$Y = \mu_y(x_1) + \varepsilon$$

$$= E[(X_0 | X_1 = x_1)] + \varepsilon$$

dengan Y adalah simbol yang digunakan untuk $(X_0 | X_1 = x_1)$, dan peubah X_0, X_1 adalah peubah acak yang mempunyai distribusi bersama.

2.1. ESTIMASI PARAMETER

Definisi 2.1.1.

Fungsi Regresi X_0 pada X_1. Fungsi $E[(X_0 | X_1 = x_1)]$, yang dinyatakan dengan $\mu_y(x_1)$, didefinisikan sebagai Fungsi Regresi X_0 pada X_1.

Teroema 2.1.1.

Misalkan X_0 dan X_1 peubah acak yang mempunyai distribusi bersama, maka $E[X_0] = E_{X_1} E_{X_0|X_1}[X_0]$. Mood (1974)

Bukti :

$$E_{X_1} E_{X_0|X_1}[X_0] = E_{X_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_0 f(X_0|X_1)\, dX_0\right]$$
$$= E_{X_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_0 \frac{f(X_0,X_1)}{f(X_1)}\, dX_0\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_0 \frac{f(X_0,X_1)}{f(X_1)} f(X_1)\; dX_0\, dX_1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_0\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(X_0,X_1)\, dX_1\right] dX_0$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_0 f(X_0)\; dX_0$$
$$= \mathrm{E}[X_0]$$

Teorema 2.1.2.

Andaikan X_0 dan X_1 peubah acak yang mempunyai distribusi bersama. Jika Fungsi Regresi X_0 pada X_1 adalah linear dalam x (yaitu, jika $\mu_y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$), maka

$$\beta_0 = \mu_{X_0} - (\sigma_{X_1X_0} / \sigma_{X_1X_1})\mu_{X_1} \quad \text{dan } \beta_1 = \sigma_{X_1X_0} / \sigma_{X_1X_1}$$

Bukti :

Misalkan $\mu_{x_0} = E[X_0]$, dari teorema 2.1.1 diperoleh

$$E[X_0] = E_{X_1} E_{X_0|X_1}[X_0]$$
$$= E_{x_1}[\mu_y(X_1)]$$
$$= \mathrm{E}_{X_1}[\beta_0 + \beta_1 X_1]$$
$$= \beta_0 + \beta_1 \mu_{X_1} \qquad \text{.................................(1)}$$

Misalkan $\mathrm{E}_{X_1}\left[(\mu_Y(X_1) - \mu_{X_1})(X_1 - \mu_{X_1})\right]$ dapat dinyatakan dengan

$$\mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0] - \mu_{X_1}\right)(X_1 - \mu_{X_1})\right]$$
$$= \mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0]\right)(X_1 - \mu_{X_1})\right] - \mathrm{E}_{X_1}\left[(X_1 - \mu_{X_1})\mu_{X_1}\right]$$

$$= \mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0]\right)\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right] - \mu_{X_1}\mathrm{E}_{X_1}\left[X_1 - \mu_{X_1}\right]$$

$$= \mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0]\right)\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0]\right)X_1\right] - \mathrm{E}_{X_1}\left[\mathrm{E}_{X_0|X_1}[X_0]\mu_{X_1}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[X_1X_0\right] - \mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\beta_0 + \beta_1X_1\right)\mu_{X_1}\right]$$

$$= \left(\sigma_{X_1X_0} + \mu_{X_0}\mu_{X_1}\right) - \left(\beta_0\mu_{X_1} + \beta_1\mu^2_{X_1}\right)$$

$$= \sigma_{X_1X_0}$$

$\mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mu_Y(X_1) - \mu_{X_1}\right)\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right]$ juga dapat dinyatakan dengan

$$\mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\beta_0 + \beta_1X_1 - \mu_{X_1}\right)\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right] = \beta_1\sigma_{X_1X_1}$$

Karena $\mathrm{E}_{X_1}\left[\left(\mu_Y(X_1) - \mu_{X_1}\right)\left(X_1 - \mu_{X_1}\right)\right]$ dapat dinyatakan dalam dua persamaan, maka dapat diperoleh

$$\sigma_{X_1X_1} = \beta_1\sigma_{X_1X_1}$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{X_1X_0}}{\sigma_{X_1X_1}} \qquad \text{.................................(2)}$$

Jika persamaan (2) disubstitusikan ke dalam persamaan (1) , diperoleh

$$\beta_0 = \mu_{X_0} - \left(\frac{\sigma_{X_1X_0}}{\sigma_{X_1X_1}}\right)\mu_{X_1} \qquad \text{.................................(3)}$$

2.2. METODE JACKKNIFE DAN BOOTSTRAP

Dari dugaan parameter yang diperoleh, langkah selanjutnya adalah melakukan inferensi parameter. Karena distribusi bersama antara X_1 dan X_0 tidak diketahui (bebas distribusi), maka inferensi parameternya sulit dilakukan. Untuk mengatasi hal tersebut,

dapat diterapkan metode resampling. Metode resampling digunakan untuk menggantikan secara teoritis penurunan-penurunan yang diperlukan dalam penerapan metode tradisional dalam analisis statistiknya. Metode ini dilakukan dengan cara mengulang penyampelan data asal dan membuat inferensi dari sampel-sampel ulangan tersebut. Metode resampling yang populer digunakan adalah metode Jackknife dan Bootstrap.

Dalam Jun shao (1995) dan Efron (1993) dijelaskan bahwa **Metode Jackknife** adalah suatu model yang pada prinsipnya melakukan penghitungan estimator dengan cara menghilangkan pengamatan ke-i. Karena dilakukan n penghitungan (n = banyaknya pengamatan atau sampel), maka akan diperoleh n estimator yang diharapkan mempunyai distribusi mendekati normal, yang selanjutnya dengan mudah dapat dilakukan inferensi terhadap estimator yang diperoleh. Sedangkan **Metode Bootstrap**, adalah suatu model yang dalam menghitung estimatornya digunakan sampel "baru" yang diambil dengan pengembalian dan setiap pengamatan terambil dengan peluang sama dari sampel pengamatan sebanyak B kali (B dapat mendekati ∞), sehingga akan diperoleh B estimator yang diharapkan mempunyai distribusi mendekati normal. Selanjutnya, penghitungan selang kepercayaan dan uji hipotesis terhadap estimator yang diperoleh dapat dilakukan dengan mudah.

2.2.1. Metode Jackknife

Metode Jackknife dikemukakan oleh John Tukey pada tahun 1958 (Eko, 1996). Metode ini merupakan salah satu dari teknik resampling yang digunakan untuk mengestimasi bias dan simpangan baku dari suatu penduga parameter.

Metode Jackknife didasarkan pada sampel pengamatan X = $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ yang berasal dari populasi dengan fungsi distribusi F dan parameter θ yang tidak diketahui.

Misalkan penduga dari θ adalah $\hat{\theta} = s(x)$, dan $x_{(i)}$ merupakan data pengamatan X dengan data ke-i dihilangkan, maka $\hat{\theta}_{(i)} = s(x_{(i)})$. Penduga Jackknife didefinisikan $\hat{\theta}_{jack} = n\hat{\theta} - (n-1)\hat{\theta}_{(.)}$, dengan $\hat{\theta}_{(.)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_{(i)}$, sedangkan simpangan baku dari Jackknife didefinisikan $\mathrm{Se}_{\mathrm{jack}} = \left[\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{(i)} - \bar{\theta}_{(.)}\right)^2\right]^{1/2}$ (Efron, *et.al.*, 1993).

2.2.2. Metode Bootstrap

dibandingkan dengan metode Jackknife, metode Bootstrap merupakan metode yang lebih baru, karena baru dikemukakan oleh Efron pada tahun 1979 (Eko, 1996). Metode Bootstrap dapat digunakan untuk mengatasi suatu penelitian yang distribusi sampelnya tidak normal, tidak diketahui distribusinya, maupun untuk sampel yang berukuran kecil.

Prinsip dari metode ini sebagai berikut : Misalkan X = (x_1, x_2, ... x_n) adalah data pengamatan dari suatu populasi yang mempunyai fungsi distribusi F tidak diketahui dengan parameter θ yang juga tidak diketahui, dan $\hat{\theta} = s(x)$ adalah penduga tak bias dari θ. Dari data diatas dilakukan prosedur sebagai berikut :

Langkah 1: Ambil data X_1^* = (x_1, x_2, ... x_n) dari X satu persatu dengan pengembalian, didapat $\hat{\theta}_1^* = s(x_1^*)$

Langkah 2 : Ulangi langkah 1, didapat $\hat{\theta}_2^* = s(x_2^*)$

.

