

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA
PENYEBARAN COVID-19 MENGGUNAKAN METODE BEDA
HINGGA TAK STANDAR**

SKRIPSI



CHARISMA YASINTASYA KAFILLA

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

IR PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA TAK STANDAR**

SKRIPSI



CHARISMA YASINTASYA KAFILLA

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA
2022**

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN
COVID-19 MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA TAK STANDAR**

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh
Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika
Pada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga

Charisma Yasintasya Kafilla

NIM. 081811233069

Disetujui oleh:

Pembimbing I,



Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP.197307041998022001

Pembimbing II,



Dr. Windarto, S.Si., M.Si.

NIP.197711042003121001

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : Aproksimasi Solusi Model Matematika
Penyebaran COVID-19 Menggunakan Metode
Beda Hingga Tak Standar

Penulis : Charisma Yasintasya Kafilla

NIM : 081811233069

Pembimbing I : Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

Pembimbing II : Dr. Windarto, S.Si., M.Si.

Tanggal Seminar : 11 Agustus 2022

Disetujui oleh:

Pembimbing I,



Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP.197307041998022001

Pembimbing II,



Dr. Windarto, S.Si., M.Si.

NIP.197711042003121001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga



Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si.

NIP.196804041994031020

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, tetapi tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai dengan kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tanga di bawah ini, saya:

Nama : Charisma Yasintasya Kafilla

NIM : 081811233069

Program Studi : S-1 Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan tindakan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

**“Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19
Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar”**

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya. 15 Agustus 2022



Charisma Yasintasya Kafilla

NIM. 081811233069

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmanirrahiim. Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas berkat, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang berjudul “*Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19 Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar*”.

Keberhasilan penulis dalam menyusun skripsi ini tidak luput dari dukungan dan bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Mohammad Nasih, SE., MT., AK., selaku Rektor Universitas Airlangga.
2. Prof. Dr. Moh Yasin, M. Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.
3. Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si., selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga dan juga selaku koordinator Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan bimbingannya selama perkuliahan.
4. Ibu Asri Bkti Prastiwi, M.Si., selaku dosen wali penulis yang selalu memberikan kritik, saran, dan motivasi dalam menjalani perkuliahan.
5. Prof. Dr. Fatmawati, M.Si., selaku dosen pembimbing I dan Dr. Windarto, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang selalu memberikan arahan dan bimbingan selama perkuliahan.
6. Seluruh dosen di Universitas Airlangga, khususnya di Departemen Matematika yang telah menyampaikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
7. Keluarga penulis yaitu Bapak Eko Widarwanto dan Ibu Sri Budi Utami selaku orang tua penulis, Adik Arsyia Firman Hikmatiar dan Adik Rafif

Hanudya Heirdianto, Mas Nopia Dimas Nugraha yang telah memberikan doa dan semangatnya.

8. Sahabat penulis yaitu Erlyn, Karine, Karina, Puty, Indah, Utik, Annisa, Ratih, Siska, Salindri yang turut membantu dan memberikan semangatnya.
9. Teman-teman KKN desa Panjer yaitu Puty, Diar, Levi, Alfita, Nabilla, Anintya, Nova, Mikael, dan Rakha.
10. Teman-teman perkuliahan yang turut membantu dan memberikan semangat sehingga terselesaikannya penelitian ini. Teman-teman seperjuangan prodi S-1 Matematika 2018 dan kakak tingkat yang memberikan motivasi dan pengalaman yang berharga semasa kuliah.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan penelitian ini belum sempurna. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun untuk memperbaiki penelitian ini. Penulis berharap semoga penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi banyak pihak, khususnya mahasiswa prodi S-1 Matematika Universitas Airlangga.

Surabaya, 8 Juni 2022

Penulis

Charisma Yasintasya Kafilla

Charisma Yasintasya Kafilla, 2022, **Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19 Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar**, Skripsi ini di bawah bimbingan Prof. Dr. Fatmawati, M. Si. dan Dr. Windarto, S. Si., M. Si. Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Penyakit menular adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme seperti virus, bakteri, parasit, maupun jamur. Salah satu penyakit yang menular adalah COVID-19 yang disebabkan oleh virus corona atau SARS-CoV-2. Penelitian ini bertujuan mendapatkan aproksimasi solusi dan solusi analitik untuk mengetahui keadaan penyebaran COVID-19. Hasil analisis model matematika penyebaran COVID-19 terdapat titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Sedemikian sehingga titik setimbang yang diperoleh akan menghasilkan *Basic Reproduction Number* (R_0) yang digunakan untuk menentukan eksistensi dan kestabilan dari titik setimbang. Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika $R_0 < 1$ dan titik setimbang endemik akan cenderung stabil asimtotis jika $R_0 > 1$. Aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 menggunakan metode beda hingga tak standar untuk mendapatkan hasil numerik yang relatif stabil. Aproksimasi solusi model matematika diselesaikan dengan melakukan diskritisasi model matematika penyebaran COVID-19 dan menentukan tetapan beda hingga tak standar. Kemudian dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan kekonvergenan metode ini.

Keywords: Beda Hingga Tak Standar, COVID-19, Model Matematika, Aproksimasi Solusi.

Charisma Yasintasya Kafilla, 2022, **Approximation Solution of the Mthematical Models of the Spread of COVID-19 Using Non-Standard Finite Difference Method** , this undergraduate thesis is supervised by Prof. Dr. Fatmawati, M. Si. and Dr. Windarto, S. Si., M. Si. Mathematics Departement, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

Infectious diseases are infected diseases caused by microorganisms such as viruses, bacteria, parasites, and fungi. One of the infectious diseases is COVID-19 which is caused by the corona virus or SARS-CoV-2. This study aims to obtain analytical solutions and approximate solutions to determine the state of the spread of COVID-19. The results of the analysis of the mathematical model of the spread of COVID-19 there are non-endemic equilibrium points and endemic equilibrium points. In such a way that the equilibrium point obtained will produce a Basic Reproduction Number (R_0) which is used to determine the existence and stability of the equilibrium point. The non-endemic equilibrium point is asymptotically stable if $R_0 < 1$ and the endemic equilibrium point will tend to be asymptotically stable if $R_0 > 1$. Meanwhile, the approximate solution to the mathematical model of the spread of COVID-19 uses a non-standard finite difference method to obtain relatively stable numerical results. The approximation of the solution of the mathematical model is solved by discretizing the mathematical model of the spread of COVID-19 and determining the nonstandard finite difference constant. Then a numerical simulation is performed to demonstrate this convergence method.

Keywords: Non-Standard Finite Difference Method , COVID-19, Mathematical Model, Approximation Solution.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PERNYATAAN	Error! Bookmark not defined.
LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI.....	Error! Bookmark not defined.
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI	iv
SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
1.5 Batasan Masalah.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Coronavirus disease 2019 (COVID-19)	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	6

2.3	Kestabilan Sistem Linear.....	8
2.4	Kriteria Routh Hurwitz.....	9
2.5	Bilangan Reproduksi Dasar.....	12
2.6	Beda Hingga Standar.....	12
2.7	Beda Hingga Tak Standar.....	14
BAB III METODE PENELITIAN.....		16
BAB IV PEMBAHASAN.....		18
4.1	Analisis Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	18
4.1.1	Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	18
4.1.2	Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran COVID-19.....	22
4.1.3	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran COVID-19	25
4.2	Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19 Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar	33
4.3	Simulasi Numerik Model Matematika COVID-19	35
BAB V PENUTUP.....		42
5.1	Kesimpulan.....	42
5.2	Saran	43
DAFTAR PUSTAKA		44
LAMPIRAN		

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul Tabel	Halaman
4.1	Deskripsi Variabel pada Model Matematika Penyebaran COVID-19	20
4.2	Deskripsi Parameter pada Model Matematika Penyebaran COVID-19	20
4.3	Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran COVID-19	30
4.4	Nilai Awal Bidang Fase Model Matematika Penyebaran COVID-19	31

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Gambar	Halaman
4.1	Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran COVID-19	21
4.2	Grafik Bidang Fase Populasi Manusia Rentan dan Terinfeksi pada Model Matematika Penyebaran COVID-19	32
4.3	Grafik Simulasi Numerik Populasi Rentan Terinfeksi COVID-19	36
4.4	Grafik Simulasi Numerik Populasi Terpapar COVID-19	37
4.5	Grafik Simulasi Numerik Populasi Terinfeksi COVID-19	38
4.6	Grafik Simulasi Numerik Populasi Melakukan Pengobatan	39
4.7	Grafik Simulasi Numerik Populasi Sembuh dari COVID-19	40

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran
1	Perhitungan Titik Setimbang (Non Endemik E_0)
2	Perhitungan Nilai R_0 dengan Metode <i>Next-Generation Matrix</i>
3	Perhitungan Titik Setimbang Penyebaran penyakit COVID-19 (Endemik E_1)
4	Analisis Kestabilan Titik Non-Endemik
5	Analisis Kestabilan Titik Endemik
6	Aproksimasi Solusi Model Matematika COVID-19 dengan Metode Beda Hingga Tak Standar
7	Tetapan untuk Menentukan Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19 dengan Metode Beda Hingga Tak Standar
8	Kode Program Simulasi Numerik m.file
9	Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Titik Setimbang Non Endemik Model Matematika Penyebaran COVID-19
10	Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Titik Setimbang Endemik Model Matematika Penyebaran COVID-19
11	Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Bidang Fase Model Matematika Penyebaran COVID-19
12	Kode Program Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme seperti virus, bakteri, parasit, maupun jamur yang dapat berpindah dari satu inang ke inang yang lainnya. Penyakit menular dapat menyebar secara langsung dan tidak langsung. Penularan secara langsung dapat melalui sentuhan, dan kontak cairan tubuh sedangkan penularan secara tidak langsung seperti melalui udara, yang masuk melalui saluran pernapasan **(WHO, 2009)**. Penyakit menular ini dapat dicegah dengan adanya imunisasi maupun pemberian vaksinasi serta dapat juga dicegah dengan cara pola hidup yang sehat.

Munculnya wabah COVID-19 yang melanda dunia menjadi perhatian publik karena tingkat penularannya yang cepat dan banyaknya kasus kematian yang terjadi. Dengan demikian, pada tanggal 11 Maret 2020, WHO menetapkan COVID-19 sebagai endemi global. COVID-19 merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus corona atau SARS-CoV-2, yang merupakan virus berselubung RNA **(Zheng dkk. 2020)**. COVID-19 dapat ditransmisikan melalui droplet (percikan air liur) yang dihasilkan dari orang yang terinfeksi saat batuk, bersin, atau meludah.

Pada manusia, COVID-19 diketahui menyebabkan infeksi pernafasan mulai dari flu biasa, hingga penyakit yang lebih parah seperti *Middle East Respiratory Syndrome* (MERS) dan *Severe Acute Respiratory Syndrome* (SARS). Ada beberapa parameter yang diindikasikan memengaruhi penyebaran penyakit COVID-19 di dunia dalam waktu beberapa bulan ini, diantaranya adalah kontak fisik antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan. Parameter lain yang lebih mengkhawatirkan yaitu jika individu yang terpapar COVID-19 namun tanpa memiliki gejala melakukan kontak fisik dengan individu lain yang rentan terinfeksi. Karena tanpa adanya gejala inilah yang menyebabkan sulitnya mengetahui apakah individu tersebut terinfeksi virus ataupun tidak **(Sameni 2020)**.

