LAPORAN PENELITIAN
DIK SUPLEMEN UNIVERSITAS AIRLANGGA
TAHUN ANGGARAN 2001

INFERENSI BAYESIAN TERHADAP PARAMETER DISTRIBUSI TAHAN HIDUP EKSPONENSIAL TERSENSOR TYPE II

Peneliti:

Drs. ARDI KURNIAWAN, M.Si.
Drs. EKO WURYANTO, DEA
Ir. DYAH HERAWATI, M.Si.

LEMBAGA PENELITIAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

Dibiayai oleh Dana DIK Suplemen Universitas Airlangga Tahun 2001
S.K Rektor Universitas Airlangga Nomor 5306/J03/PG/2001
Tanggal 12 Juni 2001
Nomor Urut: 32

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA

Desember, 2001

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS AIRLANGGA
LEMBAGA PENELITIAN

1. Puslit Pembangunan Regional
2. Puslit Obat Tradisional
3. Puslit Pengembangan Hukum (5923584)
4. Puslit Lingkungan Hidup (5995718)
5. Puslit Pengembangan Gizi (5995720)
6. Puslit/Studi Wanita (5995722)
7. Puslit Olah Raga
8. Puslit Bioenergi
9. Puslit Kependudukan dan Pembangunan (5995719)
10. Puslit/ Kesehatan Reproduksi

Kampus C Unair, Jl. Mulyorejo Surabaya 60115 Telp. (031) 5995246, 5995248, 5995247 Fax. (031) 5962066
E-mail : lpunair@rad.net.id - http://www.geocities.com/Athens/Olympus/6223

IDENTITAS DAN PENGESAHAN
LAPORAN AKHIR HASIL PENELITIAN

1. Judul Penelitian	: Inferensi Bayesian Terhadap Parameter Distribusi Tahan Hidup Eksponensial Tersensor Type II
a. Macam Penelitian	: [V] Fundamental [ ] Terapan [ ] Pengembangan
b. Kategori Penelitian	: [V] I [ ] II [ ] III
2. Kepala Poyek Penelitian	
a. Nama lengkap dan Gelar	: Drs. Ardi Kurniawan, M.Si.
b. Jenis kelamin	: Laki-Laki
c. Pangkat/Golongan dan NIP	: Penata Muda/Gol.IIIa/132 230 977
d. Jabatan Sekarang	: Staf Pengajar
e. Fakultas/Puslit/Jurusan	: FMIPA
f. Univ/Ins./Akademi	: Universitas Airlangga
g. Bidang Ilmu yang diteliti	: Statistik Terapan
3. Jumlah Tim Peneliti	: 3 (tiga) orang
4. Lokasi Penelitian	: Fakultas MIPA Unair
5. Kerjasama dengan Instansi lain	
a. Nama Instansi	: -
b. Alamat	: -
6. Jangka waktu penelitian	: 5 (lima) bulan
7. Biaya yang diperlukan	: Rp. 3.000.000,00
8. Seminar Hasil Penelitian	
a. Dilaksanakan Tanggal	: 10 Desember 2001
b. Hasil Penelitian	: ( ) Baik Sekali (V) Baik ( ) Sedang ( ) Kurang

Surabaya, 10 Desember 2001

Mengetahui/Mengesahkan
a.n. Rektor
Ketua Lembaga Penelitian,

Prof. Dr. H. Sarmanu, M.S.
NIP 130 701125

RINGKASAN

INFERENSI BAYESIAN TERHADAP PARAMETER DISTRIBUSI TAHAN HIDUP EKSPONENSIAL TERSENSOR TYPE II (Ardi Kurniawan, Eto Wuryanto, Dyah Herawatie, 2002, 23 Halaman)

Analisis statistik terhadap data tahan hidup telah banyak dikembangkan di bidang teknik dan kedokteran. Berdasarkan data tahan hidup nantinya dilakukan uji hidup. Dengan demikian uji hidup dapat dipandang sebagai penyelidikan eksperimental tentang panjang / tahan hidup atau karakteristik penampilan lain dari suatu benda atau unit (komponen / sistem) di bawah kondisi operasi tertentu.

Salah satu pola pengujian data tahan hidup adalah pengujian waktu. Jika semua unit eksperimen diobservasi sampai semuanya mati, maka diperoleh sampel lengkap. Akan tetapi jika hanya sebagian unit eksperimen yang dioperasikan sampai mati, maka diperoleh sampel tersensor. Salah satu bentuk sampel tersensor adalah sampel tersensor type II. Menurut Lawless (1982), sampel tersensor type II merupakan pengamatan terhadap r sampel yang mempunyai ketahanan hidup terkecil dari n sampel acak yang diambil. Alasan utama penggunaan sampel tersensor adalah penghematan waktu dan biaya.