.

.

Langkah B : Ulangi langkah 1, didapat $\hat{\theta}_B^* = s(x_B^*)$

Maka diperoleh $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ yang merupakan peubah acak independent identik yang masing-masing merupakan penduga dari θ. Simpangan baku Bootstrap didefinisikan

$$\hat{S}e_{boot}(\hat{\theta}) = \left[\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}^* - \bar{\theta}_{(.)}^*\right)^2\right]^{1/2}, \text{dengan } \bar{\theta}_{(.)}^* = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\theta_i^* \text{ (Eko, 1996).}$$

2.2.3. Selang Kepercayaan Persentil Bootstrap

Misalkan X* adalah sampel Bootsrap yang dibangkitkan dari data pengamatan X, maka diperoleh $\hat{\theta}^* = s(x^*)$, dan misalkan $\hat{F}$ adalah fungsi distribusi dari $\hat{\theta}^*$ maka selang kepercayaan persentil sebesar 1 - 2α adalah $\left[\hat{\theta}_{\%bawah}, \hat{\theta}_{\%atas}\right] = \left[\hat{\theta}^{-1}(\alpha), \hat{\theta}^{-1}(1-\alpha)\right]$. Karena $\hat{\theta}^{-1}(\alpha) = \hat{\theta}^{*(\alpha)}$ merupakan persentil ke-100α dari distribusi Bootstrap, maka selang kepercayaan persentil dapat ditulis $\left[\hat{\theta}_{\%bawah}, \hat{\theta}_{\%atas}\right] = \left[\hat{\theta}^{*(\alpha)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha)}\right]$(Efron, *et.al.*, 1993).

Hubungan antara selang kepercayaan dan hipotesis dapat diterangkan sebagai berikut : Jika terdapat hipotesis $H_o : \theta = \theta_o$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_o$, maka untuk $\hat{\theta}_{\%bawah} \langle \theta_0 \langle \hat{\theta}_{\%atas}$ berarti $P\left(\hat{\theta}_{\%bawah} \langle \theta_0 \langle \hat{\theta}_{\%atas}\right) = 1 - 2\alpha$,

$$P_{\theta=\theta_0}\left(\theta_0 \langle \hat{\theta}_{\%bawah}\right) = \alpha, \qquad \forall \theta < \theta_0$$

$$P_{\theta=\theta_0}\left(\theta_0 \rangle \hat{\theta}_{\%atas}\right) = \alpha, \qquad \forall \theta > \theta_0$$, (Efron, Tibshirani, 1993).

2.3. S-PLUS FOR WINDOWS VERSI 3.1

Menurut **S-Plus programmer's manual** dan **S-Plus : Guide to statistical and mathematical analysis (1993)** serta **Venables dan Ripley (1994)** dapat dibuat program-program kecil yang bersama-sama dengan program internal dalam S-plus sendiri untuk mendukung program utama yang akan dibuat menurut algoritma yang diinginkan.

Dengan menggunakan bahasa S-plus dapat dibuat program untuk menyelesaikan algoritma yang terdapat dalam metoda Bootstrap dan Jackknife.

BAB III

METODE PENELITIAN

Alat :

Komputer personal dengan spesifikasi :

a. Merk SEGA asahi technology

b. Processor Pentium-100

c. RAM 49 MB

Tempat :

Laboratorium Komputasi FMIPA Unair.

Metode Penelitian :

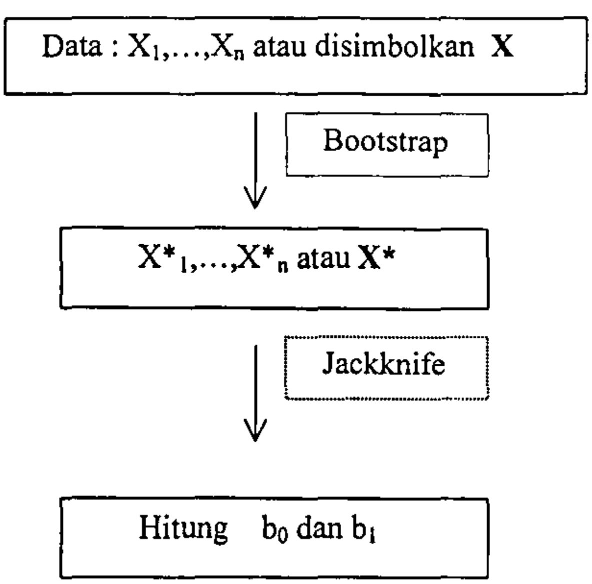
1. Penelusuran pustaka yang berkaitan dengan estimator dari parameter pada regresi linear sederhana dengan distribusi bersama dari kedua peubah acaknya tidak diketahui, Jackknife dan Bootstrap, selang kepercayaan, dan inferensi.
2. Membuat algoritma berdasarkan metode resampling (Jackknife dan Bootstrap) dan hasil estimator yang diperoleh, untuk menghitung nilai estimatornya secara numerik.
3. Membuat Program S-plus yang mengimplementasikan algoritma yang telah disusun berdasarkan teori yang ada. Dengan program tersebut diharapkan dapat dibuat selang kepercayaan dari parameter-parameternya sehingga inferensi statistik dari parameter model regresi yang diinginkan dapat dilakukan.

4. Menemukan data sekunder yang sesuai kasus yang diinginkan : data yang dapat dipakai untuk model linear sederhana dengan distribusi bersama dari kedua peubah acaknya tidak diketahui.
5. Menerapkan Program S-plus yang telah dibuat pada data sekunder yang diperoleh. Dalam tahap ini diharapkan dapat diperoleh hasil yang optimal dan sekaligus digunakan untuk uji coba program yang telah dibuat benar atau salah. Sehingga jika terjadi kesalahan-kesalahan maka dapat dilakukan perbaikan-perbaikan atau koreksi terhadap struktur program dengan melihat kembali algoritma yang ada.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. PENDUGA β_o dan β_1.

Menurut pendekatan teoritis rumus untuk penduga β_o dan β_1 masing-masing adalah $\beta_0 = \mu_{X_0} - (\sigma_{X_1X_0} / \sigma_{X_1X_1})\mu_{X_1}$ dan $\beta_1 = \sigma_{x_1x_0} / \sigma_{x_1x_1}$, selanjutnya rumus tersebut dipergunakan untuk pendekatan numerik atau komputasi yang dalam penelitian ini dipakai dengan bantuan metode Jackknife dan Bootstrap. Karena ada dua metode yang harus dipergunakan maka untuk lebih mudah akan dipilih langkah meresampling data dengan Bootstrap dulu baru kemudian Jackknife dan selanjutnya dihitung nilai penduga β_o dan β_1 , sebut saja penduga tersebut dengan b_0 dan b_1. Lebih jelasnya dapat dilihat pada diagram berikut :



4.2. INFERENSI UNTUK β_o dan β_1.

Hipotesis yang diajukan dalam inferensi β_o dan β_1 ini adalah :

a. $H_o : \beta_i = 0$ untuk i=0,1

$H_1 : \beta_i \neq 0$

b. $H_o : \beta_i < 0$ untuk i=0,1

$H_1 : \beta_i \geq 0$

c. $H_o : \beta_i > 0$ untuk i=0,1

$H_1 : \beta_i \leq 0$

Dan untuk menguji hipotesis tersebut atau inferensi terhadap β_o dan β_1 tidak digunakan distribusi dari statistik tertentu akan tetapi akan dipakai selang kepercayaan. Dengan selang kepercayaan ini keputusan yang diambil dipengaruhi oleh sebaran nilai dari b_o dan b_1.

Kriteria yang digunakan untuk mengambil kesimpulan dari ketiga hipotesis di atas adalah sebagai berikut :

a. Untuk hipotesis tipe I.

Tolak H_0 dengan tingkat signifikansi α atau selang kepercayaan sebesar (1 - α) jika nilai sebaran dari b_0 maupun b_1 berada diantara nilai negatif dan positif.

b. Untuk hipotesis tipe II

Tolak H_0 dengan tingkat signifikansi α atau selang kepercayaan sebesar (1 - α) jika nilai sebaran dari b_0 maupun b_1 positif.

c. Untuk hipotesis tipe III

Tolak H_0 dengan tingkat signifikansi α atau selang kepercayaan sebesar (1 - α) jika nilai sebaran dari b_0 maupun b_1 negatif.