Munculnya pandemi baru ini membuat para peneliti mengkaji permasalahan COVID-19 dari berbagai sudut pandang keilmuan, salah satunya adalah pemodelan matematika. Pemodelan matematika adalah salah satu bidang matematika yang menyajikan dan menjelaskan permasalahan real ke dalam bentuk matematis. Berbagai penelitian mengenai model matematika COVID-19 telah dikembangkan diantaranya adalah **Ullah dan Khan (2020)** yang telah mengembangkan model matematika COVID-19 dengan menambahkan analisis kontrol optimal dari sisi dampak intervensi non-farmatologi seperti menjaga jarak, karantina dan isolasi mandiri. **Sanchez dkk. (2020)** mengembangkan penelitian mengenai COVID-19 dengan mengkontruksi model matematika SITS dengan parameter fraktal dan menunjukkan dengan adanya aturan menjaga jarak dapat membuat stabilisasi infeksi tercapai lebih cepat. Selain itu, **Rafiq dkk. (2021)** mengembangkan model matematika SITS dengan cara membagi populasi individu rentan menjadi dua kelas yaitu populasi individu rentan terkena COVID-19 tanpa penyakit pembawa (*carrier*) dan individu rentan terkena COVID-19 dengan penyakit pembawa (*carrier*). Model yang terbentuk berupa sistem persamaan differensial biasa (SPDB) dan diselesaikan secara eksak dan numerik.

Aproksimasi solusi adalah salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi dari permasalahan model matematika dengan cara pendekatan numerik. Terdapat beberapa pendekatan numerik yang sering digunakan yaitu metode Runge-Kutta dan Euler. Namun kedua metode tersebut seringkali tidak memberikan solusi yang stabil (**Ndii 2018**). Oleh karena itu, **Mickens (2000)** memperkenalkan metode beda hingga tak standar yang merupakan pengembangan dari metode beda hingga dan memiliki solusi dengan pendekatan numerik yang cukup stabil. Metode beda hingga tak standar dapat digunakan untuk mencari aproksimasi solusi dari model matematika COVID-19.

Mengacu pada penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk mengkaji model dinamika penyebaran COVID-19 dan memodifikasi model matematika COVID-19 oleh **Rafiq dkk. (2021)** dengan mempertimbangkan populasi individu terpapar COVID-19. Selain itu penulis juga menerapkan metode beda hingga tak standar untuk menentukan aproksimasi solusi model matematika COVID-19.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka dapat dibentuk rumusan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan titik setimbang model matematika penyebaran COVID-19?
2. Bagaimana aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar?
3. Bagaimana simulasi numerik dan interpretasi dari model matematika penyebaran COVID-19?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, diperoleh tujuan dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis kestabilan titik setimbang model matematika penyebaran COVID-19.
2. Mengetahui aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar
3. Mengetahui simulasi numerik dan interpretasi dari model matematika penyebaran COVID-19.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pembaca dapat mengetahui analisis model matematika COVID-19 dengan memperhatikan populasi terpapar.
2. Pembaca dapat mengetahui aproksimasi solusi dan interpretasi dari model matematika penyebaran COVID-19.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari skripsi ini adalah:

1. Model dasar yang digunakan pada skripsi ini mengacu pada jurnal yang disusun oleh **Rafiq dkk. (2021)**.
2. Metode yang digunakan untuk aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 adalah metode beda hingga tak standar.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan di paparkan mengenai beberapa referensi yang menjadi acuan dalam pembahasan mengenai aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19.

2.1 Coronavirus disease 2019 (COVID-19)

Penyakit coronavirus 2019 (COVID-19) disebabkan oleh virus RNA. Virus ini termasuk dalam subfamili *Orthocoronavirinae* dalam famili *Coronaviridae* (Chen dkk. 2020). Saat ini COVID-19, SARS-CoV-2 diyakini salah satu dari tujuh anggota keluarga virus corona yang menginfeksi manusia, meskipun virus baru ini berbeda secara genetik. Sebagian CoV hingga 2020 yang diketahui menginfeksi pada manusia yaitu CoV 229E manusia, (HCoV-229E), HCoV-NL63, HCoV-OC43, HCoV-HKU1, SARS_CoV (Zhu dkk. 2019). Virus yang berasal dari Wuhan, Cina, telah menyebar dengan cepat ke seluruh dunia. Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) yang menyatakan infeksi COVID-19 sebagai pandemi global (WHO, 2020).

COVID-19 memasuki sel manusia melalui protein spike (S)-nya, permukaan glikoprotein tipe-I yang mengikat angiotensin I mengubah enzim 2 (ACE2), suatu seng dipeptidil karboksidiptidase yang homolog dengan enzim pengubah angiotensin 1 manusia. Enzim ini yang berperan sebagai reseptor COVID-19 (Hoffmann dkk, 2020). ACE2 tidak hanya diekspresikan di saluran pernapasan, paru-paru, hati, dan jantung, tetapi juga di sistem pencernaan dan ginjal. Ini secara tidak langsung mengatur Sistem Renin-Angiotensin (RAS) dan memerankan peran penting dalam regulasi neurohumoral dari sistem kardiovaskular (Li 2020).

Penyakit COVID-19 menyebar melalui droplet saat adanya interaksi secara langsung orang sehat dengan orang yang terinfeksi (melalui batuk dan bersin). Infeksi dapat menyebar melalui pembawa asimtomatik, presimtomatik, dan simptomatik. Gejala COVID-19 biasanya muncul sekitar 10-14 hari setelah manusia terpapar virus COVID-19. Gejala-gejala yang muncul antara lain demam,

batuk kering, sesak napas, kelelahan, batuk berdahak, sakit tenggorokan, sakit kepala, menggigil, mual atau muntah, hidung tersumbat, diare, dan pneumonia. Kasus COVID-19 yang parah dapat menimbulkan komplikasi pernapasan, hati, gastrointestinal, dan neurologis yang pada akhirnya harus menjalani rawat inap di rumah sakit bahkan dapat menyebabkan kematian **(Tang dkk. 2020)**.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang memuat n –buah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial diklasifikasikan berdasarkan tiga aspek yaitu tipe, orde, dan linearitas. Berdasarkan tipenya, persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Sementara, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat dua atau lebih variabel bebas. Orde dari persamaan diferensial dapat diperoleh dengan melihat tingkat turunan tertinggi dari persamaan diferensial tersebut. Berdasarkan linearitas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu linear dan non linear **(Zill dan Cullen, 2009)**.

Beberapa model matematika merupakan sistem persamaan diferensial non linear, karena pada persamaannya terdapat perkalian antar variabel terikat. Secara analitik solusi sistem persamaan diferensial non linear sulit untuk ditentukan. Sehingga, untuk menentukan solusi dari sistem persamaan diferensial tak linear dapat dicari melalui pendekatan linear dari model. Perilaku solusi sistem non linear dapat diketahui melalui hampiran linear dari sistem tersebut yang berada di sekitar titik setimbang.

Berikut ini diberikan beberapa definisi terkait persamaan diferensial dan titik setimbang:

Definisi 2.1 Sistem persamaan diferensial linear yang didefinisikan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.1)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*) dan A adalah matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real.

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.2 Jika A adalah matriks $n \times n$ dengan komponennya adalah bilangan real, maka matriks eksponensial e^{At} didefinisikan sebagai berikut:

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}.$$

(Bronson dan Costa, 2007)

Penyelesaian dari sistem (2.1) jika diberikan nilai awal $x(t_0) = x_0$ adalah:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Definisi 2.3 Sebuah sistem persamaan diferensial orde satu dalam n persamaan disebut sebagai sistem *autonomous* jika sistem tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan fungsi $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, tidak bergantung pada waktu. Dengan kata lain variabel t tidak muncul secara eksplisit pada ruas kanan pada masing-masing persamaan diferensial dari sistem. Jika variabel t muncul secara eksplisit pada persamaan diferensial maka dinamakan sistem non autonomous.

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.4 Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$. Sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$, dengan $0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik setimbang.

(Olsder, 2006)

2.3 Kestabilan Sistem Linear

Kestabilan dari titik setimbang model digunakan untuk mengetahui apakah solusi sistem menuju titik setimbang atau tidak. Pada penelitian ini, model yang akan dibahas berbentuk sistem persamaan diferensial non linear sehingga untuk menganalisis kestabilan titik setimbang diperlukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobian. Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema terkait analisis kestabilan sistem linear:

Definisi 2.5 Matriks Jacobian yang dinotasikan dengan J dibangun untuk melakukan linearisasi sistem persamaan diferensial non linear. Misalkan diberikan sistem persamaan *autonomous* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan fungsi $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, maka matriks Jacobian dari sistem persamaan di atas adalah:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.6 Misalkan A adalah matriks tak nol berukuran $n \times n$ atas bilangan real, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x,$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ .

(Anton dan Rorres, 2010)

Teorema 2.7 Misalkan A merupakan matriks tak nol berukuran $n \times n$ atas bilangan real. Skalar λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

(Anton dan Rorres, 2010)

Definisi 2.8 Sistem persamaan diferensial linear $\dot{x} = Ax(t)$ dengan A merupakan matriks tak nol berukuran $n \times n$ atas bilangan real, dikatakan stabil asimtotis jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

dengan $x(t)$ penyelesaian dari sistem tersebut, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dan 0 adalah titik setimbang dari sistem tersebut.

(Zill dan Cullen, 2009)

Teorema 2.9 Sistem persamaan diferensial linear $\dot{x} = Ax$, stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif atau dinotasikan sebagai $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n.$$

(Zill dan Cullen, 2009)

2.4 Kriteria Routh Hurwitz

Pada permasalahan tertentu, untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristik (λ) sulit dilakukan. Dari sini, diperlukan metode lain untuk menentukan tanda bagian real dari akar-akar persamaan karakteristik (λ). Salah satu metode yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menunjukkan

kestabilan suatu sistem dengan memperhatikan koefisien-koefisien persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Definisi 2.9 Diberikan persamaan karakteristik dengan derajat n sebagai berikut:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.3)$$

dengan a_j adalah bilangan real, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, sedangkan H_j merupakan matriks Hurwitz berisi koefisien a_j dari persamaan karakteristik (2.3) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$$\text{dengan } a_j = \begin{cases} a_j, & j \leq n \\ 0, & j > n. \end{cases}$$

(Merkin, 1997)

Teorema 2.10 Akar-akar dari persamaan (2.3) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\det(H_j) > 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

(Merkin, 1997)

Berdasarkan **Definisi 2.9** mengenai kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat

$n = 3$, maka bentuk persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.4) maka bentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan (2.4) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det(H_1) > 0, \det(H_2) > 0 \text{ dan } \det(H_3) > 0.$$

Dari sini didapatkan kondisi sebagai berikut:

- i. $\det(H_1) = |a_1| > 0$ didapatkan $a_1 > 0$.
- ii. $\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ didapatkan $a_1 a_2 > 0$. Dari sini diperoleh syarat bahwa $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.
- iii. $\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$ sehingga $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$, atau

$a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0$. Dengan demikian didapatkan dua kondisi yaitu:

1. $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$,
2. $a_3 < 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) < 0$.