Setelah mengambil sampel acak yang diinginkan , biasanya ditentukan jenis distribusi yang mendasari sampel acak tersebut. Salah satu jenis distribusi yang sering digunakan dan mempunyai peranan yang sangat penting pada penelitian data tahan hidup adalah *distribusi eksponensial* yang berbentuk

$$f(x|\theta) = (1/\theta)\exp(-x/\theta) \quad , \quad x > 0 \text{ dan } \theta > 0$$

dengan θ merupakan parameter distribusi eksponensial.

Secara umum permasalahan pada penelitian ini adalah : "Bagaimanakah inferensi statistik, khususnya secara Bayesian, terhadap parameter (θ) distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II ?". Sedangkan Tujuan dari penelitian ini secara umum untuk menjawab permasalahan penelitian, yaitu untuk mendapatkan inferensi bayesian terhadap parameter (θ) distribusi tahan

hidup eksponensial tersensor type II. Inferensi statistik yang dilakukan mengarah pada : (1) untuk memperoleh estimator bayes dari θ, (2) untuk mendapatkan selang kepercayaan dari θ, dan (3) untuk pengujian hipotesis terhadap nilai θ.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian adalah sebagai berikut :
(1) menentukan distribusi tahan hidup bersama sampel tersensor type II yang didasarkan atas sampel acak berdistribusi eksponensial, (2) menentukan statistik cukup distribusi tahan hidup bersama sampel acak tersensor type II yang diperoleh pada langkah-1, (3) menentukan distribusi statistik cukup yang diperoleh pada langkah-2, (4) menentukan distribusi prior dari distribusi fungsi statistik cukup, (5) menentukan distribusi posterior statistik cukup, (6) menentukan estimator Bayes, (7) pengestimasian selang kepercayaan, dan (8) menentukan cara pengujian hipotesa.

Berdasarkan penelitian diperoleh hasil, bahwa distribusi posterior untuk θ yaitu distribusi Gamma Terbalik. Sehingga, jika digunakan fungsi kerugian kuadratik, maka estimator bayes dari θ merupakan mean distribusi Gamma Terbalik yang diperoleh. Nantinya Selang Kepercayaan dan Uji Hipotesis bagi θ didasarkan pada distribusi Chi Kuadrat.

Hasil penelitian ini nantinya bisa digunakan untuk mengolah data yang dibangkitkan oleh distribusi eksponensial , sedangkan pengembangan lebih lanjutnya dapat diarahkan pada pemakaian jenis distribusi prior yang lainnya.

(Penelitian ini dibiayai oleh Dik Suplemen dengan SK Rektor Nomor : 5306/JO3/PG/2001)

KATA PENGANTAR

ssalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

gala puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah Subhanahu Wata'ala yang telah
emberikan karunia-Nya, sehingga kami dapat menyelesaikan laporan penelitian kami yang
rjudul :

nferensi Bayesian terhadap Parameter Distribusi Tahan Hidup Eksponensial Tersensor Type II"

Pada kesempatan ini tak lupa kami ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah
embantu terselesaikannya laporan penelitian ini.

Kami menyadari, bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna, maka pada kesempatan
kami tak lupa mengharap saran dan kritik yang membangun dari semua pihak demi perbaikan
laporan penelitian ini.

Dan pada akhirnya kami berharap, semoga laporan penelitian ini berguna bagi
ngembangan ilmu, khususnya statistika, dan berguna juga bagi pihak-pihak yang
merlukannya.

ssalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Surabaya, · Februari 2002

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang Permasalahan

Analisis statistik terhadap data uji hidup telah banyak dikembangkan di bidang teknik dan kedokteran. Secara matematik tahan hidup dipandang sebagai variabel random non negatif. Variabel random tersebut dapat berupa waktu kerusakan fisik suatu komponen (dalam bidang teknik) atau kematian suatu unit (dalam bidang kedokteran) ataupun berupa karakteristik lain. Berdasarkan data tahan hidup ini dilakukan uji hidup. Dengan demikian uji hidup dapat dipandang sebagai penyelidikan eksperimental tentang panjang / tahan hidup atau karakteristik penampilan lain dari suatu benda atau unit (komponen / sistem) di bawah kondisi operasi tertentu.