4.3. ALGORITMA PENGHITUNGAN SELANG KEPERCAYAAN β_0 DAN β_1

Secara umum dalam pembuatan program diperlukan algoritma, demikian pula untuk pebuatan program S-Plus yang akan digunakan dalam penelitian ini juga dibutuhkan algoritma. Disamping berguna untuk kemudahan dalam penyusunan atau pembuatan struktur program, algoritma yang disusun juga akan dapat digunakan untuk mempermudah melakukan perbaikan-perbaikan terhadap kesalahan yang mungkin terjadi dalam uji coba program karena jika terjadi kesalahan maka akan lebih mudah dan cepat dengan cara merunut program berdasarkan algoritma. Berikut ini adalah algoritma untuk penghitungan selang kepercayaan β_0 dan β_1 :

(1). Men-generate data **X*** dari data asli **X** dengan Metode Bootstrap.

(2). Menerapkan teknik cross-validation (Metode Jackknife) terhadap data yang diperoleh pada (1), banyaknya data yang dihasilkan dalam tahap ini berjumlah sebanyak n-1, jika n menyatakan banyaknya pengamatan.

(3). Menghitung b_0 dan b_1 untuk masing-masing data yang dihasilkan pada (2).

(4). Ulangi langkah (1), (2) dan (3) sampai sebanyak iterasi yang diinginkan.

(5). Menghitung quantile dari b_o dan b_1.

4.4. DATA

Untuk uji coba program yang telah dibuat digunakan data sekunder, dan dalam penelitian ini dipilih data yang diambil dari buku Practical nonparametric statistics karangan Conover dan buku Biometry oleh Sokal dan Rohlf. Adapun data-data yang dimaksud masing-masing tercantum pada lampiran 1 dinamakan data Spring dan lampiran 2, data Cabezon. Alasan mengapa dipilih dua data untuk uji coba program yang

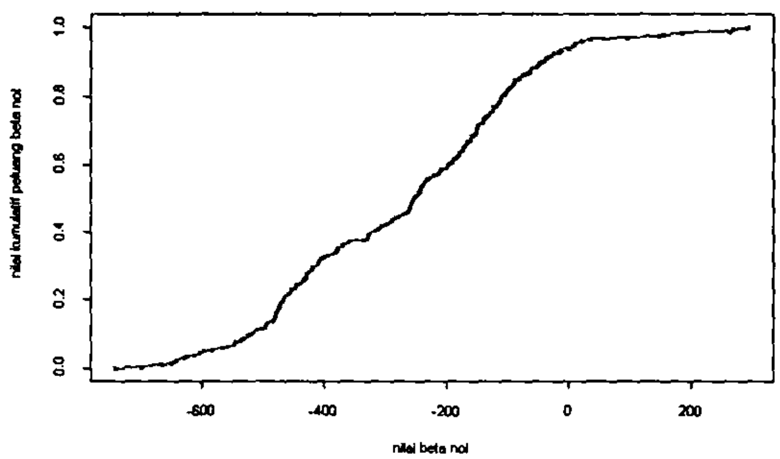
sekaligus berfungsi sebagai contoh dalam penelitian ini adalah hasil yang diperoleh dari dua data tersebut diharapkan dapat saling melengkapi.

4.5. ANALISIS

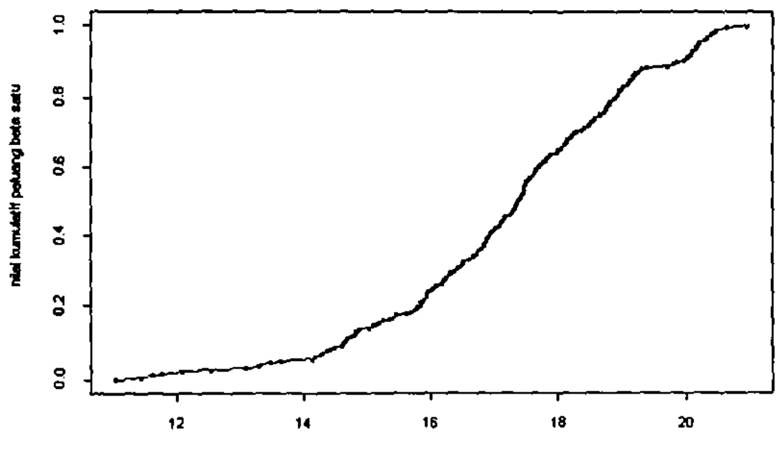
Dari pengolahan data dengan menggunakan program yang telah disusun, diperoleh beberapa hasil yang beragam baik untuk data Spring maupun Cabezon. Sehingga untuk memperoleh yang terbaik harus dilakukan pemilihan, caranya adalah sebagai berikut : Pertama, dilakukan pengolahan data dengan memilih jumlah iterasi tertentu, misalkan 800, 1600, 2400 dan seterusnya. Kedua, melihat selang kepercayaan yang terlebar dari masing-masing selang kepercayaan yang diperoleh dengan nilai α yang terkecil (yang dalam hal ini dipilih nilai α disekitar 10 atau kurang). Ketiga, setelah ditemukan hasil dengan jumlah iterasi tertentu, misalnya 1600 iterasi, kemudian dilakukan pengolahan data dengan jumlah iterasi disekitar 1600, misalnya 1616, 1632 atau yang lainnya dengan ketentuan besarnya iterasi berkelipatan 16 (banyaknya pengamatan). Keempat, dari pengolahan data yang terakhir tersebut dapat diperoleh hasil yang optimal.

Dalam data Spring diperoleh bahwa selang kepercayaan yang terbaik untuk b_0 dengan tingkat kepercayaan sebesar 93,6% , dan iterasi yang digunakan sebanyak 640 iterasi. Sedangkan untuk b_1 selang kepercayaaannya mempunyai tingkat kepercayaan lebih besar dari 99%. Hasil tersebut diperoleh dari pengolahan terhadap data Spring sebanyak 24 kali yang masing-masing dengan jumlah iterasi yang berbeda. Jika diperhatikan dari keseluruhan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa jumlah iterasi yang besar tidak mengakibatkan bahwa hasil yang diperoleh akan optimal atau terbaik.

Padahal menurut histogram dari hasil yang didapat menunjukkan bahwa gambarnya kelihat semakin sempit jika jumlah iterasi semakin besar, ini berarti bahwa semakin iterasi yang dipergunakan semakin besar diperoleh selang kepercayaan yang semakin sempit. Gambar 1 dan gambar 2 berikut ini masing-masing menunjukkan nilai kumulatif dari b_0 dan b_1 untuk data Spring. Dan untuk nilai-nilai quantile dari b_0 dan b_1 yang digunakan untuk menentukan selang kepercayaannya dapat dilihat di lampiran 4.



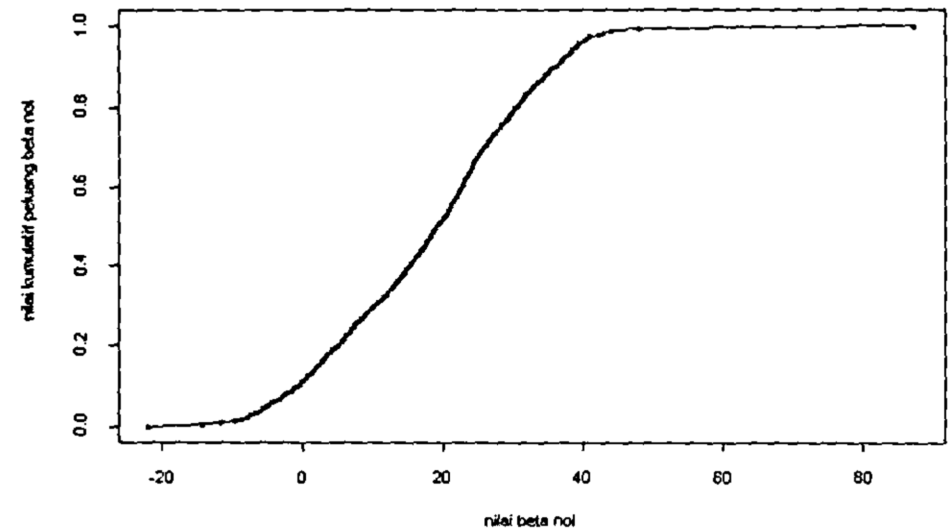
Gambar 1 : Nilai Kumulatif dari Peluang b_0 untuk Data Spring