Untuk kondisi (2) tidak akan terjadi, karena jika $a_3 < 0$ maka tidak mungkin $(a_1 a_2 - a_3) < 0$, sehingga $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$.

Dari kondisi-kondisi di atas dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan karakteristik (2.4) akan mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

(Merkin, 1997)

2.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar atau *Basic reproduction number* dilambangkan dengan R_0 . *Basic reproduction number* juga dikenal sebagai *basic reproduction rate* atau *basic reproduction ratio*. Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter yang penting dalam epidemiologi penyakit menular. Parameter ini didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder disebabkan oleh satu orang terinfeksi yang masuk pada suatu populasi rentan (**Diekmann, dkk, 2009**).

Metode untuk mendapatkan R_0 ada beberapa cara, yaitu melalui eksistensi titik setimbang, analisis kestabilan dan *Next-Generation Matrix* (NGM). Jika $R_0 > 1$, maka individu yang terinfeksi akan selalu meningkat dan penyebaran penyakit akan selalu ada. Sebaliknya, jika $R_0 < 1$, maka individu yang terinfeksi akan selalu berkurang dan penyebaran penyakit akan menghilang (**Brauer dkk, 2008**).

2.6 Beda Hingga Standar

Metode beda hingga didasarkan pada ekspansi deret Taylor untuk melakukan aproksimasi turunan. Ekspansi deret Taylor untuk fungsi $u(x_j + h)$ di sekitar titik $x = x_j$ dapat ditulis sebagai berikut

$$u(x_j + h) = u(x_j) + \frac{h}{1!}u'(x_j) + \frac{h^2}{2!}u''(x_j) + \dots \quad (2.5)$$

Dari persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j + h) - u(x_j)}{h} + O(h),$$

dengan $O(h)$ merupakan galat.

Dengan demikian diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik $x = x_j$ yaitu

$$u'(x_j) = \frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}. \quad (2.6)$$

Pendekatan turunan pada persamaan (2.6) merupakan pendekatan beda maju.

Ekspansi deret Taylor untuk fungsi $u(x_j - h)$ di sekitar titik $x = x_j$ dapat ditulis sebagai berikut

$$u(x_j - h) = u(x_j) - \frac{h}{1!}u'(x_j) + \frac{h^2}{2!}u''(x_j) - \dots \quad (2.7)$$

Dari persamaan (2.7) dapat dituliskan sebagai berikut

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j) - u(x_j - h)}{h} + O(h),$$

dengan $O(h)$ merupakan galat.

Dari sini, diperoleh pendekatan turunan pertama pada titik $x = x_j$ yaitu

$$u'(x_j) = \frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}. \quad (2.8)$$

Berdasarkan persamaan (2.8) diperoleh pendekatan turunan yang merupakan beda mundur. Pendekatan turunan di sekitar titik $x = x_j$ dapat dicari yaitu mengurangkan persamaan (2.5) dengan persamaan (2.7) maka diperoleh

$$u(x_j + h) - u(x_j - h) = 2hu'(x_j) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_j) + \dots \quad (2.9)$$

Dari persamaan (2.9) didapatkan

$$u'(x_j) = \frac{u(x_j+h) - u(x_j-h)}{2h} + O(h^2) = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}, \quad (2.10)$$

dengan $O(h^2)$ merupakan galat.

Pendekatan turunan pada persamaan (2.10) disebut pendekatan beda pusat.

(Suryanto, 2012)

Metode beda hingga yang sering digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah metode Euler. Salah satu metode Euler yang sering digunakan merupakan metode Euler maju. Sebagai contoh, diberikan sistem persamaan diferensial dibawah ini

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y).$$

Dari sistem persamaan diferensial tersebut, ruas kirinya didekati oleh beda maju sehingga menjadi

$$\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} \approx f(x(t_n), y(t_n)),$$

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} \approx g(x(t_n), y(t_n)).$$

Kemudian diskritisasi dengan metode Euler dan diperoleh bentuk

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n)),$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n)),$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

(Boyce dan Diprima, 2012)

2.7 Beda Hingga Tak Standar

Salah satu metode numerik dalam skema beda hingga yang relatif stabil dinamakan beda hingga tak standar (MBHTS) yang merupakan pengembangan dari metode beda hingga standar. Metode ini diajukan oleh **Mickens (2000)** yang memiliki beberapa aturan dalam melakukan konstruksi model menjadi model beda hingga tak standar.

Metode ini dikatakan metode beda hingga tak standar karena setiap persamaan diferensial dikonstruksi dengan cara yang berbeda dan setidaknya memenuhi salah satu dari dua kondisi dibawah ini.

1. Turunan diskrit memiliki representasi sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{k+1} - \Psi(h)x_k}{\phi(h)}, h = \Delta t,$$

Dengan $\Psi(h)$ dan $\phi(h)$ memenuhi kondisi berikut

$$\Psi(h) = 1 + O(h^2), \phi(h) = h + O(h^2).$$

2. Terminologi linear dan non-linear dapat mensyaratkan representasi non-lokal, sebagai berikut

$$x \approx 2x_k - x_{k+1},$$

$$x^2 \approx x_k x_{k+1}.$$

Setelah melakukan konstruksi model menggunakan skema ini, maka akan dihasilkan system diskrit. Umumnya fungsi $\Psi(h)$ dan $\phi(h)$ adalah sebagai berikut

$$\phi(h) = \frac{1-e^{kh}}{k} \text{ dan } \Psi(h) = 1.$$

Setelah melakukan konstruksi model menggunakan skema ini, maka akan dihasilkan sistem diskrit.

(Ndii, 2018)

BAB III

METODE PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 menggunakan metode beda hingga tak standar adalah:

1. Melakukan studi literatur terkait model COVID-19 melalui buku referensi dan jurnal maupun artikel, mengenai definisi COVID-19 serta teorema titik setimbang endemik dan non endemik. Selain itu penulis juga mengkaji literatur dari penelitian terdahulu mengenai model matematika COVID-19.
2. Memodifikasi model matematika COVID-19 bi-modal dari **Rafiq dkk. (2021)**.
3. Menganalisis model matematika penyebaran COVID-19.
Langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:
 - a. Menentukan titik setimbang model matematika COVID-19.
 - b. Melinearisasi model matematika COVID-19 dengan menggunakan matriks Jacobian.
 - c. Mensubstitusikan titik setimbang yang diperoleh ke dalam matriks Jacobian sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial yang linear.
 - d. Menganalisis kestabilan dari titik setimbang yang diperoleh.
4. Melakukan aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar.
 - a. Mendiskritisasi Model Matematika penyebaran COVID-19.
 - b. Menentukan tetapan beda hingga tak standar dari model matematika penyebaran COVID-19.
5. Melakukan simulasi numerik dengan membandingkan grafik hasil simulasi numerik model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar dan ODE 45.
6. Menginterpretasi hasil simulasi dari model matematika COVID-19 dengan menggunakan *software* Matlab.

7. Menarik kesimpulan baik dari hasil analisis model matematika dan hasil aproksimasi solusi yang didapat.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikaji aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar. Sebelum membahas aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19, akan dilakukan analisis kestabilan model matematika penyebaran COVID-19. Analisis yang dilakukan meliputi penentuan titik setimbang non endemik dari model, *Basic Reproduction Number* (R_0), analisis kestabilan dari titik setimbang non endemik, titik setimbang endemik dari model, analisis kestabilan dari titik setimbang non endemik. Aproksimasi solusi model matematika dilakukan dengan cara menentukan tetapan ($\phi(h)$) beda hingga tak standar model matematika penyebaran COVID-19 dan mendiskritisasi model matematika penyebaran COVID-19. Pada bab ini juga akan dilakukan simulasi numerik dari hasil analisis kestabilan dan aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 yang didapat.

4.1 Analisis Model Matematika Penyebaran COVID-19

Pada subbab ini dibahas mengenai analisis kestabilan model matematika penyebaran COVID-19 meliputi titik setimbang, kestabilan lokal yang diperoleh dari titik setimbang, dan bilangan reproduksi dasar. Sebelum dilakukan analisis model, terlebih dahulu dikonstruksi model matematika penyebaran COVID-19.

4.1.1 Model Matematika Penyebaran COVID-19

Model matematika penyebaran COVID-19 merujuk pada **Rafiq, dkk.** Yang terdiri dari lima kompartemen yaitu populasi manusia rentan terkena COVID-19 yang memiliki penyakit pembawa (*Carrier*) dan tidak memiliki penyakit pembawa, populasi manusia terinfeksi, populasi manusia melakukan pengobatan, dan populasi manusia sembuh.

Modifikasi dilakukan dengan menghilangkan kompartemen populasi rentan terkena COVID-19 yang memiliki penyakit pembawa dan menambahkan kompartemen populasi terpapar. Maka dari itu terjadi perubahan laju penyebaran infeksi dari populasi rentan terkena COVID-19 yang memiliki penyakit pembawa

menjadi laju penyebaran infeksi dari populasi manusia terpapar COVID-19. Selain itu juga dilakukan penambahan parameter laju pengobatan populasi terpapar. Sedemikian sehingga pada model matematika penyebaran COVID-19 yang telah dimodifikasi, terdapat lima kompartemen yaitu populasi manusia yang sehat tetapi rentan terkena COVID-19 ($S(t)$), populasi manusia terpapar COVID-19 ($E(t)$), populasi manusia terinfeksi ($I(t)$), populasi manusia yang menjalani pengobatan ($T(t)$), dan populasi manusia sembuh ($R(t)$).

Dalam model matematika COVID-19 terdapat beberapa asumsi yang digunakan, sebagai berikut :

- a. Laju kematian dianggap konstan untuk semua subpopulasi.
- b. Laju penyebaran infeksi COVID-19 berasal dari populasi manusia terinfeksi dan populasi manusia terpapar memiliki nilai yang berbeda dan bersifat konstan.
- c. Laju rekrutmen penyebaran populasi dianggap konstan.
- d. Laju pengobatan digunakan untuk mewakili tingkat populasi yang melakukan pengobatan dengan perlakuan medis bersifat konstan.
- e. Laju penyembuhan COVID-19 dianggap konstan.
- f. Laju kematian karena COVID-19 diabaikan.

Berikut diberikan definisi dari masing-masing variabel dan parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran COVID-19 pada manusia yang tertera pada table **Tabel 4.1** dan **Tabel 4.2**.

