

SKRIPSI

**MODEL PENYEBARAN PENYAKIT PADA PREDATOR PREY DENGAN
RESPON HOLLING TIPE II**

KKC
KK
MPM. 15/17
Wah
m



ARISTA SHERA TRI WAHYUNI

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA
2016**

**MODEL PENYEBARAN PENYAKIT PADA *PREDATOR PREY* DENGAN
RESPON HOLLING TIPE II**

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh
Gelara Sarjana Sains Bidang matematika
Pada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga

Disetujui oleh :

Pembimbing I,



Dr. Fatmawati, M.Si

NIP.19730704 199802 2 001

Pembimbing II,



Dr. Miswanto, M.Si

NIP.19680204 199303 1 002

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : Model Penyebaran Penyakit Pada *Predator Prey* Dengan Respon

Holling Tipe II

Penyusun : Arista Shera Tri Wahyuni

NIM : 081112076

Pembimbing I : Dr. Fatmawati, M.Si

Pembimbing II : Dr. Miswanto, M.Si

Tanggal Seminar : 11 Oktober 2016



Disetujui oleh :

Pembimbing I,

Dr. Fatmawati, M.Si

NIP.19730704 199802 2 001

Pembimbing II,

Dr. Miswanto, M.Si

NIP.19680204 199303 1 002

Mengetahui:

Ketua Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga



NIP.19780126 200604 1 001

Koordinator Program Studi S-1 Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga

Dr. Moh. Imam Utoyo, M.Si.

NIP.19640103 198810 1 001

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penulis dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. **Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.**



SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Arista Shera Tri Wahyuni

NIM : 081112076

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

“Model Penyebaran Penyakit Pada *Predator Prey* Dengan Respon Holling Tipe II”

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 31 Oktober 2016



Arista Shera Tri Wahyuni

NIM. 081112076

KATA PENGANTAR



Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan naskah skripsi ini. Shalawat serta salam semoga tetap tertabur dengan wangi kepada Sang Nabi akhiruzzaman, Muhammad bin Abdillah صلى الله عليه وسلم, juga kepada keluarganya, para sahabat, dan pengikut-pengikutnya beliau yang setia..

Alhamdulillah, penulis dapat menyusun skripsi yang berjudul “Model Penyebaran Penyakit Pada *Predator-Prey* dengan *Respon Holling Tipe II*”. ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam bahagia semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad SAW, pemimpin sekaligus sebaik-baiknya suri tauladan bagi kehidupan umat manusia. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, maka dari itu ucapan terima kasih disampaikan kepada :

1. Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan untuk mendalami ilmu pengetahuan.
2. Departemen Matematika Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan untuk mendalami ilmu pengetahuan.
3. Dr. Eridani, M.Si. selaku dosen wali ketika menjadi mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan arahan, masukan, dan saran.

4. Dr. Fatmawati, M.Si. selaku dosen pembimbing I dan Dr. Miswanto, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, masukan, dan saran kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Kedua orang tua saya yang tercinta, Alm Abdul Wahid dan Dra. Asti Susilaningih, M.Si. serta kakak saya Siwi dan kakak ipar saya Arie, serta ponakan-ponakan saya Archie dan Arziki yang selalu memberikan dukungan, semangat, nasihat, dan doa serta kasih sayangnya.
6. Teman-teman yang menemani dalam mengerjakan skripsi ini, Nurul Hidayah, S.Si, Herlinda Ayunita, S.Si., Rizka Rachmawati, S.Si., Radifa Afidah Syahlani, S.Si., Fajarwati, S.Si., Dwi Veni Yunita Sari, S.Si., Lista Amirhotul Bitahamisyah, S.Si., Ellyza Primatyaningrum, S.Si., dan Brian A.
7. Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang turut memberi bantuan, semangat, dan saran dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa naskah skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan dan jauh dari sempurna sehingga memerlukan perbaikan dan penyempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik demi kesempurnaan naskah skripsi ini sangat penulis harapkan dari semua pihak. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi dunia ilmu pengetahuan.

Surabaya, Oktober 2016

Penulis

Arista Shera Tri Wahyuni, 2016, *Model Penyebaran Penyakit Pada Predator Prey Dengan Respon Holling Tipe II*. Skripsi ini di bawah bimbingan Dr. Fatmawati, M.Si dan Dr. Miswanto, M.Si. Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam sebuah ekosistem, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa (*prey-predator*). Penurunan jumlah *prey* dapat menyebabkan jumlah penurunan *predator* karena tidak adanya *prey*. Tujuan skripsi ini adalah menganalisa model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling Tipe II dengan mempertimbangkan populasi *prey* yang terinfeksi. Berdasarkan analisis model didapatkan empat titik setimbang yaitu, titik setimbang kepunahan E_0 , titik setimbang kepunahan *prey* yang terinfeksi dan kepunahan *predator* E_1 , titik setimbang kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator* E_2 , dan titik setimbang kepunahan *predator* E_3 . Titik setimbang E_0 dan E_2 tidak stabil, sedangkan titik setimbang E_1 dan E_3 stabil asimtotis dengan syarat tertentu. Berdasarkan simulasi numerik, ketika jumlah ketiga spesies eksis maka jumlah *predator* dan *prey* terinfeksi akan meningkat kemudian menurun secara perlahan karena kepunahan *prey* terinfeksi.

Kata kunci : *Predator Prey, Model Matematika, Holling Tipe II, Titik Setimbang, Kestabilan.*



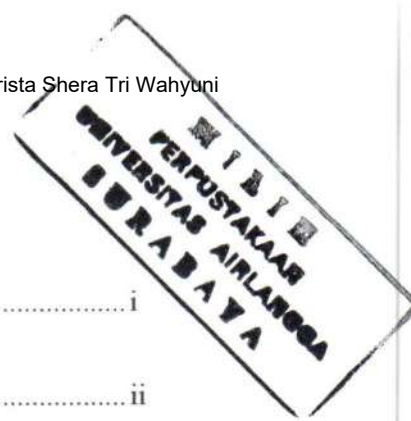
Arista Shera Tri Wahyuni, 2016, *The model of Predator Prey with Holling Type II response*. This undergraduate thesis is supervised by Dr. Fatmawati, M.Si and Dr. Miswanto, M.Si. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

There are many systems of interaction in ecosystem, that one of them is a system of predator-prey interaction. A decrease in the number prey can cause a decrease in the number of predators because there is no prey. The purpose of this thesis is analyzing the model of the spread of disease in predators prey with response holling type II by taking into account the prey population infected. Based on the analysis of the model, it is obtained four equilibriums, these equilibrium of extinction E_0 , equilibrium of infected prey extinction and predator extinction E_1 , equilibrium of susceptible prey extinction and predator extinction E_2 , and equilibrium of predator extinction E_3 . The equilibrium of E_0 and E_2 are unstable, while the equilibrium of E_1 and E_3 are stable asymptotically under certain conditions. Based on numerical simulation, we obtain that if the number of the three species exist, the number of predators and prey are infected will rise and then decline slowly for the extinction of infected prey.

Key Words : *Predator Prey, Mathematical Model, Holling Type II, Equilibrium, Stability.*





DAFTAR ISI

Halaman Judul.....	i
Lembar Persetujuan.....	ii
Lembar Pengesahan	iii
Pedoman Penggunaan Skripsi.....	iv
Surat Pernyataan Orisinalitas.....	v
Kata Pengantar	vi
Abstrak	viii
Abstract	ix
Daftar Isi.....	x
Daftar Tabel	xii
Daftar Gambar.....	xiii
Daftar Lampiran.....	xiv
 BAB I PENDAHULUAN.....	 1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4

BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Persamaan Differensial	5
2.2 Analisis Kestabilan Sistem Linier.....	6
2.3 Model <i>Predator-Prey</i> Lotka Volterra	8
2.4 Kriteria Routh-Hurwith.....	9
2.5 Model Holling.....	11
2.6 Model Logistik.....	13
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	15
BAB IV PEMBAHASAN.....	17
4.1 Model Penyebaran Penyakit Pada <i>Predator Prey</i> Dengan Respon Holling Tipe II.....	17
4.1.1 Titik Setimbang Model Penyebaran Penyakit Pada <i>Predator Prey</i> Dengan Respon Holling Tipe II.....	21
4.1.2 Analisis kestabilan asimtotis lokal titik setimbang	24
4.2 Simulasi numerik Model Penyebaran Penyakit Pada <i>Predator Prey</i> Dengan Respon Holling Tipe II	31
BAB V PENUTUP.....	35
5.1 Kesimpulan	35
5.2 Saran.....	36
Daftar Pustaka	37