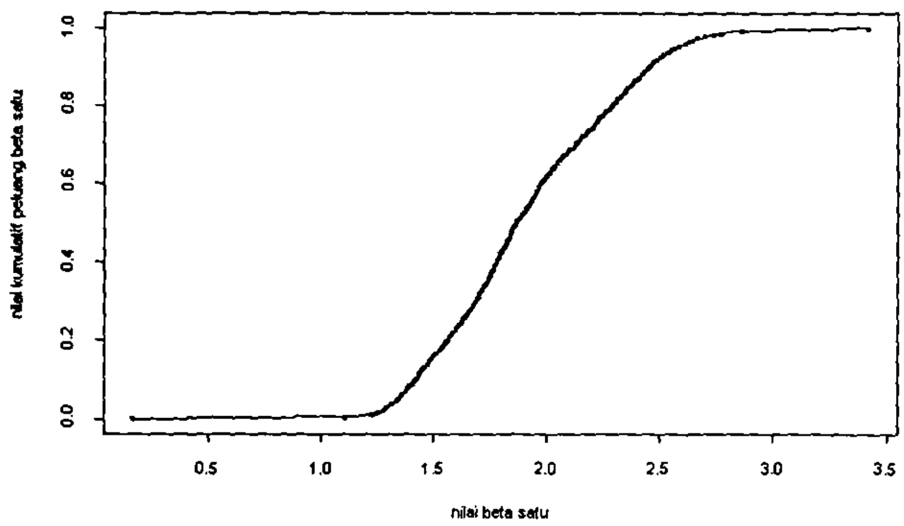
Gambar 2 : Nilai Kumulatif dari Peluang b_1 untuk Data Spring

Sedangkan data Cabezon diperoleh bahwa selang kepercayaan yang terbaik untuk b_0 dengan tingkat kepercayaan sebesar 89% dan iterasi yang digunakan adalah 6325 iterasi. Dan seperti halnya data Spring, data Cabezon ini mempunyai selang kepercayaan b_1 dengan tingkat kepercayaan lebih besar dari 99%. Dengan melakukan 21 kali pengolahan data (menggunakan jumlah iterasi yang berbeda) diperoleh hasil tersebut. Sama seperti dalam pengolahan data Spring untuk data Cabezon ini juga menunjukkan keragaman hasil yang diperoleh, dan hasil yang optimal diperoleh dengan jumlah iterasi yang lebih banyak dibanding pada pengolahan data Spring, yaitu 6325 iterasi. Gambar 3 dan gambar 4 dibawah ini masing-masing menunjukkan nilai kumulatif dari b_0 dan b_1 yang merupakan hasil pengolahan data Cabezon. Dan untuk nilai-nilai quantile dari b_0 dan b_1 yang digunakan untuk menentukan selang kepercayaannya selengkapnya dapat dilihat di lampiran 5.

Dari penghitungan data Spring diperoleh bahwa nilai dari b_0 adalah -219.4061 dengan tingkat kepercayaan 93,5%, dan b_1 = 16.726 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99%. Sedangkan untuk data Cabezon didapat hasil sebagai berikut : nilai b_0 adalah 19.76682 dengan tingkat kepercayaan 89% dan b_1 = 1.869955 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99%.



Gambar 3 : Nilai Kumulatif dari Peluang b_0 untuk Data Cabezon



Gambar 4 : Nilai Kumulatif dari Peluang b_1 untuk Data Cabezon

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

KESIMPULAN

1. Metode Resampling (Jackknife dan Bootstrap) dapat digunakan untuk melakukan inferensi parameter dengan menggunakan selang kepercayaan, karena dalam metode resampling ini tidak dipengaruhi oleh distribusi dari data pengamatan sehingga yang dapat dilakukan adalah menghitung selang kepercayaan.
2. Untuk data Spring diperoleh bahwa nilai dari b_0 = -219.4061 dengan tingkat kepercayaan 93.5%, dan b_1 = 16.726 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99%. Dan untuk data Cabezon diperoleh nilai b_0 = 19.76682 dengan tingkat kepercayaan 89%, dan b_1 = 1.869955 dengan tingkat kepercayaan lebih dari 99%.

SARAN

Untuk memperoleh selang kepercayaan dari parameter yang optimal, perlu dilakukan *trial & error* karena hal ini dipengaruhi oleh sifat keacakan dari metode resampling.

Hasil penelitian ini bisa dilanjutkan untuk Metode Regresi Ganda, yaitu model regresi dengan peubah bebas lebih dari satu.

DAFTAR PUSTAKA

Conover, W.J., 1980, *Practical nonparametric statistics*, Second edition, Wiley, New York.

Draper, N. and Smith, H., 1992, *Analisis Regresi Terapan*, Edisi ke-2, Terjemahan Bambang Sumantri, Gramedia, Jakarta.

Efron, B. And Tibshirani, R.J., 1993, *An Introduction to The Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.

Eko Tjahjono, 1996, Metode Jackknife dan Bootstrap Sebagai Alternatif untuk Inferensi Statistik, *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, Volume 1 No. 1, hal. 7-8.

Graybill, F.A., 1970, *Theory and Application of The Linear Model*, Duxbury Press, North Scituate, Massachusetts.

Mood, A.M., Graybill, F.A., dan Boes, D.C. (1974), *Introduction to Theory of Statistics,* Second Edition, McGraw Hill, New York.

Shao, J. And Dongsheng Tu, 1995, *The Jackknife and Bootstrap*, Springer - Verlag, New York.

Sokal, R.R. dan F.J. Rohlf, 1995, *Biometry*, Third edition, W.H. freeman and company, New York.

Venables, W.N. and Ripley, B.D., 1994, *Modern Applied Statistics With S-Plus,* Springer - Verlag, New York.

--------, *S-Plus programmer's manual*, MathSoft, Seattle.

--------, *S-Plus : Guide to statistical and mathematical analysis*, MathSoft, Seattle.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1. Data Spring*

	Y (Jumlah Mahasiswa)	X (Banyaknya Fakultas)
1.	2546	129
2.	1355	75
3.	1019	87
4	1858	99
5.	4500	300
6.	1141	109
7.	784	77
8.	1063	64
9.	267	40
10.	753	61
11.	3164	190
12.	1189	90
13.	2755	240
14.	5602	300
15	2697	170
16.	988	73

*Sumber :Conover,1980,Practical nonparametric statistics, hal. 272.

LAMPIRAN 2. Data Cabezon**

	Y (Jumlah telur yang dihasilkan dlm ribuan)	X (berat Cabezon betina x 100 gr)
1.	61	14
2.	37	17
3.	65	24
4.	69	25
5.	54	27
6.	93	33
7.	87	34
8.	89	37
9.	100	40
10.	90	41
11.	97	42

**Sumber : Sokal dan Rohlf, 1995, Biometry, hal.546

LAMPIRAN 3. Program-program dalam bahasa S-plus

Program I.

```
function(X)
{
#
#         Program menghitung bo dan b1
#    dari Regresi Linear Sederhana dengan
#  Distribusi Bersama Kedua Peubahnya Tidak Diketahui
#    dan menentukan interval kepercayaannya
#            dengan metode resampling
#        (Bootstrap dan Jackknife)
#    ***********************************
#        dibuat oleh :  Eto Wuryanto
#    ***********************************
#
     X <- as.matrix(X)
     bar <- dim(X)[1]
     bo <- mean(X[, 1]) - ((var(X[, 1], X[, 2]) *
          mean(X[, 2]))/var(X[, 2]))
     b1 <- var(X[, 1], X[, 2])/var(X[, 2])
     now <- proc.time()
     cat("Berapa iterasi yang anda inginkan ? \n")
     N <- scan("", n = 1)
     Nbar <- bar * N
     bsatu <- rep(0, Nbar)
     bnol <- rep(0, Nbar)
     options(object.size = 500000000)
     for(i in 1:N) {
#
#
#  *** Bootstrap ***
#
          random <- sample(seq(1:bar), bar,
               replace = T)
          kerjaX <- X[random, ]
#
#
#  *** Jackknife ***
#
          for(j in 1:bar) {
               XX <- kerjaX[( - j), ]
               lama <- (proc.time() - now)/60
               iter <- j + (i - 1) * bar
#
               cat("iterasi ke-", iter, "dari",
                    Nbar, ", lamanya:",
                    round(lama, 2),
                    "menit \n")
#
```

```
#
#   *** hitung bo dan b1 ***
#
                bsatu[(j + (bar * (i - 1))):(
                     bar * i)] <- (var(XX[,
                     1], XX[, 2])/var(XX[, 2
                     ]))
                bnol[(j + (bar * (i - 1))):(bar*
                     i)] <- mean(XX[, 1]) - (
                     (var(XX[, 1], XX[, 2]) *
                     mean(XX[, 2]))/var(XX[,
                     2]))
#
#
#               cat("nilai bawah", j + bar * (i -
#                    1), "nilai atas", bar *
#                    i, "\n")
#
          }
     }
#
#
#   *** hitung quantile dari bo dan b1 ***
#
     qbo <- quantile(sort(bnol), seq(0, 1, 0.005))
     qb1 <- quantile(sort(bsatu), seq(0, 1, 0.005))
     menit <- round(((proc.time() - now)/60), 3)
     return(qbo, qb1, bnol, bsatu, bo, b1, menit)
}
```