Setelah ditentukan model distribusi tahan hidup, persoalan data tahan hidup biasanya adalah inferensi terhadap model distribusi yang dipilih. Inferensi terhadap model distribusi ini sangat dipengaruhi oleh pola pengujian dan jenis data. Salah satu pola pengujian adalah pengujian waktu dimana observasi dilakukan terhadap waktu hidup sebagian atau semua unit eksperimen. Jika semua unit eksperimen dioperasikan sampai semuanya mati, maka diperoleh sampel lengkap. Tetapi jika hanya sebagian unit eksperimen yang dioperasikan sampai mati, maka diperoleh sampel tersensor. Alasan utama penggunaan sampel tersensor adalah penghematan waktu dan biaya.

Salah satu bentuk sampel tersensor adalah sampel tersensor type II. Menurut Lawless (1982), sampel tersensor type II merupakan pengamatan terhadap r sampel yang mempunyai ketahanan hidup terkecil dari n sampel acak yang diambil. Dengan demikian misalkan X_1 , X_2 , … , X_n daya tahan hidup dari n sampel yang sudah terurut dari yang

terkecil sampai dengan yang terbesar, maka r sampel yang mempunyai ketahanan hidup terkecil, yaitu $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_r$. Pada penyensoran type II nilai r harus ditetapkan terlebih dahulu dan nilai tersebut berkisar antara $1 \leq r \leq n$.

Sampel acak X_1 , X_2 , ... , X_n tentu saja akan didasarkan pada suatu jenis distribusi. Salah satu jenis distribusi yang sering digunakan dan mempunyai peranan yang sangat penting pada penelitian data tahan hidup adalah *distribusi eksponensial* yang berbentuk

$$f(x|\theta) = (1/\theta)\exp(-x/\theta) \qquad , \qquad x > 0 \text{ dan } \theta > 0$$

dengan θ merupakan parameter distribusi eksponensial.

Di dalam penelitian, persoalan yang sering timbul adalah penentuan harga θ. Khusus untuk sampel eksponensial tersensor type II, inferensi statistik telah dilakukan oleh beberapa ahli diantaranya Lawless (1982) dan Mann (1974) . Mereka melakukan inferensi statistik terhadap parameter θ secara non Bayesian. Ini berarti di dalam melakukan inferensi, parameter θ tidak didasarkan pada suatu distribusi tertentu (distribusi prior).

Dari kenyataan ini muncul keinginan dari kami untuk lebih mengembangkan penelitian tersebut, yaitu dengan mencoba meneliti, bagaimana apabila inferensi statistik yang dilakukan didasarkan atas metode Bayesian, yaitu suatu cara untuk melakukan inferensi di mana parameter yang diteliti didasarkan atas distribusi tertentu.

Pada penelitian ini, penulis melakukan inferensi secara Bayesian terhadap sampel acak yang dibangkitkan oleh distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II.

I.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan Latar Belakang Permasalahan di atas, permasalahan dirumuskan sebagai berikut.

a. Bagaimanakah Inferensi Bayesian terhadap parameter distribusi eksponensial tersensor type II ?
b. Bagaimanakah penerapan penggunaan hasil yang diperoleh dari Inferensi Bayesian terhadap parameter distribusi eksponensial tersensor type II ?

Inferensi statistik yang dilakukan meliputi :

a. penentuan estimator Bayes parameter distribusi tahan hidup eksponensial tersensor Type II,
b. pengestimasian selang kepercayaan,
c. uji hipotesa.

I.3. Tujuan Penelitian

Secara umum tujuan dari penelitian ini adalah ingin mendapatkan inferensi Bayesian terhadap parameter distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II serta mengetahui penerapannya untuk suatu masalah.

1.4. Manfaat Penelitian

1. Bagi peneliti akan bermanfaat lebih memperkuat struktur kognitif tentang teori analisis data uji hidup.
2. Hasil penelitian yang diperoleh dapat diterapkan pada bidang ilmu yang lain.
3. Informasi yang dihasilkan dalam penelitian ini akan membuka peluang diadakannya penelitian lebih lanjut.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Inferensi Bayesian

Inferensi statistik merupakan proses pengambilan keputusan (generalisasi) dari suatu sampel tertentu, yakni dari suatu himpunan n observasi untuk suatu populasi dari mana sampel itu diambil. Inferensi statistik dapat dilakukan secara *Klasik* dan *Bayesian*. Pendekatan Klasik mendasarkan inferensi atas dasar informasi yang diperoleh dari sampel random, sedangkan pendekatan Bayes mendasarkan inferensi atas dasar penggabungan informasi yang diperoleh dari sampel dan pengetahuan subyektif mengenai distribusi peluang yang digunakan.