DAFTAR TABEL

No	Judul	Halaman
4.1	Variabel dan Parameter dalam model penyebaran penyakit pada <i>Predator Prey</i> dengan Respon Holling Tipe II	18
4.2	Nilai dan Parameter Simulasi Model Penyebaran Penyakit Pada <i>Predator Prey</i> Dengan Respon Holling Tipe II.	31



DAFTAR GAMBAR

No	Judul	Halaman
4.1	Grafik model untuk kepunahan <i>prey</i> yang terinfeksi.	32
4.2	Grafik model untuk kepunahan <i>prey</i> yang sehat.	33
4.3	Grafik model untuk kepunahan <i>prey</i> sehat, <i>prey</i> terinfeksi dan <i>predator</i> .	34



DAFTAR LAMPIRAN

No.	Judul Lampiran
1.	Menjelaskan persamaan model pertama menjadi model kedua
2.	M-File Pada Matlab untuk simulasi Model penyebaran penyakit pada <i>predator prey</i> dengan respon Holling tipe II



BAB I

PENDAHULUAN



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekologi berasal dari bahasa Yunani, yaitu dari kata oikos dan logos. Oikos berarti habitat atau tempat tinggal, sedangkan logos berarti pengetahuan atau ilmu. Istilah ekologi dipakai sebagai satu bagian dari ilmu pengetahuan. Dalam biologi, ekologi diartikan sebagai ilmu yang mempelajari hubungan timbal balik antara organisme dengan lingkungan (**Wardhana, 1994**). Salah satu unsur lingkungan hidup adalah adanya interaksi (unsur yang mempengaruhi). Proses interaksi antara manusia dengan lingkungannya disebut dengan ekosistem (*ecosystem*). Proses interaksi yang berwujud sebagai ekosistem tidak saja terjadi antara manusia dengan lingkungannya, tetapi juga antara makhluk-makhluk lain. Misalnya binatang-binatang, dengan tumbuhan-tumbuhan dan lingkungan sekitarnya (**Siahaan, 2004**).

Interaksi antar makhluk hidup merupakan hubungan erat dan saling mempengaruhi. Hal ini dapat diartikan bahwa setiap makhluk hidup selalu bergantung kepada makhluk hidup yang lain. Tiap individu akan selalu berhubungan dengan individu lain yang sejenis ataupun lain jenis, baik individu dalam satu populasi atau individu dari populasi lain. Salah satu interaksi yang sederhana adalah interaksi antara dua spesies dalam hubungan rantai makanan yaitu interaksi antara spesies pemangsa (*predator*) dengan mangsa (*prey*) (**Hofbauer dan Sigmund, 1992**).

Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam ekosistem, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa (*prey-predator*). *Predator* merupakan spesies pemangsa yang secara fisik ukurannya lebih besar dibanding dengan *prey*, sedangkan *prey* adalah spesies dimangsa yang ukurannya lebih kecil daripada *predator*. Sebuah sistem mangsa-pemangsa adalah salah satu jenis sistem dimana populasi dua spesies yang digabungkan, sehingga peningkatan jumlah *predator* akan menyebabkan penurunan jumlah *prey* (mati lebih dikarenakan menjadi makanan) tetapi peningkatan jumlah *prey* dapat menyebabkan jumlah *predator* meningkat (lebih banyak makanan yang tersedia sehingga lebih sedikit *predator* kelaparan) (Iswanto, 2012).

Dapat diketahui bahwa tidak semua *prey* yang hidup dalam keadaan sehat tetapi terdapat juga *prey* yang terkena infeksi atau tidak sehat. Selama ini, penelitian terhadap interaksi *predator* dan *prey* tidak pernah memperhatikan keadaan *prey*. Pertimbangan ini sesuai dengan kenyataan bahwa spesies yang terinfeksi bersikap kurang aktif dan bisa ditangkap lebih mudah atau perilaku spesies *prey* tidak terkontrol sehingga mereka tinggal di bagian habitat yang dapat diakses oleh *predator* (Xiao dan Chen, 2001). Selain itu, pertimbangan ini juga didukung oleh data eksperimen dari Lafferty dan Morris dengan demikian mereka menetapkan bahwa tingkat predasi pada populasi yang terinfeksi adalah 31 kali dari yang rentan. Mereka menduga bahwa infeksi memodifikasi perilaku populasi dan membuat populasi lebih rentan terhadap predasi (Lafferty dan Morris, 1996).

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam tulisan ini akan dibahas analisis stabilitas dari titik kesetimbangan dari model *predator prey*. Tulisan ini merujuk pada jurnal "*Predator-Prey model with Holling response function of type II and SIS infectious disease*" hasil penelitian dari (Tewa dkk, 2013).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan pada bagian latar belakang, maka rumusan masalah pada skripsi ini adalah :

1. Bagaimana analisis kestabilan dari titik kesetimbangan pada model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II ?
2. Bagaimana hasil interpretasi model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II beserta simulasinya?

1.3 Tujuan

Dalam penulisan ini penulis memiliki tujuan yaitu :

1. Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dari model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II
2. Menginterpretasikan hasil analisis model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II dengan software Matlab.

1.4 Manfaat

Adapun manfaat yang diperoleh dalam penyusunan makalah ini adalah :

1. Memberikan informasi mengenai analisa kestabilan model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II pada *prey* yang terinfeksi di lingkungan tercemar.
2. Memberi informasi bahwa penyelesaian bentuk kestabilan yang diberikan dapat direalisasikan untuk menjaga keseimbangan ekosistem beserta simulasinya.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini, penulis membatasi pembahasan masaah ini mengenai sebagai berikut :

1. Model penyebaran penyakit yang dipakai adalah model tipe SIS dan populasi *prey* maupun populasi *predator* mengacu pada *paper* milik **Tewa, dkk (2013)** yang berjudul "*Predator-Prey model with Holling response function of type II and SIS infectious disease*".
2. Dengan fungsi Holling terhadap tipe II, hal ini juga diketahui bahwa kematian dari *prey* akibat dari *predator* meningkat serta jumlah *prey* menurun dan menjadi konstan pada akhir.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan materi penelitian, yang bertujuan sebagai acuan dalam pembahasan.

2.1 Persamaan Differensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika yang dapat diterapkan untuk berbagai masalah dalam berbagai bidang ilmu. Persamaan diferensial terdapat dua jenis yaitu persamaan differensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan differensial biasa terdapat dua jenis yaitu persamaan differensial biasa linear dan non linear. Model *predator – prey* dengan adanya penurunan laju pertumbuhan populasi berupa persamaan diferensial non linear dan selanjutnya dicari solusinya menggunakan pencarian titik setimbang disebut dengan solusi khusus.

Berikut adalah definisi terkait tentang persamaan diferensial dan titik setimbang:

Definisi 2.1 Sebuah sistem persamaan diferensial linear dinyatakan sebagai :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.1)$$

dengan $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*). Solusi dari sistem (2.1) adalah

$$x(t) = e^{At} x_0$$

dengan $x(t_0) = x_0$ dinamakan nilai awal dari sistem dan

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

(Bronson dan Costa, 2007)

Definisi 2.2 Sistem persamaan diferensial orde satu dalam n persamaan disebut sebagai **sistem autonomus** jika dapat ditulis ke dalam bentuk :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

dengan fungsi f_1, f_2, f_3 atas variabel x_1, x_2, x_3 tidak tergantung pada waktu atau dengan kata lain variabel t tidak muncul secara eksplisit.