Program II.

```
function(X)
{
#
#      Program menghitung perubahan nilai quantile
# dari negatif ke positif atau sebaliknya dari bo dan bl
#       dari Regresi Linear Sederhana dengan
#  Distribusi Bersama Kedua Peubahnya Tidak Diketahui
#           yang dihitung dengan program beta
#    *************************************
#        dibuat oleh :  Eto Wuryanto
#    *************************************
#
     X <- as.vector(X)
     n <- length(X)
     Y <- seq(0, 1, 0.005)
     for(i in 1:n) {
          if(i == n)
               X[n + 1] <- X[n]
          XXX <- (X[i] < 0) & (X[i + 1] >= 0)
          if(XXX == T) {
               batas <- matrix(0, 4, 2)
               batas[, 1] <- Y[(i - 1):(i + 2)
                    ]
               batas[, 2] <- X[(i - 1):(i + 2)
                    ]
               break
          }
          else {
               if(X[i] > 0)
                    batas <-
                      "semua nilainya positif"
               else batas <-
                      "semua nilainya negatif"
          }
     }
     return(batas)
}
```

LAMPIRAN 4. Quantile dari bo dan b1 untuk data Spring.

```
> betas40$bo
[1] -219.4061

> betas40$b1
[1] 16.726


> betas40$qbo
      0.0%       0.5%       1.0%       1.5%       2.0%
 -741.1439 -697.9569 -666.3572 -649.8472 -643.7224
      2.5%       3.0%       3.5%       4.0%       4.5%
 -641.6597 -628.8638 -624.8247 -610.8713 -602.1578
      5.0%       5.5%       6.0%       6.5%       7.0%
 -597.0622 -581.7552 -564.6283 -557.0672 -546.5285
      7.5%       8.0%       8.5%       9.0%       9.5%
 -544.1185 -536.0508 -533.1879 -531.0638 -523.4563
     10.0%      10.5%      11.0%      11.5%      12.0%
 -518.6038 -514.8112 -508.2335 -500.2087 -495.0269
     12.5%      13.0%      13.5%      14.0%      14.5%
 -493.8467 -492.8709 -490.0232 -481.6608 -480.7805
     15.0%      15.5%      16.0%      16.5%      17.0%
 -479.4651 -478.5844 -477.7707 -476.6876 -475.1919
     17.5%      18.0%      18.5%      19.0%      19.5%
 -473.6612 -472.4884 -472.1269 -469.7853 -468.1955
    20.0%     20.5%     21.0%     21.5%     22.0%
 -465.317 -464.1577 -463.5831 -458.2782 -454.0884
    22.5%     23.0%    23.5%    24.0%    24.5%
 -453.801 -452.565 -447.412 -445.1659 -443.488
     25.0%      25.5%      26.0%      26.5%      27.0%
 -437.8122 -433.8016 -431.9394 -428.9185 -428.2612
     27.5%      28.0%      28.5%     29.0%      29.5%
 -427.2054 -425.4648 -424.4267 -418.692 -418.0308
     30.0%      30.5%      31.0%      31.5%      32.0%
 -417.3428 -407.8036 -407.7114 -405.9751 -404.9288
    32.5%     33.0%      33.5%     34.0%      34.5%
 -400.909 -398.2922 -391.9969 -381.862 -378.9221
     35.0%      35.5%      36.0%      36.5%      37.0%
 -377.6174 -375.6714 -369.8438 -366.3181 -358.6937
     37.5%      38.0%      38.5%      39.0%      39.5%
 -355.8889 -334.1105 -328.1264 -326.8011 -325.3873
    40.0%     40.5%      41.0%     41.5%      42.0%
 -321.935 -315 1188 -310.0544 -308.025 -305.3411
     42.5%      43.0%      43.5%      44.0%      44.5%
 -298.0766 -291.9064 -286.9027 -284.8974 -282.3937
     45.0%      45.5%      46.0%      46.5%      47.0%
 -275.1103 -268.0999 -264.5531 -259.9299 -258.3564
    47.5%     48.0%      48.5%      49.0%      49.5%
 -257.647 -257 2892 -256.8046 -254.9052 -253.4405
```

```
     50.0%      50.5%     51.0%      51.5%      52.0%
-251.5758 -249.9157 -249.535 -246.1282 -243.9365
     52.5%      53.0%      53.5%      54.0%      54.5%
-242.2521 -239.6415 -239.3917 -237.2152 -235.2335
     55.0%      55.5%      56.0%      56.5%      57.0%
-232.5744 -231.4011 -229.1948 -224.6606 -217.7568
    57.5%      58.0%      58.5%      59.0%      59.5%
-212.112 -209.7436 -207.3999 -205.8119 -198.2788
     60.0%      60.5%      61.0%      61.5%      62.0%
-195.5165 -191.7195 -187.5798 -185.362 -182.0961
     62.5%      63.0%      63.5%      64.0%      64.5%
-178.2128 -177.3067 -176.6412 -173.3013 -171.2527
     65.0%      65.5%      66.0%      66.5%      67.0%
-170.9518 -169.0928 -167.1559 -163.6728 -159.4394
     67.5%     68.0%      68.5%      69.0%      69.5%
-158.1664 -157.65 -154.6336 -149.1308 -148.3325
     70.0%      70.5%      71.0%      71.5%      72.0%
-148.0979 -147.4231 -146.0814 -145.4703 -139.2855
     72.5%      73.0%      73.5%      74.0%      74.5%
-137.7771 -136.6204 -135.4372 -132.4758 -128.353
     75.0%      75.5%     76.0%      76.5%      77.0%
-126.3427 -123.604 -121.9219 -120.8109 -120.1045
    77.5%      78.0%      78.5%      79.0%      79.5%
-113.956 -111.9365 -110.3139 -108.7876 -108.3839
    80.0%      80.5%     81.0%      81.5%      82.0%
-106.45 -100.8583 -99.77369 -97.01247 -96.22774
     82.5%      83.0%      83.5%      84.0%      84.5%
-93.33326 -89.1578 -87.21184 -86.64535 -84.49053
     85.0%      85.5%      86.0%      86.5%      87.0%
-78.69558 -76.75891 -71.67513 -68.77306 -61.9282
     87.5%      88.0%      88.5%      89.0%      89.5%
-59.79734 -57.86991 -49.92574 -47.22162 -45.82555
    90.0%      90.5%      91.0%      91.5%      92.0%
-41.1293 -37.36243 -34.33209 -31.37014 -26.49086
     92.5%      93.0%      93.5%      94.0%      94.5%
-22.33381 -14.19073 -10.53878 1.695764 9.452612
    95.0%      95.5%     96.0%     96.5%    97.0%     97.5%
12.46312 14.13854 22.84042 38.98828 99.8513 150.0941
    98.0%      98.5%     99.0%     99.5%   100.0%
158.2733 188.3218 265.3636 269.7724 293.8126


> betas40$qbl
     0.0%      0.5%      1.0%      1.5%      2.0%      2.5%
11.05723 11.46958 11.64578 11.78349 12.10061 12.5606
     3.0%      3.5%      4.0%      4.5%      5.0%      5.5%
13.10175 13.30055 13.34116 13.4917 13.66684 14.16277
     6.0%      6.5%      7.0%      7.5%      8.0%      8.5%
14.19615 14.28614 14.31344 14.38558 14.42932 14.49092
     9.0%      9.5%     10.0%     10.5%     11.0%     11.5%
14.61104 14.64227 14.66211 14.68491 14.69398 14.76575
   12.0%     12.5%     13.0%     13.5%     14.0%     14.5%
14.8198 14.83022 14.85761 14.89055 15.05723 15.12361
```