Tabel 4.1 Deskripsi Variabel pada Model Penyebaran COVID-19

Variabel	Deskripsi
$S(t)$	Populasi individu yang rentan terinfeksi COVID-19 pada saat t
$E(t)$	Populasi individu yang terpapar COVID-19 pada saat t
$I(t)$	Populasi individu yang terinfeksi pada saat t
$T(t)$	Populasi individu yang melakukan pengobatan pada saat t
$R(t)$	Populasi individu yang sembuh pada saat t

Selanjutnya untuk alasan kesederhanaan maka notasi $S(t), E(t), I(t), T(t)$, dan $R(t)$ berturut-turut dituliskan dengan S, E, I, T , dan R . Jika N menyatakan total populasi, maka $N = S + E + I + T + R$. Notasi-notasi tersebut menyatakan jumlah populasi tertentu pada waktu t sehingga diasumsikan:

$$S > 0 \text{ sedangkan } E, I, T \text{ dan } R \geq 0.$$

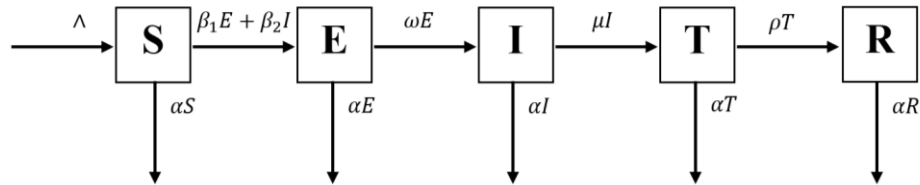
Tabel 4.2 Deskripsi parameter pada model matematika penyebaran COVID-19

Parameter	Deskripsi
Λ	Laju masuknya populasi rentan terkena COVID-19 dengan gejala
α	Laju kematian alami
β_1	Laju infeksi COVID-19 populasi terpapar COVID-19
β_2	Laju infeksi COVID-19 populasi terinfeksi COVID-19
μ	Laju pengobatan dari COVID-19
ρ	Laju penyembuhan dari COVID-19
ω	Laju penyebaran individu terpapar

Selanjutnya $\Lambda, \alpha, \beta_1, \beta_2, \mu$, dan ω adalah parameter yang menyatakan laju

sehingga diasumsikan $0 < \Lambda, \alpha, \beta_1, \beta_2, \mu, \omega < 1$.

Berdasarkan asumsi dan parameter diatas, maka dapat dibentuk diagram transmisi model matematika penyebaran COVID-19 sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran COVID-19

Keterangan :

→ : Mengurangi jumlah populasi awal dan menambah jumlah populasi yang dituju

Berdasarkan diagram transmisi diatas maka didapatkan model matematika penyebaran COVID-19 sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Persamaan (4.1.1) menyatakan laju perubahan populasi rentan terkena COVID-19 terhadap waktu. Populasi individu yang rentan terkena COVID-19 bertambah karena adanya laju masuknya kelas rentan terkena COVID-19 (Λ), dan berkurang karena adanya laju kematian populasi rentan terkena COVID-19 sebesar

(αS) , serta laju infeksi dengan interaksi populasi terpapar sebesar $(\beta_1 ES)$, dan laju masuknya infeksi dengan interaksi populasi terinfeksi sebesar $(\beta_2 IS)$.

Persamaan (4.1.2) menyatakan laju perubahan populasi terpapar COVID-19 terhadap waktu. Populasi individu yang terpapar COVID-19 bertambah karena adanya laju infeksi dengan interaksi populasi terpapar sebesar $(\beta_1 ES)$, dan laju masuknya infeksi dengan interaksi populasi terinfeksi sebesar $(\beta_2 IS)$, dan berkurang karena adanya laju kematian populasi terpapar COVID-19 sebesar (αE) serta laju penyebaran infeksi individu terpapar sebesar (ωE) .

Persamaan (4.1.3) menyatakan laju perubahan populasi terinfeksi virus COVID -19 terhadap waktu. Populasi individu yang terinfeksi virus COVID-19 bertambah karena adanya laju penyebaran infeksi individu terpapar sebesar (ωE) , dan berkurang karena adanya laju kematian populasi terinfeksi virus COVID-19 (αI) , serta laju populasi yang menjalani pengobatan dari COVID-19 (μI) .

Persamaan (4.1.4) menyatakan laju perubahan populasi yang menjalani pengobatan terhadap waktu. Populasi individu yang menjalani pengobatan dari COVID-19 bertambah karena adanya laju populasi yang menjalani pengobatan dari COVID-19 (μI) , dan berkurang karena adanya laju kematian populasi yang sedang menjalani pengobatan dari COVID-19 (αT) , serta laju populasi yang sedang mengalami penyembuhan dari COVID-19 (ρT) .

Persamaan (4.1.5) menyatakan laju perubahan populasi sembuh dari COVID-19 terhadap waktu. Populasi individu yang sembuh dari penyakit COVID-19 bertambah karena adanya laju populasi yang sedang mengalami penyembuhan dari COVID-19 (ρT) , dan berkurang karena adanya laju kematian populasi sembuh dari COVID-19 (αR) .

4.1.2 Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran COVID-19

Keadaan setimbang merupakan kondisi dimana tidak ada perubahan jumlah populasi pada setiap saat subpopulasi model sepanjang waktu. Berdasarkan definisi

titik setimbang, model penyebaran COVID-19 memiliki titik setimbang jika memenuhi $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$.

Berdasarkan sistem persamaan (4.1.1)-(4.1.5) diatas diperoleh dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit (non endemik) dan titik setimbang adanya infeksi penyakit (endemik). Titik setimbang non endemik adalah suatu kondisi dimana tidak terjadi penularan penyakit COVID-19 pada manusia. Misalkan titik setimbang bebas penyakit dinyatakan sebagai $E_0 = (S, E, I, T, R)$. Untuk mencari titik setimbang non endemik, karena tidak terjadi penyebaran, maka $E = I = T = 0$ dengan perhitungan yang terdapat pada **Lampiran 1**, diperoleh $E_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0\right)$.

Setelah menentukan titik setimbang non endemik, akan ditentukan nilai dari *basic reproduction number* (R_0) yang bertujuan untuk menentukan ambang batas suatu keadaan yang menunjukkan bahwa penyebaran COVID-19 mengalami kondisi endemik dan non endemik. Penentuan kriteria endemik penyakit pada populasi (R_0) diperoleh dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi yaitu dengan menggunakan metode NGM (*Next Generation Matrix*) yang dikenalkan oleh **Chevaz dkk (2001)**. Untuk menghitung nilai (R_0) yaitu dengan membangun matriks yang membangkitkan jumlah individu baru yang terinfeksi COVID-19.

Misalkan $x = (E, I, T)^T$, maka persamaan pada model dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - Z(x),$$

dengan $F(x)$ adalah matriks transmisi yang elemennya berisi populasi yang terinfeksi akibat interaksi dengan E, I dan T , sedangkan $Z(x)$ menyatakan matriks transisi, matriks yang berisi populasi yang terinfeksi yang tidak memuat suku interaksi penularan. Dari sini diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1 ES + \beta_2 IS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } Z = \begin{pmatrix} (\omega + \alpha)E \\ -\omega E + (\mu + \alpha)I \\ -\mu I + (\rho + \alpha)T \end{pmatrix}.$$

Misalkan F dan Z adalah matriks Jacobian dari $F(x)$ dan $Z(x)$ yang telah disubstitusi titik setimbang $E_0 = (\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0)$. Dengan demikian diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha} & \frac{\beta_2 \Lambda}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } Z = \begin{pmatrix} \omega + \alpha & 0 & 0 \\ -\omega & \mu + \alpha & 0 \\ 0 & -\mu & \rho + \alpha \end{pmatrix}.$$

Dengan metode NGM, R_0 diperoleh dengan menentukan nilai eigen terbesar dari matriks $R = FZ^{-1}$, sehingga didapatkan

$$R_0 = \frac{\beta_1 \Lambda (\mu + \alpha) + \beta_2 \Lambda \omega}{\alpha (\omega + \alpha) (\mu + \alpha)},$$

Perhitungan lebih lengkap dapat dilihat pada **Lampiran 2**.

Titik setimbang endemik adalah suatu keadaan ketika terjadi penyebaran COVID-19 dalam suatu populasi. Titik setimbang didapatkan saat $I \neq 0$. Dari persamaan (4.1.1)-(4.1.5) diperoleh titik setimbang endemik dapat dinyatakan dalam $E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$, dengan

$$S^* = \frac{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\beta_1(\mu + \alpha)I + \beta_2 I \omega}$$

$$E^* = \frac{(\mu + \alpha)I^*}{\omega}$$

$$I^* = \left(\left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) \right)$$

$$T^* = \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)}$$

$$R^* = \frac{\rho \mu I^*}{\alpha(\rho + \alpha)}$$

Karena semua nilai kompartemen bergantung pada I^* , sebagai titik setimbang E^* akan eksis jika memenuhi syarat $I^* > 0$ sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) > \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} \frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} > \frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta_1\Lambda(\mu + \alpha) + \beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} > 1 \\
&\Leftrightarrow R_0 > 1.
\end{aligned}$$

Jadi titik setimbang E_1 akan eksis saat $R_0 > 1$. Uraian lebih lengkap mengenai titik setimbang endemik dapat dilihat pada **Lampiran 3**.

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan masing-masing titik setimbang tersebut. Kestabilan dari masing-masing titik setimbang tersebut dapat membantu untuk mengetahui dinamika perilaku sistem pada model matematika penyebaran COVID-19.

4.1.3 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran COVID-19

Pada subbab ini dianalisis kestabilan berdasarkan titik setimbang non-endemik (E_0) dan titik setimbang endemik (E_1) yang telah diperoleh. Pada persamaan (4.1.1)-(1.1.5) berbentuk sistem *autonomous* tak linear. Oleh karena itu perlu dilakukan linearisasi menggunakan matriks *Jacobian* untuk menguji kestabilan asimtotis lokal dari titik setimbang.