Pendekatan Bayesian secara fundamental berbeda dengan pendekatan Klasik. Pendekatan Klasik memandang θ sebagai besaran yang tidak diketahui, akan tetapi pendekatan Bayesian memandang θ sebagai besaran yang variasinya dapat digambarkan dengan distribusi probabilitas (disebut distribusi probabilitas prior). Distribusi probabilitas ini disebut sebagai distribusi probabilitas subyektif, yaitu distribusi yang didasarkan pada keyakinan seseorang dan dirumuskan sebelum data diambil. Distribusi prior yang disesuaikan dengan informasi sampel disebut distribusi posterior. Secara umum distribusi posterior dirumuskan oleh Engelhardt (1992) seperti di bawah ini

$$f_{\theta|x}(\theta) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)\ p(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)\ p(\theta)\ d\theta}$$

Distribusi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)$ dan $p(\theta)$ masing-masing disebut sebagai fungsi likelihood dan distribusi prior dari θ. Dengan demikian dapat dituliskan, bahwa

$$DistribusiPosterior = \frac{(Likelihood)\,(Distribusi\ \mathrm{Prior})}{\int (Likelihood)\,(Distribusi\ \mathrm{Prior})}$$

Teorema :

Jika T adalah statistik cukup untuk θ dengan distribusi probabilitas f(t) dan $p(\theta)$ distribusi prior untuk θ, maka distribusi posterior θ sama dengan :

$$\tau(\theta \mid t) = \frac{f(t)\,p(\theta)}{\int f(t)\,p(\theta)\,d\theta}$$

Estimator Bayes (disimbolkan $\hat{\theta}$) merupakan suatu estimator yang meminimumkan nilai harapan fungsi kerugian $L(\hat{\theta}\,;\theta)$ relatif terhadap distribusi posterior $\theta|\mathbf{x}$. Jika digunakan fungsi kerugian kuadratik, $L(\hat{\theta}\,;\theta) = (\hat{\theta} - \tau(\theta))^2$, maka estimator Bayes untuk $\tau(\theta)$ dirumuskan dengan $\hat{\theta} = \int \tau(\theta)\, f_{\theta|x}(\theta)\, d\theta$.

2.2. Distribusi Gamma

Definisi : (Guritno, 1997)

Suatu variabel random X dikatakan berdistribusi Gamma, ditulis $X \sim G(\alpha, \beta)$, jika

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \qquad , \qquad x > 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema : (Guritno, 1997)

Jika $X \sim G(\alpha, \beta)$, maka mempunyai :

a. Rata-rata $\mu_X = \alpha \beta$

b. Variansi $\sigma_X^2 = \alpha \beta^2$

c. Fungsi Pembangkit Momen $M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$, $t < 1/\beta$ ■

Definisi : (Guritno, 1997)

Suatu Variabel Random X dikatakan berdistribusi Chi Square dengan derajat bebas r, dituliskan $X \sim \chi^2(r)$, jika :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)2^r} x^{r-1} e^{-x/2} \quad , \quad x > 0$$ ■

Teorema : (Guritno, 1997)

Jika $X \sim \chi^2(r)$, maka $M_X(t) = (1 - 2t)^{-r/2}$ $(t < ½)$ ■

Teorema : (Bain , 1992)

Jika $X \sim G(\alpha, \beta)$ dan $Y = \dfrac{2X}{\beta}$, maka $Y \sim \chi^2(2r)$.

Bukti :

$$M_Y(t) = M_{2X/\beta}(t)$$

$$= M_X(2t / \beta)$$

$$= (1 - \beta (2t / \beta))^{-r}$$

$$= (1 - 2t)^{-2r/2}$$

Fungsi Pembangkit Momen dari Y = $\frac{2X}{\beta}$ merupakan Fungsi Pembangkit Momen distribusi distribusi Chi Square dengan derajat bebas 2r. Jadi dapat disimpulkan bahwa Y ~ $\chi^2(2r)$. ■

Definisi : (Mann, 1974)

Suatu variabel random X dikatakan berdistribusi Gamma Terbalik, ditulis X ~ INVG(α , β), jika

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} e^{-1/\beta x} \qquad , \qquad x > 0$$ ■

2.2. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan salah satu jenis distribusi yang merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma. Jika variabel random X ~ G(α , β) , maka distribusi eksponensial diturunkan dengan mengambil α = 1. Secara lengkap distribusi Eksponensial diberikan pada definisi berikut.