15.0%	15.5%	16.0%	16.5%	17.0%	17.5%
15.17219	15.2091	15.272	15.3667	15.43475	15.48377
18.0%	18.5%	19.0%	19.5%	20.0%	20.5%
15.62628	15.71898	15.7807	15.80336	15.82188	15.86263
21.0%	21.5%	22.0%	22.5%	23.0%	23.5%
15.86276	15.89153	15.90662	15.94442	15.95614	15.96384
24.0%	24.5%	25.0%	25.5%	26.0%	26.5%
15.97868	16.03674	16.05677	16.1013	16.11674	16.19189
27.0%	27.5%	28.0%	28.5%	29.0%	29.5%
16.19741	16.22134	16.24901	16.26066	16.3241	16.34233
30.0%	30.5%	31.0%	31.5%	32.0%	32.5%
16.38767	16.42483	16.46152	16.48576	16.50858	16.5327
33.0%	33.5%	34.0%	34.5%	35.0%	35.5%
16.54323	16.60637	16.66282	16.68593	16.73448	16.76388
36.0%	36.5%	37.0%	37.5%	38.0%	38.5%
16.77246	16.80491	16.85505	16.86016	16.87061	16.88484
39.0%	39.5%	40.0%	40.5%	41.0%	41.5%
16.88753	16.90388	16.93777	16.96209	16.98184	16.98683
42.0%	42.5%	43.0%	43.5%	44.0%	44.5%
17.02666	17.04947	17.09038	17.11241	17.1231	17.14841
45.0%	45.5%	46.0%	46.5%	47.0%	47.5%
17.17345	17.19503	17.26682	17.29074	17.31446	17.32668
48.0%	48.5%	49.0%	49.5%	50.0%	50.5%
17.3467	17.3504	17.36634	17.37798	17.3843	17.40626
51.0%	51.5%	52.0%	52.5%	53.0%	53.5%
17.42906	17.43877	17.45941	17.46702	17.48226	17.48717
54.0%	54.5%	55.0%	55.5%	56.0%	56.5%
17.49356	17.49645	17.505	17.50951	17.51419	17.55376
57.0%	57.5%	58.0%	58.5%	59.0%	59.5%
17.58191	17.60952	17.62978	17.65649	17.66569	17.67525
60.0%	60.5%	61.0%	61.5%	62.0%	62.5%
17.71104	17.7338	17.76021	17.7973	17.82387	17.83614
63.0%	63.5%	64.0%	64.5%	65.0%	65.5%
17.85178	17.88942	17.91906	18.0084	18.02171	18.06396
66.0%	66.5%	67.0%	67.5%	68.0%	68.5%
18.08153	18.10392	18.13545	18.15272	18.15641	18.1961
69.0%	69.5%	70.0%	70.5%	71.0%	71.5%
18.21148	18.22556	18.27804	18.31939	18.39666	18.43138
72.0%	72.5%	73.0%	73.5%	74.0%	74.5%
18.49818	18.51754	18.53848	18.5697	18.58724	18.60057
75.0%	75.5%	76.0%	76.5%	77.0%	77.5%
18.6677	18.67826	18.7376	18.74276	18.76188	18.76856
78.0%	78.5%	79.0%	79.5%	80.0%	80.5%
18.8186	18.82932	18.84062	18.8865	18.90774	18.95594
81.0%	81.5%	82.0%	82.5%	83.0%	83.5%
18.95862	18.97529	18.9764	19.00753	19.04066	19.08997
84.0%	84.5%	85.0%	85.5%	86.0%	86.5%
19.10777	19.13453	19.14931	19.18058	19.19548	19.22805
87.0%	87.5%	88.0%	88.5%	89.0%	89.5%
19.23574	19.29735	19.32515	19.41412	19.73648	19.83437
90.0%	90.5%	91.0%	91.5%	92.0%	92.5%
19.88467	19.98507	20.02766	20.05333	20.08582	20.10312

93.0%	93.5%	94.0%	94.5%	95.0%	95.5%
20.11384	20.16504	20.16504	20.20503	20.22635	20.23301
96.0%	96.5%	97.0%	97.5%	98.0%	98.5%
20.30359	20.34154	20.35475	20.40585	20.42524	20.47578
99.0%	99.5%	100.0%			
20.49644	20.65213	20.95716			

LAMPIRAN 5. Quantile dari bo dan b1 untuk data Cabezon.

```
> betae575$bo
[1] 19.76682

> betae575$b1
[1] 1.869955

> quantile(sort(betae575$bnol),seq(0,1,.005))
      0.0%       0.5%       1.0%       1.5%       2.0%
 -21.81712  -14.14919  -11.38071  -9.481695  -8.49111
      2.5%       3.0%       3.5%       4.0%       4.5%
 -7.73316  -7.191899  -6.480949  -5.851459  -5.421431
      5.0%       5.5%       6.0%       6.5%       7.0%
 -5.123249  -4.694006  -4.255883  -3.625748  -3.15297
      7.5%       8.0%       8.5%       9.0%       9.5%
 -2.705439  -2.330364  -1.880173  -1.39667  -1.089223
      10.0%       10.5%       11.0%       11.5%       12.0%
 -0.6090942 -0.2443447 0.009647189 0.2745572 0.5684397
     12.5%     13.0%     13.5%     14.0%     14.5%
 0.8932086 1.279096 1.483538 1.764607 2.069888
    15.0%    15.5%    16.0%    16.5%    17.0%    17.5%
 2.330091 2.510086 2.741386 2.985295 3.270764 3.601062
    18.0%    18.5%    19.0%    19.5%    20.0%    20.5%
 3.778772 4.174219 4.400623 4.771361 5.000079 5.309143
    21.0%    21.5%    22.0%    22.5%    23.0%    23.5%
 5.635158 5.957091 6.183465 6.469185 6.727781 6.990487
    24.0%    24.5%    25.0%    25.5%    26.0%    26.5%
 7.07734 7.450796 7.602553 7.779468 8.069917 8.361568
    27.0%    27.5%    28.0%    28.5%    29.0%    29.5%
 8.645856 8.960526 9.258194 9.579171 9.901674 10.12273
    30.0%    30.5%    31.0%    31.5%    32.0%    32.5%
 10.35947 10.72645 11.0439 11.43788 11.73839 12.00879
    33.0%    33.5%    34.0%    34.5%    35.0%    35.5%
 12.24842 12.38913 12.71502 12.97554 13.16785 13.46185
    36.0%    36.5%    37.0%    37.5%    38.0%    38.5%
 13.73274 13.88295 14.13382 14.32164 14.57632 14.74776
    39.0%    39.5%    40.0%    40.5%    41.0%    41.5%
 15.01825 15.2139 15.41398 15.59308 15.76642 16.0347
    42.0%    42.5%    43.0%    43.5%    44.0%    44.5%
 16.21119 16.48879 16.77845 16.95748 17.22908 17.3464
    45.0%    45.5%    46.0%    46.5%    47.0%    47.5%
 17.58209 17.81405 17.91516 18.03368 18.21328 18.43359
    48.0%    48.5%    49.0%    49.5%    50.0%    50.5%
 18.58405 18.79681 18.99194 19.19595 19.36611 19.57621
    51.0%    51.5%    52.0%    52.5%    53.0%    53.5%
 19.87908 20.06661 20.26366 20.44634 20.72891 20.89083
    54.0%    54.5%    55.0%    55.5%    56.0%    56.5%
 20.99172 21.17398 21.33271 21.41896 21.70123 21.8754
```

```
     57.0%     57.5%     58.0%     58.5%     59.0%     59.5%
  21.99471  22.15595  22.27574  22.41121  22.49543  22.65012
     60.0%     60.5%     61.0%     61.5%     62.0%     62.5%
  22.89126  23.04534  23.12936  23.28352  23.41603  23.55786
     63.0%     63.5%     64.0%    64.5%     65.0%     65.5%
  23.70761  23.87848  24.01956  24.1319  24.27325  24.37873
     66.0%     66.5%     67.0%     67.5%     68.0%     68.5%
  24.51554  24.69034  24.88235  25.08139  25.31723  25.44687
     69.0%     69.5%     70.0%     70.5%     71.0%     71.5%
  25.58498  25.79629  26.00727  26.26575  26.46839  26.66297
     72.0%     72.5%     73.0%     73.5%     74.0%     74.5%
  26.81929  27.02181  27.30139  27.51571  27.77308  27.99628
     75.0%     75.5%    76.0%     76.5%     77.0%     77.5%
  28.29337  28.42518  28.647  29.02541  29.23233  29.46187
     78.0%     78.5%     79.0%     79.5%     80.0%     80.5%
  29.77789  29.97697  30.17022  30.32366  30.48455  30.75416
     81.0%     81.5%     82.0%     82.5%     83.0%     83.5%
  30.92218  31.16778  31.49346  31.77778  31.99973  32.17394
     84.0%     84.5%     85.0%     85.5%     86.0%     86.5%
  32.60791  32.90485  33.05048  33.25605  33.61287  33.92081
     87.0%     87.5%     88.0%     88.5%     89.0%     89.5%
  34.23128  34.54043  34.84599  35.17484  35.37125  35.71034
     90.0%     90.5%     91.0%    91.5%     92.0%     92.5%
  36.07648  36.53052  36.89076  37.2712  37.43921  37.70069
     93.0%     93.5%     94.0%     94.5%     95.0%     95.5%
  38.02395  38.29491  38.59614  38.84985  39.13158  39.46945
     96.0%     96.5%     97.0%     97.5%     98.0%     98.5%
  39.68461  40.28314  40.75856  41.26066  42.40295  43.05234
     99.0%     99.5%    100.0%
  44.34229  48.21314  87.26893


> quantile(sort(betae575$bsatu),seq(0,1,.005))
       0.0%      0.5%      1.0%      1.5%      2.0%
  0.1723238  1.112276  1.226676  1.248127  1.260077
      2.5%      3.0%      3.5%      4.0%      4.5%      5.0%
  1.278062  1.296786  1.310283  1.322638  1.337275  1.344176
      5.5%      6.0%      6.5%      7.0%      7.5%      8.0%
  1.351667  1.358451  1.368499  1.377375  1.383251  1.390336
      8.5%      9.0%      9.5%     10.0%     10.5%     11.0%
  1.399676  1.408609  1.419654  1.425068  1.430095  1.43569
     11.5%     12.0%     12.5%     13.0%     13.5%     14.0%
  1.440282  1.446726  1.453432  1.461092  1.468091  1.476029
    14.5%     15.0%     15.5%     16.0%     16.5%     17.0%
  1.48492  1.489108  1.49642  1.50476  1.51115  1.519223
     17.5%     18.0%     18.5%     19.0%     19.5%     20.0%
  1.529223  1.534175  1.544271  1.551867  1.556177  1.56413
     20.5%     21.0%     21.5%     22.0%     22.5%     23.0%
  1.571063  1.575909  1.583051  1.590135  1.599378  1.605239
     23.5%     24.0%     24.5%     25.0%     25.5%     26.0%
  1.610478  1.617296  1.626099  1.629595  1.634912  1.641479
     26.5%     27.0%     27.5%     28.0%     28.5%     29.0%
  1.647072  1.653176  1.660783  1.665483  1.671244  1.678548
```