Persamaan (4.1.1)-(4.1.5) dapat ditulis sebagai fungsi dari variabel S, E, I, T, R dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= g_1(S, E, I, T, R) \\
\frac{dE}{dt} &= g_2(S, E, I, T, R) \\
\frac{dI}{dt} &= g_3(S, E, I, T, R) \\
\frac{dT}{dt} &= g_4(S, E, I, T, R)
\end{aligned}$$

$$\frac{dR}{dt} = g_5(S, E, I, T, R)$$

Berdasarkan **Definisi 2.5** maka matriks *Jacobian* dari persamaan (4.1.1)-(4.1.5) adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial T} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial T} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh matriks *Jacobian* sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 E - \beta_2 I - \alpha & -\beta_1 S & -\beta_2 S & 0 & 0 \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (\omega + \alpha) & \beta_2 S & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Berdasarkan penjelasan pada **Teorema 2.9**, dalam menganalisis kestabilan dari titik setimbang dapat diperiksa melalui nilai eigen matriks *Jacobian* dari persamaan (4.1.1)-(4.1.5). selanjutnya akan dianalisis kestabilan asimtotis lokal dari titik setimbang non endemik (E_0) dan (E_1).

a. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Non Endemik

Langkah pertama menentukan kestabilan pada titik setimbang non endemik yaitu dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang non endemik $E_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0\right)$ ke matriks *Jacobian* (4.2), dengan demikian diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan matriks $J(E_0)$ yang diperoleh, maka dapat ditentukan persamaan karakteristik menggunakan $\det(J(E_0 - \lambda I)) = 0$ adalah sebagai berikut:

$$(\lambda + \alpha)(\lambda + \alpha)(\lambda + \rho + \alpha)(\lambda^2 + a_1 + a_2) = 0, \quad (4.3)$$

dengan

$$a_1 = \mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha},$$

$$a_2 = \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha}.$$

Berdasarkan persamaan (4.3) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$, $\lambda_3 = -(\rho + \alpha)$ dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \quad (4.4)$$

Menurut **Teorema 2.9**, titik setimbang non endemik tersebut akan stabil asimtotis jika dan hanya jika semua nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ mempunyai bilangan real yang bernilai negatif. Berdasarkan uraian sebelumnya, jelas bahwa λ_1, λ_2 , dan λ_3 bernilai negatif sebab semua parameter pada model matematika penyebaran COVID-19 bernilai positif. Selanjutnya, akan ditentukan syarat agar persamaan (4.4) memiliki akar-akar real negatif. Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* akar – akar persamaan karakteristik (4.4) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1, a_2 > 0$ sehingga didapatkan keadaan sebagai berikut:

i. Pandang $a_1 = \mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}$.

Syarat untuk $a_1 > 0$ adalah sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow a_1 = \mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu + 2\alpha + \omega > \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha(\mu + 2\alpha + \omega)},$$

Supaya syarat $a_1 > 0$ terpenuhi, maka $R_1 = \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha(\mu+2\alpha+\omega)} < 1$

ii. Pandang $a_2 = \frac{\Lambda}{\alpha}\mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}\alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha}$.

Syarat untuk $a_2 > 0$ adalah sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda}{\alpha}\mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}\alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} > 0$$

$$\Leftrightarrow -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}\mu - \beta_1 \Lambda - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} + (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) > \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}\mu + \beta_1 \Lambda + \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) > \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}(\mu + \alpha) + \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{\beta_1 \Lambda(\mu + \alpha) + \beta_2 \Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 1 > R_0. \quad (4.5)$$

Dari sini dapat diketahui a_2 akan bernilai positif jika memenuhi syarat $R_0 < 1$.

Berikutnya akan dilihat hubungan antara R_0 dan R_1 , sehingga $R_0 - R_1$

$$\begin{aligned} R_0 - R_1 &= \frac{\beta_1 \Lambda(\mu + \alpha) + \beta_2 \Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} - \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha(\mu + 2\alpha + \omega)} \\ &= \frac{\beta_1 \Lambda(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)} + \frac{\beta_2 \Lambda\omega(\mu + 2\alpha + \omega)}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)} - \\ &\quad \frac{\beta_1 \Lambda(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\alpha(\mu + 2\alpha + \omega)(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} \\ &= \frac{\beta_1 \Lambda(\mu + \alpha)((\mu + 2\alpha + \omega) - (\omega + \alpha))}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)} + \frac{\beta_2 \Lambda\omega(\mu + 2\alpha + \omega)}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)} \\ &= \frac{\beta_1 \Lambda(\mu + \alpha)(\mu + \alpha)}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)} + \frac{\beta_2 \Lambda\omega(\mu + 2\alpha + \omega)}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\mu + 2\alpha + \omega)}. \end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka jelas bahwa $R_0 - R_1 > 0$.

Dengan demikian didapatkan $R_0 > R_1$.

Berdasarkan uraian diatas, titik setimbang non endemik E_0 akan stabil asimtotis jika $R_1 < R_0 < 1$. Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran penyakit akan menghilang dari populasi. Perhitungan lebih lengkap pencarian persamaan karakteristik titik setimbang non endemik (E_0) dapat dilihat pada **Lampiran 4**.

b. Analisis Kestabilan dari Titik Setimbang Endemik

Penentuan kestabilan pada titik setimbang endemik didapatkan dengan cara mensubstitusikan nilai titik setimbang E_1 yang telah didapatkan kedalam matriks *Jacobian*, maka diperoleh :

$$\Leftrightarrow J(E_1) = \begin{pmatrix} -\beta_1 E^* - \beta_2 I^* - \alpha & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* & 0 & 0 \\ \beta_1 E^* + \beta_2 I^* & \beta_1 S^* - (\omega + \alpha) & \beta_2 S^* & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, matriks *Jacobian* di atas dibentuk menjadi persamaan karakteristik dengan menggunakan $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$ sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda + (\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

dengan,

$$n_1 = (\mu + \alpha)(\mu + \alpha)$$

$$n_2 = \beta_1(\mu + \alpha)I + \beta_2 I \omega$$

$$n_3 = (\mu + \alpha)I^*$$

$$n_4 = \omega$$

$$n_5 = \alpha \omega (\omega + \alpha)(\mu + \alpha)$$

$$n_6 = \Lambda - \beta_1(\mu + \alpha)^2(\omega + \alpha) - \beta_2(\omega + \alpha)(\mu + \alpha).$$

Dari sini didapatkan akar-akar persamaan dari matriks *Jacobian* (4.6)

$$\Leftrightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda + \rho + \alpha)(\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) = 0 \quad (4.7)$$

dengan nilai b_1 , b_2 , dan b_3 dapat dilihat pada adalah sebagai berikut:

$$b_1 = (\mu + \alpha) - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + (\omega + \alpha) + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha$$

$$b_2 = \left(-(\mu + \alpha)\beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \alpha\beta_1 \frac{n_1}{n_2} b\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + (\omega + \alpha)\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + (\mu + \alpha)\beta_2 \frac{n_5}{n_6} + (\omega + \alpha)\beta_2 \frac{n_5}{n_6} - \omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \alpha(\mu + \alpha) + (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) + (\omega + \alpha)^2 \right)$$

$$b_3 = (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \alpha(\mu + \alpha)\beta_1 \frac{n_1}{n_2} - \alpha\omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} (\omega + \alpha)^2 (\mu + \alpha)$$

Berdasarkan persamaan (4.7), diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\alpha$ dan $\lambda_2 = -(\rho + \alpha)$. Oleh karena $\rho, \alpha > 0$ maka jelas bahwa $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Sedangkan nilai eigen yang lain diperoleh dari akar-akar dari persamaan karakteristik berikut:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0. \quad (4.8)$$

Untuk menentukan akar-akar dari persamaan karakteristik (4.8) sulit untuk dilakukan secara analitik karena berupa persamaan karakteristik berderajat tiga dan mengandung banyak parameter, sehingga titik setimbang endemik ini akan di analisis melalui simulasi numerik dengan menggunakan bidang fase dengan bantuan *software* Matlab. Kode program untuk simulasi bidang fase dapat dilihat pada **Lampiran 7**.

Simulasi numerik dilakukan dengan memasukkan nilai parameter dan 3 nilai awal yang berbeda pada masing-masing kompartemen. Adapun nilai parameter yang digunakan disajikan pada **Tabel 4.3**.

Tabel 4.3 Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran COVID-19

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
Λ	5000	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)
α	0,1	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)
β_1	0,00001	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)
β_2	0,00006	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)

μ	0,76	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Asumsi
ρ	1,05	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)
ω	0,77	$\frac{\text{populasi}}{\text{hari}}$	Nazir dkk. (2020)

Berikut ini tiga nilai awal yang berbeda untuk masing-masing populasi S, E, I, T , dan R pada model matematika penyebaran COVID-19 yang dinotasikan dengan $S(0), E(0), I(0), T(0)$, dan $R(0)$. Hal ini bertujuan untuk mengetahui kekonvergenan solusi dari masing-masing nilai awal dan parameter yang digunakan. Simulasi dilakukan pada saat $t = 0$ sampai dengan $t = 10$. Adapun nilai awal yang digunakan, disajikan pada **Tabel 4.4**.

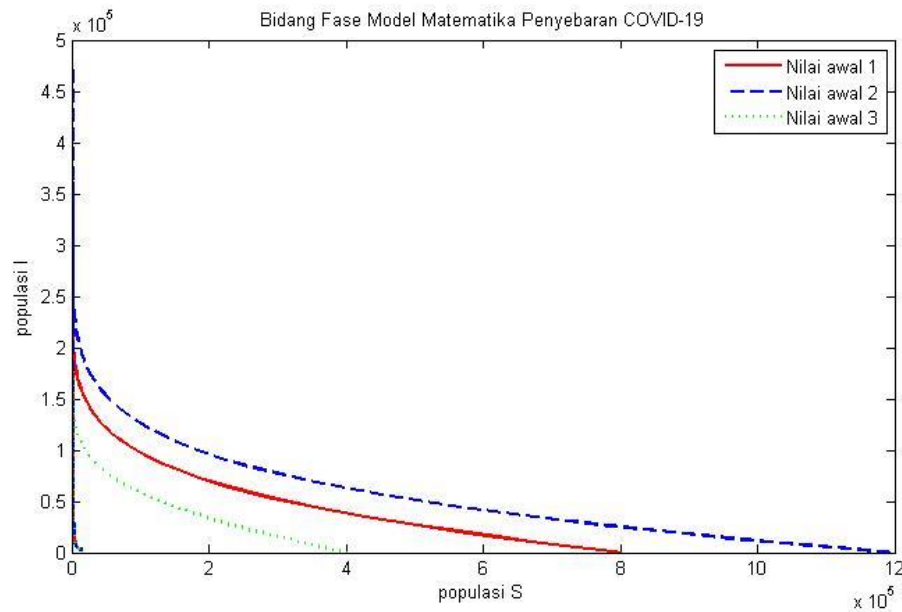
Tabel 4.4 Nilai Awal untuk Bidang Fase Model Matematika Penyebaran COVID-

19

Nilai Awal	$S(0)$	$E(0)$	$I(0)$	$T(0)$	$R(0)$	Warna
1	800000	200000	200	150	50	Merah
2	1200000	250000	250	200	50	Biru
3	400000	150000	150	100	50	Hijau

Berikut ini adalah gambar dari bidang fase model matematika penyebaran COVID-

19



Gambar 4.2 Grafik Bidang Fase Populasi $S - I$ pada Model Matematika Penyebaran COVID-19

Gambar 4.2 menunjukkan simulasi bidang fase untuk populasi individu yang rentan terkena COVID-19 dan populasi individu terinfeksi COVID-19 pada model matematika penyebaran COVID-19. Berdasarkan tiga nilai awal yang berbeda dan nilai parameter yang diberikan, terlihat bahwa grafik populasi S dan I cenderung konvergen ke satu titik, yaitu $(S, I) = (0,1365 \times 10^5 ; 0,0374 \times 10^5)$. Hal ini berarti secara keseluruhan penyebaran COVID-19 bergerak menuju satu titik setimbang endemik $E_1 = (0,1365 \times 10^5 ; 0,0481 \times 10^5 ; 0,0374 \times 10^5 ; 0,0247 \times 10^5 ; 0,2598 \times 10^5)$. Nilai E_1 diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter yang tertera pada **Tabel 4.3** ke titik setimbang endemik E_1 yang diperoleh secara analitik. Berdasarkan nilai parameter tersebut, kemudian diperoleh $R_0 = 3,6621 > 1$.