Definisi : (Bain, 1992)

Suatu variabel random X dikatakan berdistribusi Eksponensial, ditulis X ~ EXP(Θ) , jika

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \qquad , \qquad x > 0$$ ■

Teorema : (Guritno, 1997)

Jika $X \sim EXP(\theta)$, maka :

a. Rata-rata $\mu_X = \theta$

b. Variansi $\sigma_X^2 = \theta^2$

c. Fungsi Pembangkit Momen $M_X(t) = (1 - \theta t)^{-1}$, $t < 1/\theta$ ■

2.3. Type Sampel Tersensor

Untuk mendapatkan data uji hidup biasanya orang melakukan eksperimen. Dalam eksperimen ada beberapa metode yang dapat dilakukan sehingga macam data yang dihasilkan juga berbeda dari satu metode ke metode lain.

Yang membedakan analisa uji hidup dari bidang-bidang statistik lainnya adalah penyensoran. Beberapa type penyensoran dalam analisa data uji hidup, yaitu : (....., 1995)

a. Sampel Lengkap

   Dalam uji sampel lengkap ini eksperimen akan dihentikan jika semua komponen yang diuji telah mati atau gagal.

b. Sampel Tersensor Type I

   Dalam sensor type I eksperimen akan dihentikan jika telah dicapai waktu tertentu (waktu penyensoran).

c. Sampel Tersensor Type II

   Suatu sampel dikatakan tersensor type II apabila eksperimen dihentikan setelah kegagalan ke-r telah diperoleh.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1. Materi Penelitian :

Materi penelitian berhubungan dengan teori inferensi statistika, khususnya bayesian, yang dikenakan terhadap distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II.

3.2. Alat dan Obyek Penelitian :

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur. Yang menjadi obyek penelitian pada penelitian ini adalah distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II.

3.3. Langkah Penelitian :

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. menentukan distribusi tahan hidup bersama sampel tersensor type II yang didasarkan atas sampel acak berdistribusi eksponensial,

b. menentukan statistik cukup distribusi tahan hidup bersama sampel acak tersensor type II yang diperoleh pada langkah-1,

c. menentukan distribusi statistik cukup yang diperoleh pada langkah-2

d. menentukan distribusi prior dari distribusi fungsi statistik cukup,

e. menentukan distribusi posterior statistik cukup,

f. menentukan estimator Bayes,

g. pengestimasian selang kepercayaan, dan

h. menentukan cara pengujian hipotesa.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan T_1 , T_2 , ... , T_n sampel-sampel random untuk waktu hidup n benda yang dibangkitkan oleh distribusi eksponensial dengan parameter θ atau dapat dituliskan sebagai :

$$f(t_i | \theta) = (1/\theta)\exp(-t_i/\theta) \quad , \quad t > 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Dengan mengurutkan n waktu hidup sampel-sampel random tersebut, maka akan diperoleh waktu hidup r terurut pertama yaitu :

$$T_1 \le T_2 \le \ldots\ldots \le T_r \quad , \quad r \le n$$

Fungsi distribusi probabilitas bersama untuk T_1, T_2, ... , T_r adalah

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)\, t_r}{\theta}\right].$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{K}{\theta}\right]$$

dengan : $K = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r$

Sehingga fungsi *likelihood* didasarkan pada sampel tersensor type II adalah :

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{K}{\theta}\right]$$

Berdasarkan Teorema Faktorisasi Neyman, maka *statistik cukup* untuk θ yaitu K.

4.1. Distribusi K

Berikut akan diuraikan bentuk dari distribusi K.

Misalkan :

$W_1 = n\, t_1$

$W_2 = (n - 2 + 1)\,(t_2 - t_1)$

$W_3 = (n - 3 + 1)\,(t_3 - t_2)$

....

$W_r = (n - r + 1)\,(t_r - t_{r-1})$

maka $K = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n - r)t_r$ dapat dinyatakan sebagai $K = \sum_{i=1}^{r} W_i$

Untuk mendapatkan Jacobian (J), terlebih dahulu akan diturunkan nilai-nilai W_i terhadap t_i (i = 1, 2, ... , r)

$\partial W_1 / \partial t_1 = n$, $\partial W_2 / \partial t_j = 0$ (j = 2, 3, ... , r)

$\partial W_2 / \partial t_1 = 1 - n$, $\partial W_2 / \partial t_2 = n - 1$, $\partial W_2 / \partial t_j = 0$ (j = 3, 4, ..., r)

$\partial W_3 / \partial t_2 = 2 - n$, $\partial W_3 / \partial t_3 = n - 2$, $\partial W_3 / \partial t_j = 0$ (j = 1, 4, 5, ..., r)

....