(Jones dan Sleeman, 2003)

Definisi 2.3 Diberikan persamaan differensial *autonomous*, $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Titik \bar{x} dikatakan titik setimbang jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

(Olsder, 2003)

2.2 Analisis Kestabilan Sistem Linier

Analisis kestabilan linier digunakan untuk mengetahui apakah penyelesaian dari suatu sistem persamaan diferensial linier stabil atau tidak stabil. Analisis kestabilan ini mudah digunakan apabila bentuk dari suatu persamaan diferensial adalah linier. Berikut beberapa definisi yang berhubungan dengan analisis

kestabilan linier :

Definisi 2.4 Matriks Jacobian adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari beberapa fungsi. Jika pada \mathbb{R}^2 terdapat persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dengan demikian bentuk matriks Jacobian yang berukuran 2×2 adalah :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.5 Jika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, maka vektor tak nol x di \mathbb{R}^n dinamakan **vektor eigen** dari A , jika Ax dapat dinyatakan dalam

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ yang selanjutnya disebut **nilai eigen** dari A dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

(Anton, 2005)

Teorema 2.6 Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan di bawah ini ekuivalen :

- λ adalah nilai eigen dari A
- Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ memiliki solusi nontrivial
- Untuk $\lambda \in \mathfrak{R}$, terdapat vektor tak nol x di \mathfrak{R}^n yang memenuhi $Ax = \lambda x$
- λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

(Anton, 2005)

Definisi 2.7 Sistem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ dikatakan stabil asimtotis jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah solusi dari sistem tersebut, 0 adalah titik setimbang dari sistem.

(Sontag dan Thomas, 2001)

Teorema 2.8 Sistem $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ dikatakan stabil asimtotis jika semua nilai eigen dari A , $\lambda I(A)$ mempunyai bagian realnya bernilai negatif, yang dinotasikan sebagai $Re(\lambda I(A)) < 0$

(Zill dan Cullen, 2009)

2.3 Model *Predator-Prey* Lotka-Volterra

Model *predator-prey* Lotka-Volterra pertama kali diperkenalkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1926. Model tersebut memiliki asumsi dasar bahwa apabila tidak ada interaksi yang terjadi di antara *prey* dan *predator* serta lingkungan tidak

membatasi maka populasi *prey* akan meningkat tak terbatas yang disebut dengan model pertumbuhan eksponensial. Akan tetapi, populasi *predator* akan turun secara eksponensial tanpa adanya *prey*. Hal ini terjadi karena *prey* tersebut adalah makanan utama bagi *predator*.

(Logan, 2011)

Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ masing-masing adalah populasi *prey* dan populasi *predator* pada saat t . Model *predator-prey* Lotka Volterra dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{2.4}$$

dengan dx/dt , dy/dt berturut-turut adalah laju perubahan populasi *prey* dan *predator* terhadap waktu t . Parameter a, b, c, d adalah konstanta positif. Parameter a adalah laju pertumbuhan spesies *prey* tanpa *predator*, sementara c adalah laju kematian dari *predator* tanpa *prey*. Sedangkan $-bxy$ dan dxy menunjukkan bahwa semakin banyak *predator* dan *prey* yang ada, semakin besar transfer dari *prey* ke *predator*.

(Bacaer, 2011)

2.4 Kriteria Routh – Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik dengan derajat n :

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0\tag{2.5}$$

dengan α_j adalah koefisien yang merupakan bilangan real, $j = 1, 2, \dots, n$.

Dari persamaan karakteristik (2.5) tersebut, dapat diperoleh n matriks Hurwitz (H_n) yang didefinisikan sebagai berikut :

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 a_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} a_{2n-6} & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} a_{2n-4} & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

dengan $a_j = \begin{cases} \alpha_j, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$.

Teorema 2.9 Akar-akar dari persamaan (2.5) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika :

$$\det(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

(Merkin, 1997)

Diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 3$. Untuk $n = 3$, bentuk persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.6) maka dapat dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik (2.6) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\det(H_1) > 0$, $\det(H_2) > 0$ dan $\det(H_3) > 0$. Tiga syarat ini dapat dinyatakan dengan a_1, a_2 dan a_3 sebagai berikut :

a. $\det(H_1) = |a_1| > 0$ didapatkan $a_1 > 0$

$$b. \det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ sehingga } a_1 a_2 > 0. \text{ Karena } a_1 > 0 \text{ maka}$$

didapatkan $a_2 > 0$

$$c. \det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ sehingga } a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$$

Akibatnya $a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0$ dengan demikian didapatkan dua kondisi, yaitu :

$$(1) \quad a_3 > 0 \text{ dan } a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$(2) \quad a_3 < 0 \text{ dan } a_1 a_2 - a_3 < 0.$$

Untuk kondisi (2) tidak mungkin terjadi, karena jika $a_3 < 0$ maka tidak akan terpenuhi $a_1 a_2 - a_3 < 0$.

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan karakteristik (2.6) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

(Merkin, 1997)

2.5 Model Holling

Holling (1959) menurunkan model yang membatasi laju *predator* menangkap *prey* atau laju predasi dari *predator*. Dalam model ini diasumsikan bahwa *predator* menghabiskan waktunya untuk dua aktivitas yaitu :

1. Mencari *prey*
2. Menangani *prey* yang terdiri dari : mengejar, memangsa, dan mencerna.

Laju konsumsi *predator* dalam model ini dibatasi waktu. Hal ini terjadi saat jumlah *prey* berlimpah, maka *predator* tidak perlu waktu untuk mencari, tetapi tetap menghabiskan waktu untuk menangani *prey*.

Total waktu adalah jumlah waktu yang dihabiskan oleh *predator* untuk mencari dan menangani *prey* yakni

$$T = T_s + T_h$$

dengan T_s adalah waktu untuk mencari *prey* dan T_h adalah waktu untuk menangani *prey*. Diasumsikan bahwa *predator* menangkap N *prey* selama waktu T dengan $N > 0$. Waktu untuk menangani *prey* sebanding dengan jumlah *prey* yang tertangkap

$$T_h = hN$$

h adalah waktu untuk menangani *prey*.

Setelah menghabiskan T_s untuk mencari, *predator* menjelajah area sebanyak kT_s , dengan k adalah konstanta positif, x adalah populasi *prey* per unit area kxT_s yaitu waktu menangkap *prey*, sehingga

$$N = kxT_s$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas maka diperoleh :

$$N = kx(T - T_h)$$

$$N(1 + khx) = kxT$$

Dari sini jumlah *prey* per satuan waktu atau laju predasi adalah

$$\frac{N}{T} = \frac{kx}{1 + khx}$$

(Logan, 2011)

Holling mengelompokkan tiga tipe respon fungsional predator yaitu tipe linear (Holling tipe I), tipe hiperbolik (Holling tipe II), dan tipe sigmoidal (Holling tipe III).

Holling tipe II menurunkan model yang membatasi laju predator menangkap prey atau laju predasi dari predator. Dinyatakan dalam bentuk :

$$f(R) = \frac{aR}{1 + ahR}$$

(Dale dkk, 1994)

2.6 Model Logistik

Teori pertumbuhan populasi dikemukakan pertama kali oleh Thomas Robert Malthus dengan diterbitkan tulisan berjudul *The Principle of Population* pada tahun 1798, dimana populasi bertambah dan berkurang secara eksponensial. Pada tahun 1838 teori Malthus disanggah oleh Verhulst dengan diterbitkannya tulisan berjudul *a Note on the law of population growth*, dimana pertumbuhan populasi tidak naik secara eksponensial melainkan dibatasi oleh ukuran dan kesuburan dari daerah yang menjadi tempat tinggal dari populasi.

(Bacaer, 2011)

Dari pertimbangan-pertimbangan tersebut, Verhulst membentuk model matematika yakni model logistik, yang direpresentasikan menurut persamaan diferensial orde pertama

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad (2.8)$$

(Bacaer, 2011)

Dengan populasi $P(t)$ lebih kecil dibanding kapasitas K . Sedangkan r adalah laju pertumbuhan alami, dengan diasumsikan $r > 0$ karena setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Solusi dari model logistik di atas adalah

$$P(t) = \frac{P(0)e^{rt}}{1 + P(0)(e^{rt} - 1)/K}$$

$P(0)$ merupakan suatu nilai awal dengan syarat $0 < P(0) < K$.