Berdasarkan hasil simulasi pada **Gambar 4.2** diperoleh kesimpulan bahwa titik setimbang endemik model matematika penyebaran COVID-19 akan cenderung stabil asimtotis jika $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa jika $R_0 > 1$, maka individu terinfeksi COVID-19 dapat menyebarkan COVID-19 kepada individu lain

atau dengan kata lain terjadi penyebaran COVID-19. Kode program bidang fase model matematika penyebaran COVID-19 dapat dilihat pada **Lampiran 11**.

4.2 Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19 Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar

Pada subbab ini membahas aproksimasi solusi untuk mencari hampiran nilai yang tepat dari model matematika penyebaran COVID-19. Aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan metode beda hingga tak standar dilakukan dengan cara mendiskritisasi model matematika COVID-19. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik dengan *Software* MATLAB untuk mengetahui titik setimbang dan *Basic Reproduction Number*. Hal tersebut dilakukan untuk mengetahui adanya penyebaran COVID-19.

Aproksimasi solusi dengan metode beda hingga tak standar dilakukan dengan cara sistem persamaan (4.1.1)-(4.1.5) didiskritisasi menggunakan metode beda hingga tak standar seperti yang telah di jelaskan pada subbab (2.6). penggantian pada turunan orde pertama diskrit di dekati dengan beda maju tetapi dengan menggunakan fungsi penyebut $\phi(h)$ sehingga dikenal dengan perluasan beda maju. Fungsi tersebut digunakan agar jumlah total populasi eksak tetap terjaga. Yaitu dengan cara mendiskritisasi persamaan (4.1.1)-(4.1.5) dan didapat persamaan berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^{n+1} - N^n}{\phi(h)} = \Lambda - \alpha N. \quad (4.7)$$

Persamaan di atas merupakan bentuk diskritisasi tak standar dari persamaan populasi total (N) sehingga fungsi penyebut $\phi(h)$ dapat diperoleh saat $t = t^{n+1}$ yaitu $N^{n+1} = \frac{1}{\alpha} [\Lambda - (\Lambda - \alpha N_0)e^{-\alpha t}]$. Menggunakan penyelesaian sistem persamaan diferensial diperoleh bahwa solusi khusus dengan penyebut harus memenuhi

$$\phi(h) = \frac{(1 - e^{-\alpha h})}{\alpha} \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) dapat ditentukan nilainya yaitu saat $h > 0$ dan $h \leq \infty$ sedemikian sehingga diperoleh

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-e^{-ah})}{\alpha} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(1-e^{-ah})}{\alpha} = \frac{1}{\alpha},$$

dari pendekatan tersebut, dapat disimpulkan nilai $\phi(h)$ adalah $0 \leq \phi(h) \leq \frac{1}{\alpha}$. Oleh karena itu, proses diskritisasi menggunakan skema beda hingga tak standar pada model penyebaran COVID-19 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{S^{n+1}-S^n}{\phi(h)} &= \Lambda - \beta_1 E^n S^{n+1} - \beta_2 I^n S^{n+1} - \alpha S^{n+1} \\ \frac{E^{n+1}-E^n}{\phi(h)} &= \beta_1 E^n S^{n+1} + \beta_2 I^n S^{n+1} - (\omega + \alpha) E^{n+1} \\ \frac{I^{n+1}-I^n}{\phi(h)} &= \omega E^{n+1} - (\mu + \alpha) I^{n+1} \\ \frac{T^{n+1}-T^n}{\phi(h)} &= \mu I^{n+1} - (\rho + \alpha) T^{n+1} \\ \frac{R^{n+1}-R^n}{\phi(h)} &= \rho T^{n+1} - \alpha R^{n+1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Skema beda hingga tak standar di atas memenuhi total populasi konstan $S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t) = 0$ sehingga memenuhi hukum konservasi. Dari persamaan (4.9) diperoleh bentuk eksplisit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= \frac{\phi(h)(\Lambda) + S(n)}{1 + \phi(h)[\beta_1 E(n) + \beta_2 I(n) + \alpha]} \\ E^{n+1} &= \frac{\phi(h)[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1)] + E(n)}{1 + \phi(h)(\omega + \alpha)} \\ I^{n+1} &= \frac{\phi(h)[\omega E(n+1)] + I(n)}{1 + \phi(h)(\mu + \alpha)} \\ T^{n+1} &= \frac{\phi(h)\mu I(n+1) + T(n)}{1 + \phi(h)(\rho + \alpha)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$R^{n+1} = \frac{\phi(h)\rho T(n+1)+R(n)}{1+\phi(h)\alpha}.$$

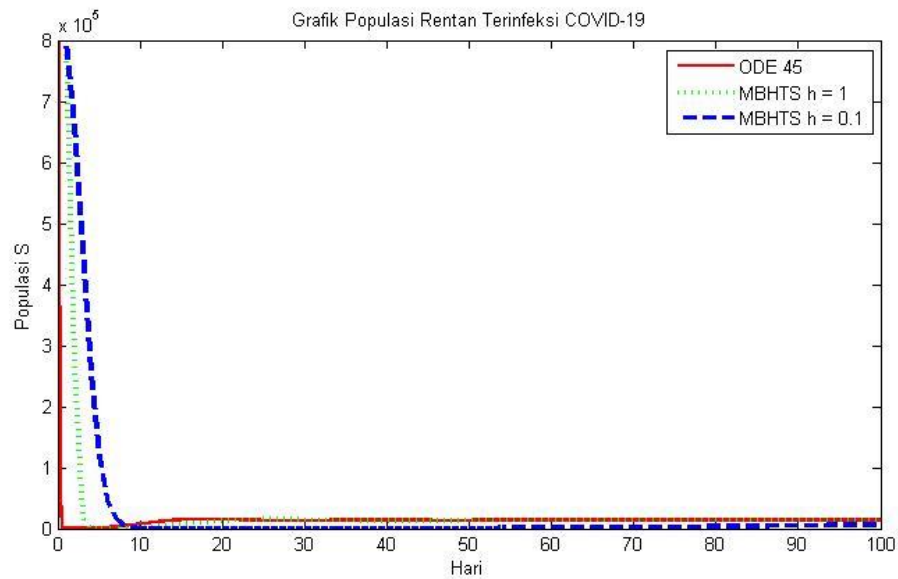
Setelah didapatkan bentuk diskritisasi model matematika penyebaran COVID-19 pada persamaan (4.10), selanjutnya akan ditentukan aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 dengan bantuan *Software* MATLAB.

4.3 Simulasi Numerik Model Matematika COVID-19

Pembahasan pada subbab ini bertujuan untuk mengetahui dinamika perubahan populasi manusia rentan terinfeksi COVID-19 dan populasi manusia terinfeksi COVID-19 sehingga dilakukan simulasi numerik. Simulasi dilakukan dengan tiga cara yaitu ODE 45, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ dan selang $h = 0,1$. Ketiga cara tersebut dilakukan untuk mengetahui kondisi endemik (E_1) yang terjadi ketika adanya penyebaran COVID-19, yang dapat dinyatakan dengan $R_0 > 1$. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini mengacu pada **Tabel 4.3** dengan nilai awal yang digunakan diberikan sebagai berikut:

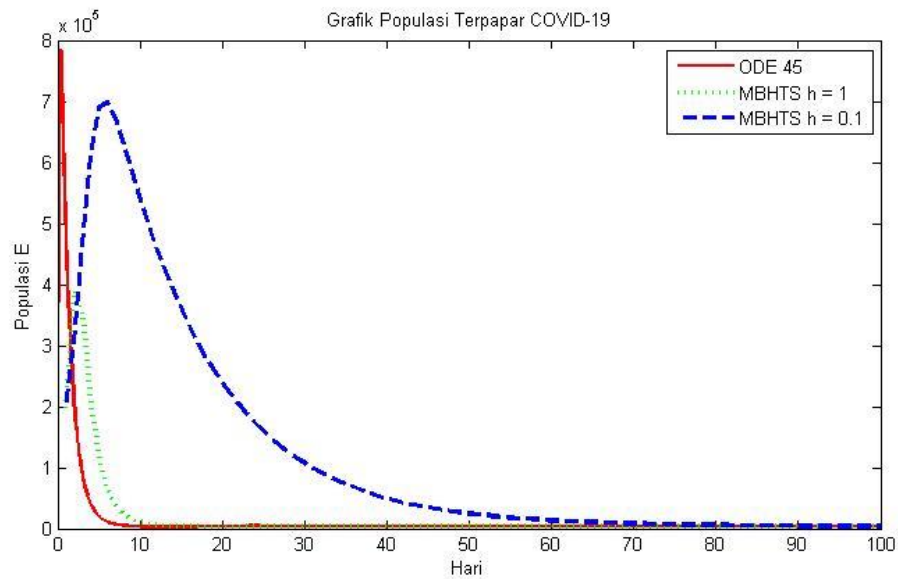
$$[S(0), E(0), I(0), T(0), R(0)] = [800000, 200000, 200, 150, 50].$$

Waktu yang digunakan dalam satuan waktu t hari dengan $t = 100$. Simulasi numerik menggunakan *Software* MATLAB R2009b, kode program simulasi numerik dengan ODE 45 dapat dilihat pada **Lampiran 10** dan kode program untuk simulasi numerik dengan metode beda hingga tak standar dapat dilihat pada **Lampiran 12**.