$\partial W_r / \partial t_{r-1} = r - 1 - n$, $\partial W_r / \partial t_r = n - r - 1$, $\partial W_r / \partial t_j = 0$ (j = 1, 2, ..., r − 2)

Harga mutlak Jacobian dari turunan-turunan itu adalah

$$|J| = \begin{bmatrix} \partial W_1/\partial t_1 & \partial W_2/\partial t_1 & \ldots\ldots & \partial W_r/\partial t_1 \\ \partial W_1/\partial t_2 & \partial W_2/\partial t_2 & \ldots\ldots & \partial W_r/\partial t_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \partial W_1/\partial t_r & \partial W_2/\partial t_r & \ldots\ldots & \partial W_r/\partial t_r \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Fungsi kepadatan peluang bersama $W_1, W_2, \ldots, W_r$ adalah

$$g(w_1, w_2, \ldots, w_r) = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i}{\theta}\right]\frac{(n-r)!}{r!}$$

$$= \frac{1}{\theta^r}\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i}{\theta}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\theta}\exp\left[-\frac{w_i}{\theta}\right]$$

Jadi $W_1, W_2, \ldots, W_r$ berdistribusi independen dan identik eksponensial dengan parameter θ.

Sebab W_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) berdistribusi Eksponensial dengan parameter θ, maka Fungsi Pembangkit Momen untuk W_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) adalah :

$$M_{W_i}(t) = (1 - \theta t)^{-1} \quad , \quad t < \frac{1}{\theta}$$

Dengan demikian jika $W_1, W_2, \ldots, W_n$ saling independen, maka fungsi pembangkit momen $K = \sum_{i=1}^{r} W_i$ adalah :

$$M_K(t) = \prod_{i=1}^{r} W_i$$

$$= (1 - \theta t)^{-r} \quad , \quad t < \frac{1}{\theta}$$

Melihat Fungsi Pembangkit Momen K dapatlah disimpulkan, bahwa K berdistribusi Gamma. Bentuk distribusi K secara lengkap dapat dituliskan dengan :

$$f(k) = \frac{1}{\Gamma(r)\,\theta^{r}}\, k^{r-1}\, e^{-\frac{k}{\theta}} \qquad , \qquad k > 0$$

4.2 Estimator Bayes

Untuk mendapatkan estimator Bayes parameter distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type II, harus dicari terlebih dahulu bentuk distribusi posterior parameternya. Bentuk distribusi posterior ini nantinya akan sangat dipengaruhi oleh bentuk distribusi prior yang diberikan. Oleh karena tidak ada informasi yang memadai untuk distribusi prior parameter θ, maka digunakan Distribusi Prior Non Informatif. Menurut Box & Tiao (1974), Distribusi Prior Non Informatif untuk θ yang cocok dengan kondisi di atas adalah

$$\pi(\theta) \propto (1/\theta) \qquad , \qquad \theta > 0$$

Distribusi posterior θ dirumuskan dengan

$$\tau(\theta \mid k) = \frac{\pi(\theta)\, f(k)}{\int_0^{\infty} \pi(\theta) f(k)\, d\theta}$$

Oleh karena $\int_0^{\infty} \pi(\theta)\, f(k)\, d\theta$ tidak tergatung pada θ, maka $\tau(\theta \mid K)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\tau(\theta \mid k) \propto \pi(\theta)\ f(k)$$

Dengan menggunakan kesebandingan, maka diperoleh

$$\tau(\theta \mid k) \propto \frac{1}{\theta}\frac{1}{\theta^{r}\,\Gamma(r)}\,k^{r-1}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right)$$

$$\propto \frac{1}{\theta^{r+1}}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right)$$

sehingga

$$\tau(\theta \mid k) = \frac{k^{r}}{\Gamma(r)\,\theta^{r+1}}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right) \qquad , \theta > 0 \ , \ k > 0$$

yang merupakan bentuk distribusi Gamma Terbalik.