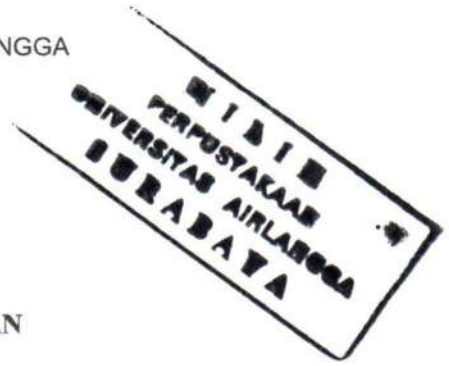
(Bacaer, 2011)



BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

ADLN-PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA



BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Berikut ini langkah-langkah yang digunakan selama penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji, mempelajari jurnal-jurnal dan literature-literatur lain yang berkaitan dengan model *predator-prey*, persamaan diferensial linier maupun sistem persamaan diferensial non linier.
2. Analisa kestabilan model *predator-prey* dengan berdasarkan jurnal terkait.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

- a. Menentukan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit pada sistem *predator prey* Holling tipe II.
 - b. Melakukan linierisasi model penyebaran penyakit pada sistem *predator prey* Holling tipe II dengan menggunakan matriks Jacobian.
 - c. Menganalisa kestabilan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit pada sistem *predator prey* Holling tipe II dengan menggunakan Routh - Hurwitz.
3. Simulasi Numerik
 - a. Melakukan simulasi numerik dengan model yang didapat dan titik kesetimbangan yang diperoleh dari proses perhitungan.
 - b. Menginterpretasi model dari hasil simulasi numerik yang diperoleh Langkah ke 3 (a).

4. Menarik kesimpulan hasil analisis model berdasarkan langkah-langkah di atas.



BAB IV

PEMBAHASAN

ADLN-PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA



BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan analisis pada model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II. Analisis model dilakukan untuk menentukan titik setimbang, kestabilan, simulasi model, dan interpretasi model.

4.1 Model Penyebaran Penyakit pada *Predator Prey* dengan respon Holling Tipe II

Di alam liar, interaksi antar populasi yang paling jelas terlihat adalah melibatkan pemangsaan (predasi, *predation*), dimana seekor pemangsa (*predator*) memakan mangsa (*prey*), Hal ini disebabkan karena *prey* yang terinfeksi akan bersikap kurang aktif dengan demikian membuat *predator* mudah untuk memangsanya.

Adapun beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model penyebaran penyakit pada *predator-prey* dengan respon Holling Tipe II, sebagai berikut :

1. Terdapat tiga populasi yakni populasi *prey* (mangsa) rentan, *prey* (mangsa) terinfeksi, dan populasi *predator* (pemangsa).
2. Populasi *prey* tumbuh secara alami menurut hukum logistik.
3. Populasi *predator* memangsa *prey* baik yang rentan maupun yang terinfeksi.

4. Populasi *prey* rentan akan terinfeksi penyakit jika berinteraksi dengan populasi *prey* yang terinfeksi.

Berikut adalah notasi dan definisi dari masing-masing variabel dan parameter yang digunakan dalam pembentukan model :

Tabel 4.1. Variabel dan parameter dalam model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II

Notasi	Keterangan
$H(t)$	Populasi total <i>Prey</i> pada saat t
$X(t)$	Populasi <i>Prey</i> yang rentan pada saat t
$Y(t)$	Populasi <i>Prey</i> yang terinfeksi pada saat t
$P(t)$	Populasi <i>Predator</i> pada saat t
μ	Angka kematian alami populasi <i>prey</i> rentan
τ	Tingkat kontak antara yang rentan dan terinfeksi
a	Tingkat maksimal <i>predator</i> memakan <i>prey</i>
α	Tingkat mencari <i>prey</i>
r	Laju Pertumbuhan Intrinsik dari <i>prey</i>
K	Kapasitas pendukung
γ	Tingkat Kematian <i>Predator</i>
σ	Tingkat kembalinya populasi yang terinfeksi dari individu menjadi rentan
b	Angka kelahiran alami

θ	Koefisien kematian <i>predator</i>
β	Laju pertumbuhan populasi yang rentan

Pada model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II diasumsikan variabel $H, X, Y, P \geq 0$ dan masing-masing parameternya bernilai positif. Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II dapat dinyatakan dalam persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{X+qY}{1+aH} P \quad (4.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b - \frac{\theta rH}{K}\right) H - \frac{(1-\theta)rH}{K} X - \mu X - \frac{\lambda XY}{H} + \sigma Y - \alpha \frac{XP}{1+aH} \quad (4.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\tau XY}{H} - \sigma Y - \mu Y - \frac{(1-\theta)rH}{K} Y - \alpha q \frac{YP}{1+aH} \quad (4.3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{X+qY}{1+aH} P - \gamma P, \quad (4.4)$$

dengan $H = X + Y$.

Persamaan (4.1) menggambarkan laju perubahan populasi *prey* per satuan waktu. Populasi *prey* bertambah karena adanya besarnya laju pertumbuhan dan berkurang karena adanya persaingan antar individu itu sendiri, berkurang karena adanya *prey* yang dimangsa oleh *predator* sebesar α .

Persamaan (4.2) menggambarkan laju perubahan populasi *prey* yang rentan per satuan waktu. Populasi *prey* bertambah karena adanya besarnya laju pertumbuhan dan berkurang karena adanya angka kematian alami dari populasi *prey*, berkurang karena adanya tingkat kontak antara yang rentan dan terinfeksi, bertambah karena adanya tingkat kembalinya populasi yang terinfeksi dari individu menjadi rentan terhadap *prey* yang terinfeksi, berkurang karena adanya tingkat mencari *prey* yang dimangsa oleh *predator* sebesar α .

Persamaan (4.3) menggambarkan laju perubahan populasi *prey* per satuan waktu. Populasi *prey* bertambah karena adanya besarnya laju pertumbuhan tingkat kontak antara yang rentan dan terinfeksi, berkurang karena adanya tingkat kembalinya populasi yang terinfeksi dari individu menjadi rentan terhadap *prey* yang terinfeksi, berkurang karena adanya angka kematian populasi *prey* yang terinfeksi, berkurang karena adanya *prey* yang dimangsa oleh *predator* sebesar α .

Persamaan (4.4) menggambarkan laju pertumbuhan populasi *predator* karena adanya proses pemangsaan *prey* pada *predator*, berkurang karena besarnya laju kematian *predator* tanpa *prey*.

Untuk memudahkan analisa maka model (4.1) - (4.4) akan dilakukan penskalaan dan reduksi menjadi tiga persamaan. Misalkan $I = \frac{Y}{H}$, dan $S = \frac{X}{H}$.

Karena $H = X + Y$, maka $1 = I + S$ atau $S = 1 - I$. Dari proses penskalaan tersebut dan reduksi model diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{1+(q-1)I}{1+aH} PH \quad (4.5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \tau(1-I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K}\right) I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI \quad (4.6)$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{1+(q-1)I}{1+aH} HP - \gamma P. \quad (4.7)$$

Untuk proses penskalaan dan reduksi model bisa dilihat pada Lampiran 1.

Untuk menganalisa kestabilan sistem dari model penyebaran penyakit pada *predator-prey* dengan respon Holling tipe II, maka langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan titik setimbang dari model tersebut. Kemudian kestabilan dari sistem model dapat dilihat dari nilai eigen yang diperoleh dari substitusi titik setimbang ke matriks Jacobian yang dibahas pada subbab berikut.

4.1.1 Titik Setimbang Model Penyebaran Penyakit *Predator Prey* dengan Respon Holling Tipe II

Keadaan setimbang merupakan suatu kondisi ketika perubahan jumlah populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Dalam model ini, keadaan setimbang terpenuhi saat $\frac{dH}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$ sehingga persamaan (4.5), (4.6), dan (4.7) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{1+(q-1)I}{1+aH} PH = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \tau(1-I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K}\right) I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{1+(q-1)I}{1+aH} HP - \gamma P = 0. \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.5), (4.6), dan (4.7) diperoleh empat titik setimbang, yakni :

1. **Titik setimbang kepunahan**, yakni kondisi ketika populasi *prey* dan *predator* dalam kepunahan. Kondisi ini terjadi ketika $H = 0$, $I = 0$, dan $P = 0$. Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan $E_0 = (H, I, P) = (H_0, I_0, P_0) = (0, 0, 0)$.
2. **Titik setimbang kepunahan *prey* yang terinfeksi dan kepunahan *predator***, yakni kondisi ketika tidak adanya aktivitas *predasi* karena *predator* tidak dapat memangsa *prey* yang terinfeksi. Kondisi ini terjadi ketika $H \neq 0$, $I = 0$, dan $P = 0$. Karena $I = P = 0$, maka dari persamaan (4.6) dan (4.7) diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0. \text{ Sedangkan dari persamaan (4.5) diperoleh}$$

$$rH \left(1 - \frac{H}{K} \right) - \alpha \frac{1+(q-1)I}{1+aH} PH = 0. \quad (4.8)$$