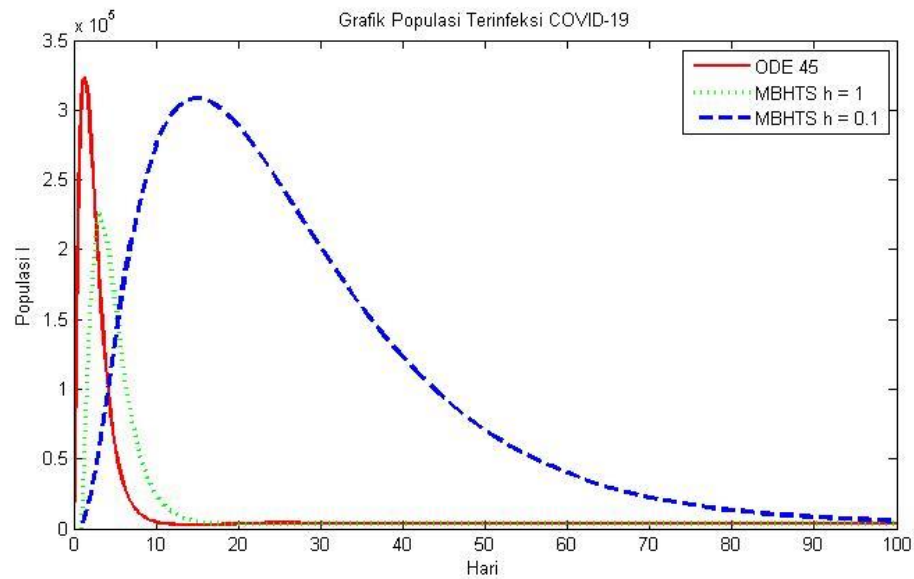
Gambar 4.3 Grafik Simulasi Numerik Populasi Rentan Terinfeksi COVID-19

Gambar 4.3 merupakan perbandingan Solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi rentan terinfeksi COVID-19 dengan perbandingan ODE 45, $h = 0,1$, dan $h = 1$. Pada grafik MBHTS dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan jumlah populasi rentan menurun hingga hari ke-8 dengan jumlah populasi sebesar 6251 individu dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Sedangkan, pada grafik MBHTS dengan selang $h = 1$ menunjukkan jumlah populasi rentan menurun hingga hari ke-3 dengan jumlah populasi sebesar 197600 individu dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Solusi numerik dengan ODE 45, menunjukkan populasi rentan lebih cepat menuju titik setimbang dibandingkan dengan MBHTS. Titik setimbang yang didapat dari kedua metode yaitu dengan ODE 45 didapatkan titik setimbang sebesar 13650 individu, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ sebesar 13653,2114 individu, dan selang $h = 0,1$ sebesar 6766,9023 individu.



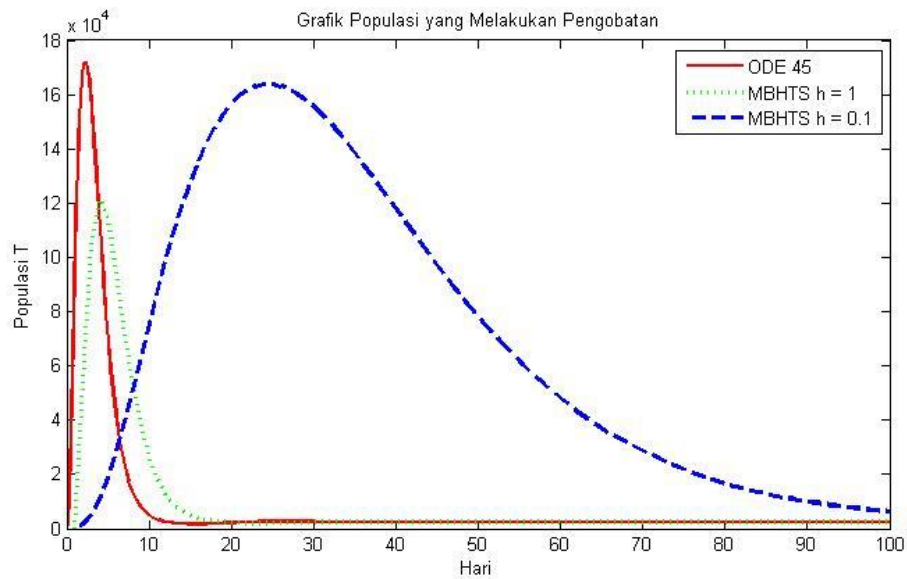
Gambar 4.4 Grafik Simulasi Numerik Populasi Terpapar COVID-19

Gambar 4.4 Merupakan perbandingan Solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi terpapar COVID-19 dengan perbandingan ODE 45, $h = 0.1$, dan $h = 1$. Pada grafik MBHTS dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-6 dengan jumlah populasi yaitu 699400 dan menurun hingga hari ke-64 dengan jumlah populasi yaitu 109700 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Sedangkan, pada grafik MBHTS dengan selang $h = 1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-2 dengan jumlah populasi yaitu 389500 dan menurun hingga hari ke-10 dengan jumlah populasi individu yaitu 104400 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Solusi numerik dengan ODE 45, menunjukkan populasi rentan lebih cepat menuju titik setimbang dibandingkan dengan MBHTS. Titik setimbang yang didapat dari kedua metode yaitu dengan ODE 45 didapatkan titik setimbang sebesar 4180 individu, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ sebesar 4177,7954 individu, dan selang $h = 0,1$ sebesar 3758,6461 individu.



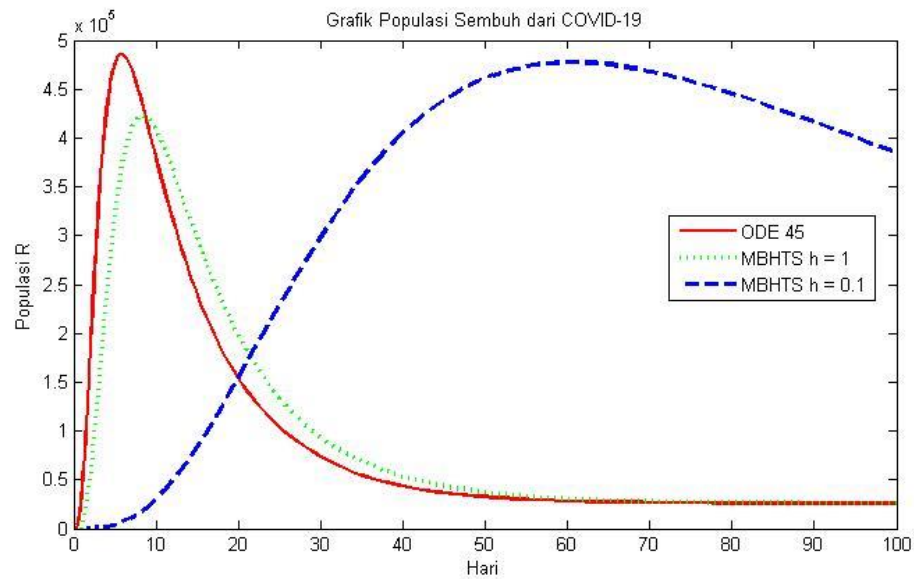
Gambar 4.5 Grafik Simulasi Numerik Populasi Terinfeksi COVID-19

Gambar 4.5 Merupakan perbandingan Solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi terinfeksi COVID-19 dengan perbandingan ODE 45, $h = 0.1$, dan $h = 1$. Pada grafik MBHTS dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-15 dengan jumlah populasi yaitu 308300 dan menurun hingga hari ke-89 dengan jumlah populasi yaitu 8691 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Sedangkan, pada grafik MBHTS dengan selang $h = 1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-3 dengan jumlah populasi yaitu 227500 dan menurun hingga hari ke-15 dengan jumlah populasi individu yaitu 5111 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Solusi numerik dengan ODE 45, menunjukkan populasi rentan lebih cepat menuju titik setimbang dibandingkan dengan MBHTS. Titik setimbang yang didapat dari kedua metode yaitu dengan ODE 45 didapatkan titik setimbang sebesar 3740 individu, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ sebesar 3740,5919 individu, dan selang $h = 0,1$ sebesar 5683,6296 individu.



Gambar 4.6 Grafik Simulasi Numerik Populasi yang Melakukan Pengobatan

Gambar 4.6 Merupakan perbandingan Solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi yang melakukan pengobatan dengan perbandingan ODE 45, $h = 0.1$, dan $h = 1$. Pada grafik MBHTS dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-25 dengan jumlah populasi yaitu 163700 dan menurun hingga hari ke-99 dengan jumlah populasi yaitu 6503 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Sedangkan, pada grafik MBHTS dengan selang $h = 1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-4 dengan jumlah populasi yaitu 389500 dan menurun hingga hari ke-10 dengan jumlah populasi individu yaitu 121500 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Solusi numerik dengan ODE 45, menunjukkan populasi rentan lebih cepat menuju titik setimbang dibandingkan dengan MBHTS. Titik setimbang yang didapat dari kedua metode yaitu dengan ODE 45 didapatkan titik setimbang sebesar 2470 individu, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ sebesar 2472,0469 individu, dan selang $h = 0,1$ sebesar 5686,6296 individu.



Gambar 4.7 Grafik Simulasi Numerik Populasi Sembuh dari COVID-19

Gambar 4.7 merupakan perbandingan Solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi sembuh dari COVID-19 dengan perbandingan ODE 45, $h = 0.1$, dan $h = 1$. Pada grafik MBHTS dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-60 dengan jumlah populasi yaitu 477300 dan menurun hingga konstan. Sedangkan, pada grafik MBHTS dengan selang $h = 1$ menunjukkan populasi maksimum pada hari ke-8 dengan jumlah populasi yaitu 423900 dan menurun hingga hari ke-62 dengan jumlah populasi individu yaitu 296600 dan selanjutnya konstan menuju titik setimbang. Solusi numerik dengan ODE 45, menunjukkan populasi rentan lebih cepat menuju titik setimbang dibandingkan dengan MBHTS. Titik setimbang yang didapat dari kedua metode yaitu dengan ODE 45 didapatkan titik setimbang sebesar 25980 individu, metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ sebesar 26073,7157 individu, dan selang $h = 0,1$ sebesar 384194,6391 individu.

Dari penjelasan sebelumnya dapat diketahui bahwa titik setimbang yang didapatkan dengan cara ODE 45 dan beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ relatif sama. Sedangkan titik setimbang yang dihasilkan dengan cara metode beda hingga tak standar dengan selang $h = 0,1$ menunjukkan hasil yang relatif berbeda. Meskipun dengan selang dan cara yang berbeda, solusi numerik model matematika penyebaran COVID-19 menggunakan metode beda hingga tak standar tetap

menunjukkan konvergen ke satu titik kesetimbangan yang cenderung konstan. Sedangkan pada MBHTS dengan tetapan $\phi(0.1) = \frac{(1-e^{-\alpha(0.1)})}{\alpha}$ lebih lambat menuju kondisi kesetimbangan dibandingkan dengan solusi dengan tetapan $\phi(1) = \frac{(1-e^{-\alpha(1)})}{\alpha}$. Hal ini menunjukkan bahwa tetapan $\phi(h) = \frac{(1-e^{-\alpha(h)})}{\alpha}$ mempengaruhi solusi aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 beda hingga tak standar. Namun, dari ketiga metode yang digunakan terdapat persamaan nilai $R_0 = 3,6621$ menunjukkan bahwa terjadi penyebaran COVID-19 yang cukup besar.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada model matematika penyebaran COVID-19 memiliki titik setimbang non endemik $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0\right)$, dan titik setimbang endemik $E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*)$. Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika $R_0 < 1$, sedangkan titik setimbang endemik akan stabil asimtotis jika $R_0 > 1$, dengan nilai R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} + \frac{\beta_2 \Lambda \omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}$$

2. Aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 menggunakan metode beda hingga tak standar dengan selang $\phi(h) = \frac{(1-e^{-\alpha h})}{\alpha}$ dan model diskritisasi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= \frac{\phi(h)(\Lambda) + S(n)}{1 + \phi(h)[\beta_1 E(n) + \beta_2 I(n) + \alpha]} \\ E^{n+1} &= \frac{\phi(h)[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1)] + E(n)}{1 + \phi(h)(\omega + \alpha)} \\ I^{n+1} &= \frac{\phi(h)[\omega E(n+1)] + I(n)}{1 + \phi(h)(\mu + \alpha)} \\ T^{n+1} &= \frac{\phi(h)\mu I(n+1) + T(n)}{1 + \phi(h)(\rho + \alpha)} \\ R^{n+1} &= \frac{\phi(h)\rho T(n+1) + R(n)}{1 + \phi(h)\alpha}. \end{aligned}$$

3. Titik setimbang yang didapatkan dengan cara ODE 45 dan beda hingga tak standar dengan selang $h = 1$ relatif sama, sedangkan semakin besar nilai h yang digunakan maka grafik akan semakin cepat menuju titik setimbang.