Hasil distribusi posterior untuk θ di atas dapat dituliskan sebagai :

$$\theta_{*} = \theta \mid k \sim \mathrm{INVG}(r\ ,\ 1/k)$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi kerugian kuadratik, estimator Bayes untuk θ

yaitu :

$$\hat{\theta} = \int_{0}^{\infty} \theta\ \tau(\theta \mid k)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\infty} \theta \frac{k^{r}}{\Gamma(r)\,\theta^{r+1}}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{k^{r}}{\Gamma(r)\,\theta^{r}}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{k}{r-1}\int_{0}^{\infty} \frac{k^{r-1}}{\Gamma(r-1)\,\theta^{(r-1)+1}}\exp\left(-\frac{k}{\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{k}{r-1}$$

Oleh karena $K = \sum_{i=1}^{r} W_i = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r$ maka dapat dinyatakan pula bahwa estimator Bayes untuk θ adalah

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_r + (n-r)t_r}{r-1}$$

4.3. Selang Kepercayaan θ*

Untuk mencari selang kepercayaan bagi θ* akan dibuktikan terlebih dahulu pernyataan di bawah ini :

" Jika θ* ~ INVG(r , 1/k), maka Y = 1/θ* ~ G(r , 1/k)"

Bukti :

Jacobian $J = d\theta_* / dY = -1 / Y^2$, maka $|J| = 1 / Y^2$

Distribusi dari Y adalah

$$g(y) = \frac{k^r}{\Gamma(r)} y^{r+1} \exp(-ky)\, y^{-2}$$

$$= \frac{k^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} \exp(-ky) \qquad , \qquad y > 0$$

Jadi dapat disimpulkan, bahwa Y = 1 / θ* ~ G(r , 1/k) ■

Sebab jika $Y = 1/\theta_* \sim G(r, 1/k)$ maka $\frac{2k}{\theta_*} \sim \chi^2(2r)$, sehingga selang kepercayaan $1 - \alpha$ untuk θ_* adalah :

$$\Pr(\chi^2_{(2r),\ \alpha/2} \le \frac{2k}{\theta_*} \le \chi^2_{(2r),1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

atau

$$\frac{2k}{\chi^2_{(2r),1-\alpha/2}} \le \theta_* \le \frac{2k}{\chi^2_{(2r),\ \alpha/2}}$$

4.4. Uji Hipotesis

Untuk menguji parameter sampel yang dibangkitkan oleh distribusi tahan hidup Eksponensial tersensor type 2 secara Bayesian digunakan statistik uji :

$$\chi^2_{hit} = 2\,k / \theta_*$$

atau

$$\chi^2_{hit} = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r\right)}{\theta_*}$$

Type pengujian statistik ada 3 macam, yaitu :

a. Uji dua arah, yaitu untuk menguji hipotesis

Ho : $\theta_* = c$

melawan

Ha : $\theta_* \neq c$

Jika besar taraf keberartian yang digunakan sebesar α, maka daerah kritis (daerah tolak Ho) yang berhubungan dengan uji ini adalah :

$$\chi^2_{hit} < \chi^2_{(2r);\,\alpha/2} \quad \text{atau} \quad \chi^2_{hit} > \chi^2_{(2r)\,;\,1-\alpha/2}$$

b. Uji satu arah, yaitu untuk menguji hipotesis

Ho : $\theta_* = c$

melawan

Ha : $\theta_* < c$

Jika besar taraf keberartian yang digunakan sebesar α, maka daerah kritis (daerah tolak Ho) yang berhubungan dengan uji ini adalah : $\chi^2_{hit} < \chi^2_{(2r);\ \alpha/2}$

c. Uji satu arah, yaitu untuk menguji hipotesis

$$Ho \quad : \quad \theta_* = c$$

melawan

$$Ha \quad : \quad \theta_* > c$$

Jika besar taraf keberartian yang digunakan sebesar α, maka daerah kritis (daerah tolak Ho) yang berhubungan dengan uji ini adalah : $\chi^2_{hit} > \chi^2_{(2r);\ 1-\alpha/2}$

4.5. Penerapan

Contoh 1 :

Misalkan 8 pengamatan pertama dari 12 sampel acak waktu hidup yang dibangkitkan dari distribusi eksponensial dengan parameter θ adalah : 31, 58, 157, 185, 300, 470, 497, dan 673.

Berdasarkan data nilai n = 12 , r = 8, t_r = 673 dan $\sum_{i=1}^{8} t_i = 2371$.