Karena $I = P = 0$, maka dari persamaan (4.8) diperoleh

$$rH \left(1 - \frac{H}{K} \right) = 0$$

Karena $H \neq 0$, maka didapat

$$1 - \frac{H}{K} = 0, \text{ atau} \\ \Leftrightarrow H = K \quad (4.9)$$

Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan *prey* yang terinfeksi dan kepunahan *predator* $E_1 = (H_1, I_1, P_1) = (K, 0, 0)$

3. **Titik setimbang kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator***, yakni kondisi ketika populasi *prey* terinfeksi saja yang hidup. Kondisi ini terjadi ketika $H = 0, I \neq 0$, dan $P = 0$. Karena $H = P = 0$ maka dari persamaan (4.5) dan (4.7) didapat $\frac{dH}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$. Sedangkan dari persamaan (4.6) diperoleh

$$\tau(1 - I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta r H}{K}\right)I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH}PI = 0 \quad (4.10)$$

Karena $H = P = 0$, maka dari persamaan (4.10) didapat

$$\begin{aligned} \tau(1 - I)I - (\sigma + b)I &= 0 \\ \Leftrightarrow [\tau(1 - I) - (\sigma + b)]I &= 0. \end{aligned}$$

Karena $I \neq 0$, maka dari persamaan di atas diperoleh kondisi

$$\begin{aligned} \tau(1 - I) - (\sigma + b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tau - \tau I - \sigma - b &= 0 \\ \Leftrightarrow I &= \frac{\tau - \sigma - b}{\tau} \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator*

$E_2 = (H_2, I_2, P_2) = (0, \frac{\tau - \sigma - b}{\tau}, 0)$ yang akan eksis jika memenuhi syarat

$$\tau > \sigma + b.$$

4. **Titik setimbang kepunahan *predator***, yakni kondisi ketika tidak adanya *predator* yang memangsa *prey*. Kondisi ini terjadi ketika $H \neq 0, I \neq 0$, dan

$P = 0$. Jika $P = 0$, maka dari persamaan (4.7) diperoleh $\frac{dP}{dt} = 0$. Sedangkan dari persamaan (4.5) diperoleh

$$rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) = 0.$$

Karena $H \neq 0$, maka didapat

$$1 - \frac{H}{K} = 0, \text{ atau} \\ \Leftrightarrow H = K \quad (4.11)$$

Karena dari persamaan (4.11) diperoleh $H = K$, dari persamaan (4.6) untuk kondisi $P = 0$ diperoleh

$$\tau(1 - I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K}\right)I = 0. \quad (4.12) \\ \Leftrightarrow [\tau(1 - I) - (\sigma + b - \theta r)]I = 0.$$

Karena $I \neq 0$, maka persamaan (4.10) hanya dipenuhi jika

$$\tau(1 - I) - (\sigma + b - \theta r) = 0.$$

Dengan demikian didapat $I = \frac{\tau - \sigma - b + \theta r}{\tau}$.

Dari sini diperoleh titik setimbang kepunahan predator $E_3 = (H_3, I_3, P_3) = \left(K, \frac{\tau - \sigma - b + \theta r}{\tau}, 0\right)$ yang akan eksis jika memenuhi syarat $\tau + \theta r > \sigma + b$.

4.1.2 Analisis Kestabilan Lokal Model

Persamaan (4.5) - (4.7) merupakan sistem *autonomous* non linier. Oleh karena itu, untuk mendapatkan kestabilan asimtotis lokal dari model *predator-*

prey dengan memperhatikan pemangsaan pada *prey* di titik-titik setimbang E_0 , E_1 , E_2 , E_3 , dan E_4 perlu dilakukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobian.

Misalkan persamaan (4.5) - (4.7) dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dH}{dt} = f_1(H, I, P),$$

$$\frac{dI}{dt} = f_2(H, I, P),$$

$$\frac{dP}{dt} = f_3(H, I, P).$$

Berdasarkan Definisi 2.5, maka matriks Jacobian dari model *predator-prey* dengan memperhatikan pemangsaan pada *prey* adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial P} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

dengan

$$a_1 = r - \frac{2rH}{K} - \alpha P - \frac{q\alpha I P + \alpha I P}{1 + aH} + \frac{(q\alpha I P H + \alpha I P H)q}{(1 + aH)},$$

$$a_2 = \frac{\theta r I}{K} + \frac{(q\alpha I P - q\alpha I^2 P - \alpha I P + \alpha P I^2)q}{(1 + aH)^2},$$

$$a_3 = \frac{\beta P + q\beta IP - \beta IP}{1 + aH} - \frac{(\beta HP + q\beta IHP - \beta IHP)q}{(1 + aH)^2},$$

$$a_4 = -q\alpha PH + \alpha PH,$$

$$a_5 = \tau - 2\tau l - \sigma - b + \frac{\theta r H}{K} - \frac{q\alpha P - 2\alpha q IP - \alpha P + 2\alpha IP}{1 + aH},$$

$$a_6 = \frac{q\beta HP - \beta HP}{1 + aH},$$

$$a_7 = -\alpha H - \frac{q\alpha IH + \alpha IH}{1 + aH},$$

$$a_8 = \frac{q\alpha I - q\alpha I^2 - \alpha I + \alpha I^2}{1 + aH},$$

$$a_9 = \frac{\beta H + q\beta IH - \beta IH}{1 + aH} - \gamma.$$

Berdasarkan Teorema 2.9, untuk menganalisis kestabilan dari titik setimbang, dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari substitusi masing-masing titik setimbang model ke matriks Jacobian yang dijelaskan di bawah ini.

1. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan $E_0 = (0,0,0)$ adalah

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & \tau - \theta - b & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_0} merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik

$\det(J_{E_0} - \lambda I) = 0$, atau ekuivalen dengan

$$(r - \lambda)(\tau - \theta - b - \lambda)(-\gamma - \lambda) = 0. \quad (4.14)$$

Dari persamaan karakteristik (4.14) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r$,

$$\lambda_2 = \tau - \theta - b, \text{ dan } \lambda_3 = -\gamma$$

Karena diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka $\lambda_1 = r > 0$.

Berdasarkan Teorema 2.9, maka titik setimbang kepunahan E_0 tidak stabil karena terdapat nilai eigen yang bernilai real positif.

Dari sudut pandang biologi, ini menunjukkan bahwa dalam model ini tidak akan terjadi kepunahan meskipun dalam dunia nyata semua populasi berpeluang terjadi kepunahan.

2. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan *Prey* yang Terinfeksi dan Kepunahan *Predator*

Matriks Jacobian dari titik setimbang tanpa *predator* $E_1 = (K, 0, 0)$ adalah

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -r & 0 & -\alpha \left(\frac{1}{1+aK} \right) K \\ 0 & \tau - \sigma - b + \theta r & 0 \\ 0 & 0 & \beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K - \gamma \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_1} merupakan akar dari persamaan karakteristik

$\det(J_{E_1} - \lambda I) = 0$, atau ekuivalen dengan

$$(\lambda + r)(\tau - \sigma - b + \theta r - \lambda) \left(\lambda - \beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K - \gamma \right) = 0. \quad (4.15)$$

Dari persamaan karakteristik (4.15) diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -r, \lambda_2 = \tau - \sigma - b + \theta r, \text{ dan } \lambda_3 = \beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K - \gamma.$$

Karena diasumsikan semua parameter bernilai positif, maka diperoleh $\lambda_1 = -r < 0$. Selanjutnya akan ditentukan syarat agar $\lambda_2, \lambda_3 < 0$.

Perhatikan bahwa

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \tau - \sigma - b + \theta r < 0 \text{ atau } \tau + \theta r < \sigma + b$$

$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow \beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K - \gamma < 0 \text{ atau } \beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K < \gamma.$$

Berdasarkan Teorema 2.9, maka titik setimbang kepunahan E_1 stabil asimtotis jika memenuhi syarat $\tau + \theta r < \sigma + b$ dan $\beta \left(\frac{1}{1+aK} \right) K < \gamma$. Dari sudut pandang biologi, ini menunjukkan bahwa terjadi kepunahan *predator* saat laju penyebaran infeksi oleh prey terinfeksi lebih besar dari laju kematian alami prey terinfeksi.

3. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan Prey Rentan dan Kepunahan Predator

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator* $E_2 = \left(0, \frac{\tau + \sigma + b}{\tau}, 0 \right)$ adalah

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

dengan

$$m_1 = -\frac{\theta r(-\tau + \sigma + b)}{K\tau},$$

$$m_2 = -\tau + \tau \left(1 + \frac{-\tau + \sigma + b}{\tau} \right),$$

$$m_3 = \frac{\alpha(q-1) \left(1 + \frac{-\tau + \sigma + b}{\tau}\right) (\tau + \sigma + b)}{\tau}.$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_2} merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik

$\det(J_{E_2} - \lambda I) = 0$, atau ekuivalen dengan

$$(\lambda - r) \left(\lambda + \tau - \tau \left(1 + \frac{-\tau + \sigma + b}{\tau} \right) \right) (\lambda + \gamma) = 0. \quad (4.16)$$

Dari persamaan karakteristik (4.16) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r$,

$$\lambda_2 = \left(\lambda + \tau - \tau \left(1 + \frac{-\tau + \sigma + b}{\tau} \right) \right), \text{ dan } \lambda_3 = -\gamma.$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka diperoleh $\lambda_1 = r > 0$, maka $\lambda_1 > 0$. Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa titik setimbang kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator* E_2 tidak stabil.

Dari sudut pandang biologi, ini menunjukkan bahwa terjadi kepunahan *pada* *prey* terinfeksi saat laju penyebaran infeksi oleh *prey* terinfeksi lebih kecil dari laju kematian alami *prey* terinfeksi.

4. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Kepunahan *Predator*

Matriks Jacobian dari titik setimbang kepunahan *predator*

$$E_3 = \left(K, \frac{\tau - \sigma - b + \theta r}{\tau}, 0 \right) \text{ adalah}$$

$$J_{E_3} = \begin{pmatrix} -r & 0 & n_1 \\ n_2 & n_3 & n_4 \\ 0 & 0 & n_5 \end{pmatrix}.$$

dengan

$$n_1 = -\alpha \left(\frac{1 - \frac{(q-1)(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{\tau}}{1+aK} \right) K,$$

$$n_2 = -\frac{\theta r(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{K\tau},$$

$$n_3 = -\tau + \tau \left(1 + \frac{-\tau+\sigma+b-\theta r}{\tau} \right),$$

$$n_4 = \frac{\alpha(q-1) \left(1 + \frac{-\tau+\sigma+b-\theta r}{\tau} \right) (-\tau+\sigma+b-\theta r)}{(1+aK)\tau},$$

$$n_5 = \beta \left(\frac{1 - \frac{(q-1)(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{\tau}}{1+aK} \right) K - \gamma.$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_3} merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik $\det(J_{E_3} - \lambda I) = 0$, atau ekuivalen dengan

$$(\lambda + r) \left(\lambda + \tau - \tau \left(1 + \frac{-\tau+\sigma+b-\theta r}{\tau} \right) \right) \left(\lambda - \beta \left(\frac{1 - \frac{(q-1)(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{\tau}}{1+aK} \right) K + \gamma \right) = 0. \quad (4.17)$$

Dari persamaan karakteristik (4.5) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -r$,

$$\lambda_2 = \tau - \tau \left(1 + \frac{-\tau+\sigma+b-\theta r}{\tau} \right), \text{ dan } \lambda_3 = -\beta \left(\frac{1 - \frac{(q-1)(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{\tau}}{1+aK} \right) K + \gamma.$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka diperoleh $\lambda_1 = -r$.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa titik setimbang kepunahan

predator E_3 akan stabil asimtotis jika memenuhi $\tau > \tau \left(1 + \frac{-\tau+\sigma+b-\theta r}{\tau} \right)$ dan

$1 > \frac{(q-1)(-\tau+\sigma+b-\theta r)}{\tau}$. Dari sudut pandang biologi, ini menunjukkan bahwa terjadi kepunahan pada *prey* rentan dan *prey* terinfeksi.

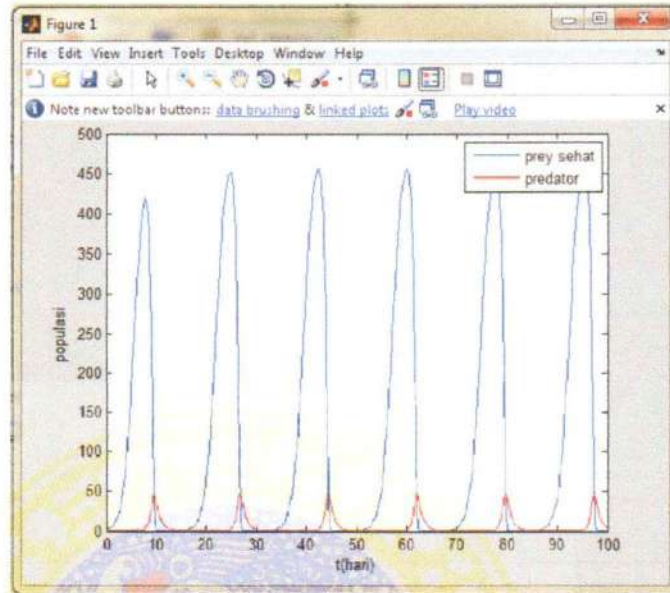
4.2 Simulasi Numerik

Pada subbab ini dibahas tentang simulasi model penyebaran penyakit *predator prey* dengan respon Holling tipe II. Simulasi ini bertujuan untuk melihat dinamika populasi antara populasi *prey* dan populasi *predator* sesuai dengan syarat kestabilan untuk masing-masing titik setimbang. Berikut diberikan nilai parameter model *predator prey* yang digunakan:

Tabel 4.2 Nilai dan Parameter simulasi model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II.

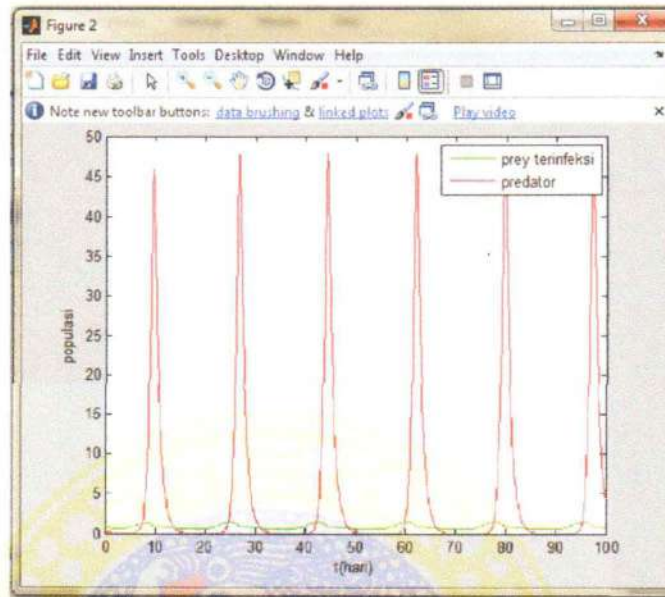
Parameter	r	β	a	K	α	γ	τ	σ	θ	q	b
Nilai	1	0,015	0,01	490	0,1	1	1	0,15	0,8	2	0,1

Simulasi yang dilakukan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang dapat dilihat pada Tabel 4.2. Simulasi pada persamaan dengan nilai awal $(H, I, P) = (2; 0,8; 0,4)$ dengan waktu $t = 0$ hingga $t = 350$, diperoleh hasil simulasi numerik sebagai berikut :



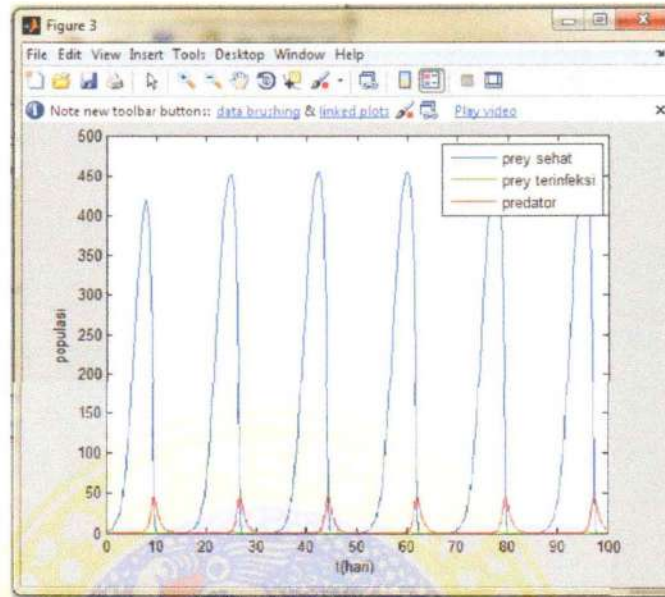
Grafik 4.1 Grafik model untuk kepunahan *prey* yang terinfeksi.