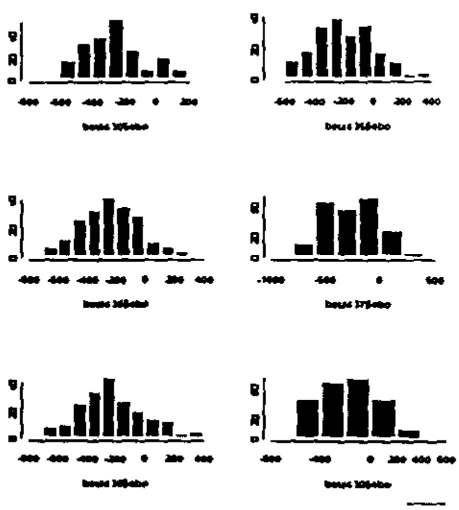
29.5%	30.0%	30.5%	31.0%	31.5%	32.0%
1.681648	1.687473	1.693925	1.699413	1.705423	1.710063
32.5%	33.0%	33.5%	34.0%	34.5%	35.0%
1.713807	1.717901	1.722014	1.726538	1.732432	1.737561
35.5%	36.0%	36.5%	37.0%	37.5%	38.0%
1.743216	1.748759	1.754885	1.759844	1.761809	1.765508
38.5%	39.0%	39.5%	40.0%	40.5%	41.0%
1.769694	1.773437	1.777179	1.782715	1.787424	1.791842
41.5%	42.0%	42.5%	43.0%	43.5%	44.0%
1.795891	1.800534	1.805607	1.810758	1.817449	1.822521
44.5%	45.0%	45.5%	46.0%	46.5%	47.0%
1.825905	1.829445	1.83382	1.839148	1.842588	1.846284
47.5%	48.0%	48.5%	49.0%	49.5%	50.0%
1.848722	1.853254	1.860273	1.862994	1.867808	1.872768
50.5%	51.0%	51.5%	52.0%	52.5%	53.0%
1.880618	1.885772	1.893938	1.900165	1.906291	1.912066
53.5%	54.0%	54.5%	55.0%	55.5%	56.0%
1.919479	1.925702	1.931958	1.936077	1.940027	1.943596
56.5%	57.0%	57.5%	58.0%	58.5%	59.0%
1.949472	1.954636	1.957666	1.962582	1.967207	1.972463
59.5%	60.0%	60.5%	61.0%	61.5%	62.0%
1.978025	1.984064	1.990723	1.996712	2.004202	2.011093
62.5%	63.0%	63.5%	64.0%	64.5%	65.0%
2.018002	2.022519	2.029076	2.037192	2.043855	2.052909
65.5%	66.0%	66.5%	67.0%	67.5%	68.0%
2.057204	2.065862	2.073411	2.082611	2.091342	2.100798
68.5%	69.0%	69.5%	70.0%	70.5%	71.0%
2.109015	2.116951	2.124565	2.134495	2.142463	2.153465
71.5%	72.0%	72.5%	73.0%	73.5%	74.0%
2.161528	2.168389	2.175633	2.184898	2.194391	2.203603
74.5%	75.0%	75.5%	76.0%	76.5%	77.0%
2.209575	2.215552	2.223785	2.235046	2.241649	2.246938
77.5%	78.0%	78.5%	79.0%	79.5%	80.0%
2.25657	2.26373	2.272939	2.28099	2.289655	2.295579
80.5%	81.0%	81.5%	82.0%	82.5%	83.0%
2.300077	2.309059	2.316674	2.324666	2.335258	2.346395
83.5%	84.0%	84.5%	85.0%	85.5%	86.0%
2.352691	2.357287	2.365144	2.37482	2.382492	2.38878
86.5%	87.0%	87.5%	88.0%	88.5%	89.0%
2.395669	2.405966	2.417011	2.426623	2.43402	2.443731
89.5%	90.0%	90.5%	91.0%	91.5%	92.0%
2.453011	2.461538	2.469179	2.477054	2.483237	2.492182
92.5%	93.0%	93.5%	94.0%	94.5%	95.0%
2.504917	2.517109	2.527804	2.54328	2.561861	2.574129
95.5%	96.0%	96.5%	97.0%	97.5%	98.0%
2.593797	2.616555	2.632548	2.649802	2.672913	2.702654
98.5%	99.0%	99.5%	100.0%		
2.742632	2.777715	2.869661	3.420697		

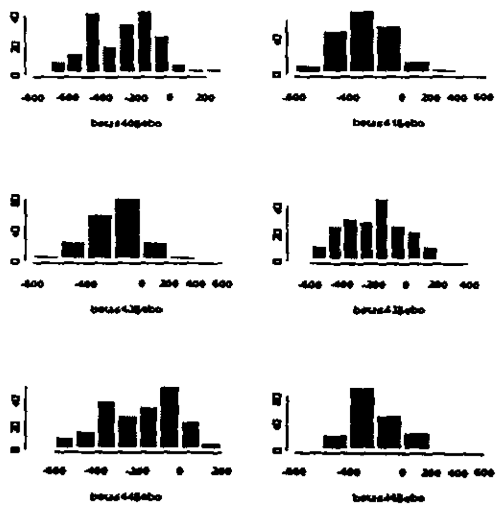
LAMPIRAN 6. Hasil keseluruhan quantile dari bo untuk data Spring dan histogramnya.

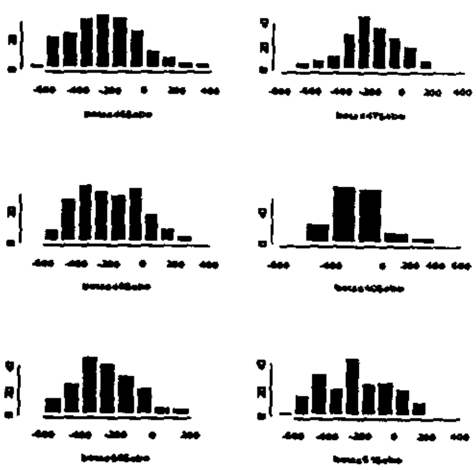
```
> plus.min(betas30$qbo)
 [1,] 0.855 -15.091786
 [2,] 0.860  -3.182178
 [3,] 0.865   7.894902
 [4,] 0.870   9.454972
> plus.min(betas35$qbo)
 [1,] 0.815 -6.837122
 [2,] 0.820 -0.110411
 [3,] 0.825  2.583492
 [4,] 0.830  8.486566
> plus.min(betas36$qbo)
 [1,] 0.890  -9.222402
 [2,] 0.895  -6.280562
 [3,] 0.900   4.752320
 [4,] 0.905  10.908818
> plus.min(betas37$qbo)
 [1,] 0.845 -27.8746516
 [2,] 0.850 -25.3429368
 [3,] 0.855   0.1786487
 [4,] 0.860   0.8759817
> plus.min(betas38$qbo)
 [1,] 0.830 -10.178716
 [2,] 0.835  -2.834392
 [3,] 0.840   6.341632
 [4,] 0.845  13.612719
> plus.min(betas39$qbo)
 [1,] 0.750 -1.9586266
 [2,] 0.755 -0.8517022
 [3,] 0.760  3.9507744
 [4,] 0.765  8.0160644
> plus.min(betas40$qbo)
      [,1]       [,2]
[1,] 0.930 -14.190735
[2,] 0.935 -10.538777
[3,] 0.940   1.695764
[4,] 0.945   9.452612
> plus.min(betas41$qbo)
 [1,] 0.890  -9.062513
 [2,] 0.895  -2.428902
 [3,] 0.900   9.415924
 [4,] 0.905  11.632548
> plus.min(betas42$qbo)
 [1,] 0.845 -3.8066380
 [2,] 0.850 -3.1942437
 [3,] 0.855  0.2598791
 [4,] 0.860  2.6639822
```

