

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang memiliki peranan penting dalam kehidupan sehari-hari dan dalam perkembangan sains dan teknologi. Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis. Bidang analisis merupakan bidang yang dikembangkan dari kalkulus, yang membahas persamaan diferensial, integral, limit, barisan, deret, topologi, kalkulus vektor, dan analisis fungsional.

Salah satu konsep yang dibahas di bidang analisis adalah konsep ruang barisan. Ruang barisan adalah ruang vektor dengan elemen-elemen berupa barisan bilangan real atau kompleks (**Anton dan Rorres, 2014**). Salah satu ruang barisan adalah ruang barisan terbatas, yaitu ruang barisan l_p yang didefinisikan sebagai $l_p := \{X = (x_n) \in \mathcal{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$, dalam norma- p yang didefinisikan sebagai $\|X\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, dengan $\mathcal{R}$ adalah himpunan semua barisan bilangan real. Penelitian mengenai l_p tidak hanya terbatas dalam l_p dengan norma- p , seperti terlihat dalam penelitian (**Gunawan, 2001**), yang menunjukkan kelengkapan $l_p \times l_p$ dalam norma-2 dan $l_p \times l_p \times \dots \times l_p$ dalam norma- n .

Gagasan mengenai ruang barisan selisih diperkenalkan oleh **Kizmaz** pada 1981 dengan mendefinisikan $\Delta X = (x_{k+1} - x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ untuk barisan X . Dengan konsep ini, **Kizmaz (1981)** mengamati kelengkapan ruang barisan selisih dari ruang barisan kompleks terbatas (l_{∞}), ruang barisan konvergen (c), dan ruang barisan null (c_0). Selanjutnya **Kizmaz** juga mencari dual- α , dual- β , dan dual- γ dari ruang-ruang barisan selisih tersebut.

Dengan konsep barisan selisih, barisan l_p dapat dikembangkan menjadi ruang barisan selisih $l_p(\Delta)$. Ruang barisan $l_p(\Delta)$ adalah ruang barisan selisih yang beranggotakan barisan-barisan $X \in \mathcal{R}$ yang memenuhi sifat $\Delta X \in l_p$. Ruang ini didefinisikan sebagai $l_p(\Delta) := \{X = (x_n) \in \mathcal{R} : \Delta X \in l_p\}$.

Pada penelitian ini, didefinisikan $\frac{1}{\alpha}\Delta X := \frac{(x_{k+1}-x_k)}{\alpha}$, $\alpha, k \in \mathbb{N}$. Selanjutnya dibangun ruang barisan $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$ yang perumuman dari ruang barisan $l_p(\Delta)$. Selanjutnya penulis tertarik untuk meninjau ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$ serta membuktikan apakah ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$ merupakan ruang Banach.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimana bentuk umum dan norma dari ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$?
2. Bagaimana keberlakuan ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$?
3. Apakah ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$ merupakan ruang Banach?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang akan dicapai dari penelitian ini adalah:

1. Merumuskan bentuk umum dan norma dari ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$.
2. Menunjukkan ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$.
3. Menunjukkan apakah ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$ merupakan ruang Banach.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan pemahaman mengenai sifat ruang $l_p\left(\frac{1}{\alpha}\Delta\right)$.
2. Memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan matematika, terutama di ruang barisan selisih.