Pada Grafik 4.1 menggambarkan grafik antara *prey* sehat dan *predator* terhadap waktu. Ketika *prey* terinfeksi punah, maka tidak ada yang memangsa *prey* sehat dan *predator*. Hal ini mengakibatkan lebih besar peluang *prey* sehat tidak terinfeksi oleh *prey* terinfeksi. Oleh karena itu, jumlah *prey* sehat menjadi lebih banyak dibandingkan *predator*.



Grafik 4.2 Grafik model untuk kepunahan *prey* yang sehat.

Pada Grafik 4.2 menggambarkan grafik antara *prey* terinfeksi dan *predator* terhadap waktu. Ketika *prey* terinfeksi punah, maka tidak ada yang memangsa *predator*. Hal ini mengakibatkan lebih besar peluang *predator*. Oleh karena itu, jumlah *predator* menjadi lebih banyak dibandingkan *prey* terinfeksi.



Grafik 4.3 Grafik model untuk kepunahan *prey* sehat, *prey* yang terinfeksi, dan *predator*.

Pada Grafik 4.3 menggambarkan grafik antara *prey* sehat, *prey* terinfeksi dan *predator* terhadap waktu. Ketika *prey* terinfeksi punah, maka tidak ada yang memangsa *prey* sehat dan *predator*. Hal ini mengakibatkan lebih besar peluang *prey* sehat tidak terinfeksi oleh *prey* terinfeksi. Oleh karena itu, jumlah *prey* sehat menjadi lebih banyak dibandingkan *predator*. Kode program matlab dapat dilihat di Lampiran 2.

BAB V

PENUTUP

BAB V

KESIMPULAN



5.1. KESIMPULAN

Dari analisis model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon Holling tipe II diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan respon

Holling tipe II diperoleh empat titik setimbang yakni, kepunahan

$E_0 = (0,0,0)$, kepunahan *prey* yang terinfeksi dan kepunahan *predator*

$E_1 = (K, 0,0)$, kepunahan *prey* rentan dan kepunahan *predator*

$E_2 = \left(0, \frac{\tau - \sigma - b}{\tau}, 0\right)$, kepunahan *predator*, dan $E_3 = \left(K, \frac{\tau - \sigma - b + \theta r}{\tau}, 0\right)$.

Titik setimbang E_0 tidak stabil asimtotis karena terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian yang bernilai positif. Titik setimbang E_1 stabil asimtotis

jika memenuhi $\tau + \theta r < \sigma + b$ dan $\beta \left(\frac{1}{1+aK}\right) K < \gamma$. Titik setimbang E_2

tidak stabil karena terdapat nilai eigen dari matrik Jacobian yang bernilai

positif. Titik setimbang E_3 stabil asimtotis jika memenuhi $\tau >$

$\tau \left(1 + \frac{-\tau + \sigma + b - \theta r}{\tau}\right)$ dan $1 > \frac{(q-1)(-\tau + \sigma + b - \theta r)}{\tau}$.

2. Berdasarkan simulasi numerik, ketika jumlah ketiga spesies eksis maka jumlah *predator* dan *prey* terinfeksi akan meningkat kemudian menurun secara perlahan karena kepunahan *prey* terinfeksi.

5.2. SARAN

Pada skripsi ini hanya membahas analisis kestabilan model penyebaran penyakit pada *predator prey* dengan fungsi Holling tipe II. Oleh karena itu pada kajian selanjutnya dapat dianalisis model dengan menggunakan kontrol optimal.



DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 2005, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Jakarta.
- Bacaer, N., 2011. *Short History of Mathematical Population Dynamics, Ninth Edition*, Springer London Dordrecht Heidelberg, New York.
- Bronson, R., dan Costa, G.B., 2007, *Differential equations*, The Mc Grow-Hill Companies, Inc., New Jersey.
- Dale, B.W., Adams, L.G., dan Bowyer, R.T, 1994, Functional Response of Wolves Preying on Barren-Ground Caribou in a Multiple-Prey Ecosystem, *Journal of Animal Ecology* 63, pp 644–52.
- Garrot, A.G., White, P.J., dan Watson, F.G.R., 2009, *The Ecology of large mammals in central Yellowstone: Sixteen years of integrated field studies*, China: Elsevier.
- Hofbauer, J., dan Sigmund, K., 1998, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, New York.
- Iswanto, R.J., 2012, *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Jones, D.S. dan Sleeman B.D., 2003. *Differential Equation and Mathematical Biology*, CRC Press, New York.
- Logan, D., 2011, *A first Course in Differential Equations*, Lincoln: Springer Science Business Media.

- Lafferty, K.D., dan Morris, A.K., Altered Behavior of Parasitized Kill fish Increases Susceptibility to Predation by Bird Final Hosts, *Ecology*: 77 (1996) 1390-1397.
- Merkin, D.R., 1997, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer, New York.
- Olsder, G.J., 2003, *Mathematical System Theory, second edition Delft*, University Press: Netherland.
- Siahaan, N. H. T., 2004, *Hukum Lingkungan dan Ekologi Pembangunan*, Jakarta: Erlangga.
- Sontag, E.D., dan Thomas M., 2001, *Control Theory for Linier Systems*, Spinger, London.
- Tewa, J.J, Djeuman, Y.V, dan Bowong., 2013, Predator Prey Model with Holling Response Function Of ype II and SIS Infectious Disease, *Applied Mathematical Modelling*, 37: 4825-4841
- Wardhana, W.A., 1994, *Teknik Analisis Radioaktivitas Lingkungan*, Yogyakarta: Dani Offset.
- Xiao, Y. dan Chen, L., 2001, Modeling dan analysis of a predator-prey model with disease in the prey, *Mathematical Biosciences*, 171: 59-82.
- Zill, D.G., dan Cullen, M.R., 2009, *Diffrenetial Equations With Boundary-Value Problem, seventh edition*, Nelson Education Ltd: Canada.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Menjelaskan persamaan model pertama menjadi model kedua

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{X+qY}{1+aH} P \quad (4.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(b - \frac{\theta rH}{K}\right) H - \frac{(1-\theta)rH}{K} X - \mu X - \frac{\lambda XY}{H} + \sigma Y - \alpha \frac{XP}{1+aH} \quad (4.2)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\tau XY}{H} - \sigma Y - \mu Y - \frac{(1-\theta)rH}{K} Y - \alpha q \frac{YP}{1+aH} \quad (4.3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{X+qY}{1+aH} P - \gamma P, \quad (4.4)$$

Dari persamaan (4.1) diperoleh

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{X+qY}{1+aH} P$$

Misalkan suku terakhir dari persamaan (4.1) dikalikan H dengan kondisi $I = \frac{Y}{H}$

dan $S = \frac{X}{H} = 1 - I$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{\frac{X+qY}{H}}{1+aH} PH \\ &= rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{\frac{X}{H} + q \frac{Y}{H}}{1+aH} PH \\ &= rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{1 - I + q \cdot I}{1+aH} PH \end{aligned}$$

Akibatnya didapat persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{1 + (q-1)I}{1+aH} PH$$