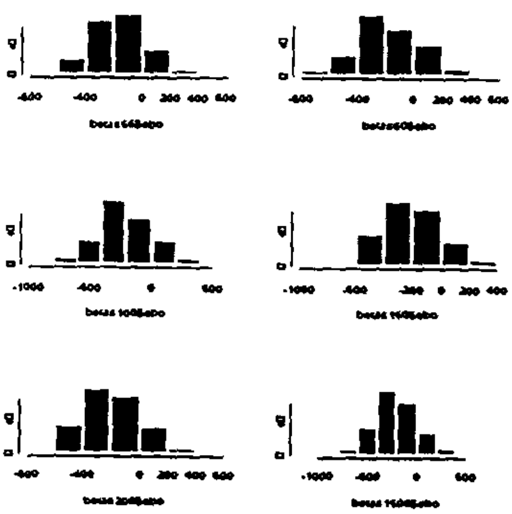
```
> plus.min(betas43$qbo)
 [1,] 0.825 -6.044270
[2,] 0.830 -3.244028
[3,] 0.835  3.923554
[4,] 0.840  6.204991
> plus.min(betas44$qbo)
 [1,] 0.860 -6.892683
[2,] 0.865 -5.750943
[3,] 0.870  2.716900
[4,] 0.875  3.355562
> plus.min(betas45$qbo)
 [1,] 0.845 -8.5432389
[2,] 0.850 -4.5906611
[3,] 0.855  0.1145314
[4,] 0.860  1.5275092
> plus.min(betas46$qbo)
 [1,] 0.850  -7.8018973
[2,] 0.855  -0.5095389
[3,] 0.860   9.7821328
[4,] 0.865  17.8619602
> plus.min(betas47$qbo)
 [1,] 0.850 -7.2168648
[2,] 0.855 -0.6985676
[3,] 0.860  4.1626280
[4,] 0.865  4.7845769
> plus.min(betas48$qbo)
 [1,] 0.830 -11.567712
[2,] 0.835  -7.386949
[3,] 0.840   1.434281
[4,] 0.845   9.842945
> plus.min(betas49$qbo)
 [1,] 0.865 -17.910311
[2,] 0.870  -8.631564
[3,] 0.875   2.188806
[4,] 0.880   3.166266
> plus.min(betas50$qbo)
 [1,] 0.920 -6.509373
[2,] 0.925 -3.814313
[3,] 0.930  2.509278
[4,] 0.935  9.976725
> plus.min(betas51$qbo)
 [1,] 0.825  -7.909328
[2,] 0.830  -2.168849
[3,] 0.835   5.270518
[4,] 0.840  13.805809
> plus.min(betas55$qbo)
 [1,] 0.800 -2.960185
[2,] 0.805 -1.841191
[3,] 0.810  1.806618
[4,] 0.815  7.553955
> plus.min(betas60$qbo)
 [1,] 0.765 -6.177296
[2,] 0.770 -3.433159
```

```
[3,] 0.775  1.380512
[4,] 0.780  3.752825
> plus.min(betas100$qbo)
 [1,] 0.815  -6.572501
[2,] 0.820  -1.859668
[3,] 0.825   6.519341
[4,] 0.830  10.897669
> plus.min(betas150$qbo)
 [1,] 0.840 -11.595467
[2,] 0.845  -2.230320
[3,] 0.850   6.197727
[4,] 0.855  16.429377
> plus.min(betas200$qbo)
 [1,] 0.825 -8.2432541
[2,] 0.830 -0.3802027
[3,] 0.835  2.0754452
[4,] 0.840  6.4827785
> plus.min(betas1500$qbo)
 [1,] 0.835 -6.587695
[2,] 0.840 -2.325259
[3,] 0.845  1.544009
[4,] 0.850  6.442937
```









LAMPIRAN 7. Hasil keseluruhan quantile dari bo untuk data Cabezon dan histogramnya.

```
> plus.min(quantile(sort(betae25$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.150 -0.18221849
[2,] 0.155 -0.08543836
[3,] 0.160  0.04253821
[4,] 0.165  0.06115754
> plus.min(quantile(sort(betae50$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.165 -0.30913012
[2,] 0.170 -0.01839206
[3,] 0.175  0.33387019
[4,] 0.180  0.61246082
> plus.min(quantile(sort(betae75$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.115 -0.9235696
[2,] 0.120 -0.2107510
[3,] 0.125  0.2718074
[4,] 0.130  0.6715011
> plus.min(quantile(sort(betae100$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.235 -0.3648054
[2,] 0.240 -0.1485315
[3,] 0.245  0.3232848
[4,] 0.250  0.4017105
> plus.min(quantile(sort(betae125$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.110 -0.7602509
[2,] 0.115 -0.4618047
[3,] 0.120  0.4599858
[4,] 0.125  1.3167568
> plus.min(quantile(sort(betae150$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.155 -0.23898913
[2,] 0.160 -0.06113196
[3,] 0.165  0.12796757
[4,] 0.170  0.27452050
> plus.min(quantile(sort(betae175$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.115 -0.4946945
[2,] 0.120 -0.1619757
[3,] 0.125  0.2820360
[4,] 0.130  0.6682630
> plus.min(quantile(sort(betae200$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.120 -0.82487111
[2,] 0.125 -0.56502636
[3,] 0.130  0.03900185
[4,] 0.135  0.51171072
> plus.min(quantile(sort(betae250$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.125 -0.58069802
[2,] 0.130 -0.37097722
[3,] 0.135  0.01705834
[4,] 0.140  0.31358832
> plus.min(quantile(sort(betae300$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.120 -0.35721493
[2,] 0.125 -0.19230769
```

```
[3,] 0.130  0.02997465
[4,] 0.135  0.30546200
> plus.min(quantile(sort(betae500$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.130 -0.32467797
[2,] 0.135 -0.01527396
[3,] 0.140  0.26111255
[4,] 0.145  0.64867668
> plus.min(quantile(sort(betae550$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.110 -0.64557677
[2,] 0.115 -0.21780330
[3,] 0.120  0.01511971
[4,] 0.125  0.25179591
> plus.min(quantile(sort(betae575$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.100 -0.609094246
[2,] 0.105 -0.244344737
[3,] 0.110  0.009647189
[4,] 0.115  0.274557182
> plus.min(quantile(sort(betae580$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.130 -0.3350996
[2,] 0.135 -0.1082803
[3,] 0.140  0.2972820
[4,] 0.145  0.4844434
> plus.min(quantile(sort(betae600$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.105 -0.62235306
[2,] 0.110 -0.26833269
[3,] 0.115  0.07102605
[4,] 0.120  0.31359358
> plus.min(quantile(sort(betae650$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.130 -0.23527797
[2,] 0.135 -0.02654867
[3,] 0.140  0.31836472
[4,] 0.145  0.57147184
> plus.min(quantile(sort(betae700$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.120 -0.378936844
[2,] 0.125 -0.008733579
[3,] 0.130  0.181818182
[4,] 0.135  0.471658644
> plus.min(quantile(sort(betae800$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.105 -0.72217961
[2,] 0.110 -0.39577593
[3,] 0.115  0.02011859
[4,] 0.120  0.36104566
> plus.min(quantile(sort(betae900$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.110 -0.4159064
[2,] 0.115 -0.1461784
[3,] 0.120  0.1957343
[4,] 0.125  0.4380383
> plus.min(quantile(sort(betae1000$bnol),seq(0,1,.005)))
 [1,] 0.120 -0.4414383
[2,] 0.125 -0.2149762
[3,] 0.130  0.1293620
[4,] 0.135  0.3824895
> plus.min(quantile(sort(betae2000$bnol),seq(0,1,.005)))
```

```
 [1,] 0.115 -0.4925706
[2,] 0.120 -0.1737618
[3,] 0.125  0.1428172
[4,] 0.130  0.5289796
```