Selanjutnya nilai penduga parameter θ (dalam hal ini bisa disebut pula sebagai rata-rata populasi) untuk sampel tersensor type II di atas adalah :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_r + (n-r)t_r}{r-1}$$

$$= \{2371 + (12-8)\,673\} / 7$$

$$= 5063 / 7$$

$$= 723{,}29$$

Selanjutnya untuk mencari estimasi selang nilai dari θ ₊ akan digunakan Tabel Chi Square. Andaikan besar kepercayaan untuk selang nilai θ ₊ adalah sebesar 95 %, maka berdasarkan tabel Chi Square dengan derajat bebas 16 diperoleh nilai : $\chi^2_{0,025\,;\,(16)} = 6{,}91$ dan $\chi^2_{0,975\,;\,(16)} = 28,\ 85$. Dari sini selang kepercayaan 95 % untuk θ ₊ adalah :

$$\frac{2K}{\chi^2_{(2r),1-\alpha/2}} \le \theta_* \le \frac{2K}{\chi^2_{(2r),\,\alpha/2}}$$

$$\approx \qquad \frac{2.5063}{28,85} \leq \theta_{*} \leq \frac{2.5063}{6,91}$$

$$\approx \qquad 350,99 \leq \theta_{*} \leq 1465,41$$

Contoh 2 :

Misalkan 5 waktu hidup pertama (dalam minggu) dari 10 AC merk "X" yang terdapat pada suatu kantor adalah 21, 27, 29, 31, dan 35. Jika perusahaan pembuat AC merk "X" tersebut menyatakan bahwa AC yang dihasilkan mempunyai kemampuan rata-rata 30 minggu dan diasumsikan pula bahwa waktu hidup AC yang diproduksi oleh perusahaan itu dibangkitkan oleh distribusi eksponensial, ujilah pernyataan pembuat AC tersebut. (Gunakan Taraf Nyata 5%)

Jawab :

Hipotesis yang akan diuji adalah :

Ho : θ_{*} = 30 Minggu melawan

Ha : $\theta_{*} \neq$ 30 Minggu

Statistik Uji : $\chi^2_{hit} = \dfrac{2\left(\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r\right)}{\theta_{*}}$

$= 2\,(143 + 175)\,/\,30$

$= 21,2$

Daerah kritis : $\chi^2_{hit} < 3,247$ atau $\chi^2_{hit} > 20,483$

Kesimpulan : Ho ditolak

Jadi rata-rata daya hidup AC merk "X" tidak 30 minggu.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan :

a. Estimator Bayes distribusi eksponensial tersensor type dua adalah :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_r + (n-r)t_r}{r-1}$$

b. Parameter distribusi tahan hidup eksponensial tersensor type 2 dengan memakai distribusi prior Non Informati akan mempunyai distribusi posterior Gamma Terbalik.

c. Selang kepercayaan (1- α) 100% untuk parameter distribusi eksponensial tersensor type dua adalah :

$$\frac{2k}{\chi^2_{(2r),1-\alpha/2}} \leq \theta_* \leq \frac{2k}{\chi^2_{(2r),\alpha/2}}$$

dengan $k = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r$.

d. Pengujian hipotesis untuk parameter didasarkan pada distribusi Chi Square dan statistik uji $\chi^2_{hit} = 2k / \theta_*$.

5.2. Saran

1. Untuk mencari estimator Bayes dapat juga digunakan distribusi prior yang sekawan dengan distribusi eksponensial.

2. Untuk penelitian lebih lanjut inferensi statistik ini dapat juga dikembangkan dengan meneliti rasio dua parameter distribusi eksponensial atau meneliti parameter distribusi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Engelhardt, Bain. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press. California.

Guritno. S. 1997. Hand Out : Pengantar Statistika Matematika I. Yogyakarta.

Lawless. JF. 1982. *Statistical Models and Methods for Life Time Data*. John Wiley and Sons Inc. Canada.

Mann NR., Schafer RE., and Singpurwalla ND. 1974. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley and Sons Inc. Canada.

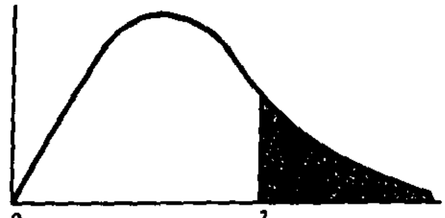
Tiao G.C. and Box G.E.P. 1973. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison Wesley. Philippines.

Walpole. RE. 1993. *Pengantar Statistika Edisi* . Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

-------------. 1995. *Hand Out : Analisa Data Uji Hidup*. Yogyakarta.

TABEL

Nilai Kritik Sebaran Khi-Kuadrat



ν	α							
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672