Dari persamaan (4.3) diperoleh



Lampiran 1-2

Misalkan suku terakhir dari persamaan (4.3) dikalikan H dengan kondisi $I = \frac{Y}{H}$

dan $S = \frac{X}{H} = 1 - I$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{H} \right) &= \frac{\frac{dY}{dt} H - \frac{dH}{dt} Y}{H^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\tau XY}{H} - \sigma Y - \mu Y - \frac{(1-\theta)rH}{K} Y - \alpha q \frac{YP}{1+aH} \right) (H)}{H^2} - \frac{\left(rH \left(1 - \frac{H}{K} \right) - \alpha \frac{X+qY}{1+aH} P \right) (Y)}{H^2} \\ &= \frac{\tau XY - \sigma YH - \mu YH - \frac{(1-\theta)rH}{K} YH - \alpha q H \frac{YP}{1+aH}}{H^2} - \frac{rHY \left(1 - \frac{H}{K} \right) - Y \alpha \frac{X+qY}{1+aH} PY}{H^2} \\ \frac{dI}{dt} &= \tau \frac{XY}{HH} - \sigma \frac{Y}{H} - \mu \frac{Y}{H} - \frac{(1-\theta)rHY}{K} - \alpha q H \frac{\frac{Y}{H}}{1+aH} P - r \frac{Y}{H} \left(1 - \frac{H}{K} \right) \\ &\quad - \frac{Y}{H} \alpha \frac{X+qY}{1+aH} P \frac{Y}{H} \\ &= \tau \cdot \frac{X}{H} \cdot \frac{Y}{H} - \frac{Y}{H} \left(\sigma - \mu - \frac{(1-\theta)rH}{K} \right) - \alpha q \frac{\frac{Y}{H}}{1+aH} PI \\ &= \tau \frac{X}{H} \cdot \frac{Y}{H} - \frac{Y}{H} \left(\sigma - \mu - \frac{(1-\theta)rH}{K} \right) - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI \end{aligned}$$

Akibatnya didapat persamaan differensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} &= \tau(1-I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K} \right) I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI \\ \frac{dI}{dt} &= \tau(1-I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K} \right) I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.4) diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{X+qY}{1+aH} P - \gamma P$$

Misalkan suku terakhir dari persamaan (4.4) dikalikan H dengan kondisi

$I = \frac{Y}{H}$ dan $S = \frac{X}{H} = 1 - I$, sehingga diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{\frac{X}{H} + q \frac{Y}{H}}{1 + aH} HP - \gamma P$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{(1 - I) + q(I)}{1 + aH} HP - \gamma P$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{1 + (q - 1)I}{1 + aH} HP - \gamma P$$

Akibatnya didapat persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{1 + (q - 1)I}{1 + aH} HP - \gamma P$$

Dapat diperoleh tiga persamaan yaitu

$$\frac{dH}{dt} = rH \left(1 - \frac{H}{K}\right) - \alpha \frac{1+(q-1)I}{1+aH} PH, \quad (4.5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \tau(1 - I)I - \left(\sigma + b - \frac{\theta rH}{K}\right)I - \alpha \frac{(q-1)(1-I)}{1+aH} PI, \quad (4.6)$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta \frac{1+(q-1)I}{1+aH} HP - \gamma P. \quad (4.7)$$

Lampiran 1-2



Lampiran 2 : Simulasi Dinamika Populasi Model Penyebaran Penyakit Pada***Predator Prey Dengan Respon Holling Tipe II***

```

function xdot= predprey(t,x)
xdot=zeros(3,1);
r=1;
c=0.015;
a=0.01;
k=490;
d=0.1;
g=1;
l=1;
e=0.15;
s=0.8;
q=2;
b=0.1;
xdot(1)=r*x(1)*(1-(x(1)/k))-(d*((1+(q-1)*x(2))/(1+a*x(1)))*x(3)*x(1));
xdot(2)=1*(1-x(2))*x(2)-(e+b-((s*r*x(1))/k)*x(2)-(d*((q-1)*(1-x(2))/(1+a*x(1)))*x(3)*x(2)));
xdot(3)=(c*((1+(q-1)*x(2))/(1+a*x(1)))*x(1)*x(3))-g*x(3);
end

clc;
clear;
closeall;
r=1;
c=0.015;
a=0.01;
k=490;
d=0.1;
g=1;
l=1;
e=0.15;
s=0.8;
q=2;
b=0.1;
x0=[2 0.8 0.4];
t0=[0 100];
[t,x]=ode45('predprey',t0,x0);

figure(1);
plot(t,x(:,1),'b',t,x(:,3),'r');
legend('prey sehat','predator')
ylabel('populasi');
xlabel('t(hari)');

figure(2);
plot(t,x(:,2),'g',t,x(:,3),'r');
legend('prey terinfeksi','predator');
ylabel('populasi');
xlabel('t(hari)');

figure(3);

```



```
plot(t,x(:,1),'b',t,x(:,2),'g',t,x(:,3),'r');  
legend('prey sehat','prey terinfeksi','predator');  
xlabel('t(hari)');  
ylabel('populasi');
```

```
figure(4);  
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));  
xlabel('prey sehat');  
ylabel('prey terinfeksi');  
zlabel('predator');
```

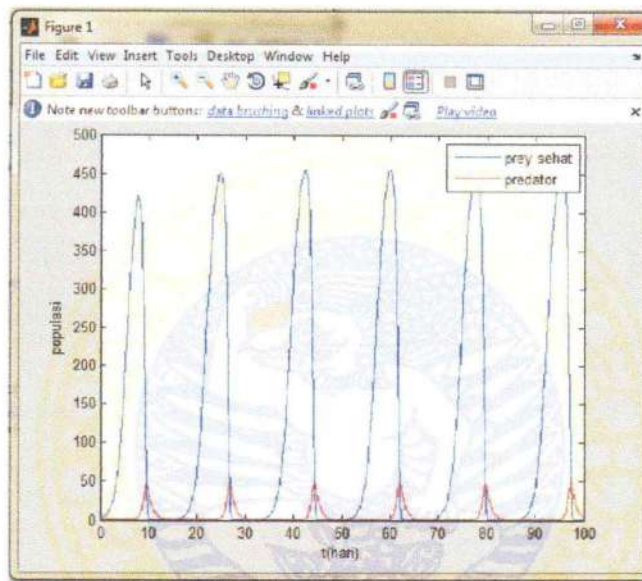


Figure 1 Grafik model untuk kepunahan *prey* yang terinfeksi.

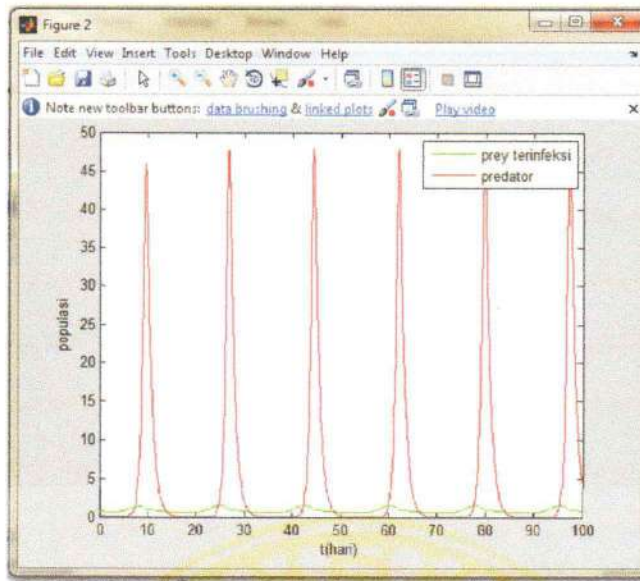


Figure 2 Grafik model untuk kepunahan *prey* sehat.

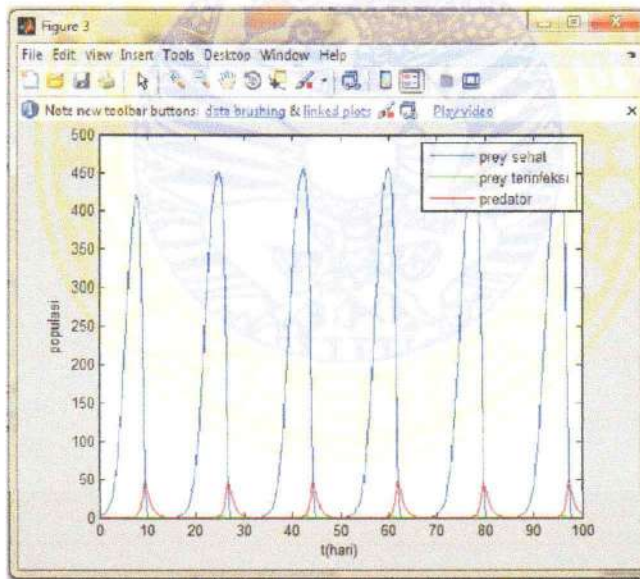


Figure 3 Grafik model untuk kepunahan *prey* sehat, *prey* yang terinfeksi, dan *predator*.