5.2 Saran

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif, yaitu melalui aproksimasi solusi menggunakan metode beda hingga tak standar dan analisis kestabilan. Oleh karena itu, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian kualitatif menggunakan data riil lapangan berupa estimasi parameter.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., dan Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra*. 10. Auflage. Hoboken. New Jersey: Wiley.
- Brauer, F., dan Castillo-Chavez, C., (2011), *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Text in Applied Mathematics 40. New-York : Springer-Verlag.
- Bronson, R., dan Costa, G. B. (2007). *Differential Equations*, The Mc Grow-Hill Companies. Inc., New Jersey.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., dan Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, 7(47), 873–885.
- Hoffmann, M., Kleine-Weber, H., Krüger, N., Müller, M., Drosten, C., dan Pöhlmann, S. (2020). The novel coronavirus 2019 (2019-nCoV) uses the SARS-coronavirus receptor ACE2 and the cellular protease TMPRSS2 for entry into target cells. *BioRxiv*.
- Kelley, W.G. dan Peterson, A.C., (2010), *The Theory of Differential Equation: Classical and Qualitative*, Springer Science + Business Media, New York.
- Li, B., Yang, J., Zhao, F., Zhi, L., Wang, X., Liu, L., Bi, Z., dan Zhao, Y. (2020). Prevalence and impact of cardiovascular metabolic diseases on COVID-19 in China. *Clinical Research in Cardiology*, 109(5), 531–538.
- Merkin, D. R., (1997). *Introduction to The Theory of Stability*, Springer, New York.
- Mickens, R. E. (2000b). *Nonstandard finite difference schemes*, In *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, (Edited by R.E. Mickens), pp. 1-54, World Scientific, Singapore.
- Nazir, G., Zeb, A., Shah, K., Saeed, T., Khan, R. A., dan Khan, S. I. U. (2021). Study of COVID-19 mathematical model of fractional order via modified Euler method. *Alexandria Engineering Journal*, 60(6), 5287-5296.

- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Deepublish, Yogyakarta.
- Olsder, G. J., (2003), *Mathematical System Theory*, second edition, Delfit University Press, Netherland.
- Rafiq, M., Ali, J., Riaz, M. B., dan Awrejcewicz, J. (2022). Numerical analysis of a bi-modal COVID-19 sitr model. *Alexandria Engineering Journal*, 61(1), 227–235.
- Sameni, R. (2020). Mathematical modeling of epidemic diseases; a case study of the COVID-19 coronavirus. *ArXiv Preprint ArXiv:11371*.
- Sánchez, Y. G., Sabir, Z., dan Guirao, J. L. G. (2020). Design of a nonlinear SITR fractal model based on the dynamics of a novel coronavirus (COVID-19). *Fractals*, 28(08), 2040026.
- Sontag, E.D., dan Thomas, M., 2001, *Control Theory for Linear Systems*, Springer, London.
- Suryanto, Agus., 2012. *Skema Beda Hingga Tak-Standar untuk Model Epidemi dengan Penularan Tersaturasi yang dimodifikasi*. Universitas Brawijaya, Malang.
- Tang, N., Li, D., Wang, X., dan Sun, Z. (2020). Abnormal coagulation parameters are associated with poor prognosis in patients with novel coronavirus pneumonia. *Journal of Thrombosis and Haemostasis*, 18(4), 844–847.
- Ullah, S., dan Khan, M. A. (2020). Modeling the impact of non-pharmaceutical interventions on the dynamics of novel coronavirus with optimal control analysis with a case study. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110075.
- World Health Organization. Report of the WHO-China Joint Mission on Coronavirus Disease 2019 (COVID-19); February 28, (2020). [https://www.who.int/publications/i/item/reportof-the-who-china-joint-mission-on-coronavirus-disease-2019-\(COVID-19\)](https://www.who.int/publications/i/item/reportof-the-who-china-joint-mission-on-coronavirus-disease-2019-(COVID-19)) diakses pada 16 Mei 2021.
- Zheng, Y.-Y., Ma, Y.-T., Zhang, J.-Y., dan Xie, X. (2020). COVID-19 and the cardiovascular system. *Nature Reviews Cardiology*, 17(5), 259–260.

- Zhu, N., Zhang, D., Wang, W., Li, X., Yang, B., Song, J., Zhao, X., Huang, B., Shi, W.,
dan Lu, R. (2020). A novel coronavirus from patients with pneumonia in China,
2019. *New England Journal of Medicine*, 727-732.
- Zill, D.G., dan Cullen, M.R., (2009), *Differential Equation With Boundary-Value Problem*,
seventh edition. Nelson Education Ltd., Canada.

Lampiran 1 : Perhitungan Titik Setimbang (Non Endemik E_0)

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Titik Setimbang bebas penyakit akan didapat saat $I = 0$

Pada persamaan (4.1.1) diperoleh

$$\Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda - \alpha S = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = \alpha S$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Pada persamaan (4.1.2) diperoleh

$$\beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 ES - (\omega + \alpha)E = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega + \alpha)E = \beta_1 ES$$

$$\Leftrightarrow E = 0$$

Pada persamaan (4.1.3) diperoleh

$$\omega E - (\mu + \alpha)I = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow I = 0$$

Pada persamaan (4.1.4) diperoleh

$$\mu I - (\rho + \alpha)T = 0$$

$$\leftrightarrow -(\rho + \alpha)T = 0$$

$$T = 0$$

Pada persamaan (4.1.5) diperoleh

$$\rho T - \alpha R = 0$$

$$\leftrightarrow -\alpha R = 0$$

$$R = 0$$

Jadi diperoleh titik setimbang bebas penyakit (non endemik)

$$E_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0\right)$$

Lampiran 2 : Perhitungan Nilai R_0 dengan Metode *Next-Generation Matrix*

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Diketahui titik setimbang bebas penyakit (non endemik)

$$E_0 = (S, E, I, T, R) = \left(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Untuk mendapatkan R_0 yang diperhatikan adalah populasi yang terinfeksi covid-19, karena populasi terinfeksi yang menjadi penyebab penyebaran inti penyakit covid-19 pada populasi manusia lainnya. Sub populasi tersebut adalah E , I dan T .

Pandang persamaan (4.1.2), (4.1.3) dan (4.1.4)

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

Misalkan $x = \begin{pmatrix} E \\ I \\ T \end{pmatrix}$ Dan dari persamaan (4.1.2), (4.1.3) dan (4.1.4) dapat disajikan

dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - Z(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \\ \omega E - (\mu + \alpha)I \\ \mu I - (\rho + \alpha)T \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \beta_1 ES + \beta_2 IS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} (\omega + \alpha)E \\ -\omega E + (\mu + \alpha)I \\ -\mu I + (\rho + \alpha)T \end{pmatrix}$$

Misalkan masing-masing adalah matriks *Jacobian* dari $\mathbb{F}(x)$ dan $\mathbb{Z}(x)$ sehingga

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \\ \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T} \end{pmatrix}, \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial E} & \frac{\partial z_1}{\partial I} & \frac{\partial z_1}{\partial T} \\ \frac{\partial z_2}{\partial E} & \frac{\partial z_2}{\partial I} & \frac{\partial z_2}{\partial T} \\ \frac{\partial z_3}{\partial E} & \frac{\partial z_3}{\partial I} & \frac{\partial z_3}{\partial T} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks *Jacobian* sebagai berikut :

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \beta_1 S & \beta_2 S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \omega + \alpha & 0 & 0 \\ -\omega & \mu + \alpha & 0 \\ 0 & -\mu & \rho + \alpha \end{pmatrix}$$

Selanjutnya substitusikan E_0 ke $\mathbb{F}$ dan $\mathbb{Z}$, maka diperoleh

$$\mathbb{F}(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{\alpha} & \frac{\beta_2 \Lambda}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Z}(E_0) = \begin{pmatrix} \omega + \alpha & 0 & 0 \\ -\omega & \mu + \alpha & 0 \\ 0 & -\mu & \rho + \alpha \end{pmatrix}$$

Selanjutnya R_0 diperoleh dengan menentukan nilai eigen terbesar dari $K = \mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$ atau dapat dinyatakan sebagai $R_0 = \rho(\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1})$ dari sini diperoleh

$$\mathbb{Z}^{-1} = \frac{1}{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\rho + \alpha)} \begin{pmatrix} (\mu + \alpha)(\rho + \alpha) & 0 & 0 \\ \omega(\rho + \alpha) & (\omega + \alpha)(\rho + \alpha) & 0 \\ \omega\mu & \mu(\omega + \alpha) & (\omega + \alpha)(\mu + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\omega + \alpha)} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} & \frac{1}{(\mu + \alpha)} & 0 \\ \frac{\omega\mu}{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\rho + \alpha)} & \frac{\mu}{(\mu + \alpha)(\rho + \alpha)} & \frac{1}{(\rho + \alpha)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{FZ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1\Lambda}{\alpha} & \frac{\beta_2\Lambda}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(\omega + \alpha)} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} & \frac{1}{(\mu + \alpha)} & 0 \\ \frac{\omega\mu}{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)(\rho + \alpha)} & \frac{\mu}{(\mu + \alpha)(\rho + \alpha)} & \frac{1}{(\rho + \alpha)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{FZ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} + \frac{\beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} & \frac{\beta_2\Lambda}{\alpha(\mu + \alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari K memenuhi

$$\det(\lambda I - K) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\beta_1\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} - \frac{\beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} & -\frac{\beta_2\Lambda}{\alpha(\mu + \alpha)} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\beta_1\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} - \frac{\beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} \right) \lambda^2 = 0$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dari K adalah

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\beta_1\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} + \frac{\beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} = \frac{\beta_1\Lambda(\mu + \alpha) + \beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = 0$$

Dengan demikian diperoleh nilai terbesar dari K adalah

$$R_0 = \frac{\beta_1 \Lambda (\mu + \alpha) + \beta_2 \Lambda \omega}{\alpha (\mu + \alpha) (\omega + \alpha)}$$

**Lampiran 3 : Perhitungan Titik Setimbang Penyebaran penyakit Covid-19
(Endemik E_1)**

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Pandang persamaan (4.1.3) sebagai berikut :

$$\omega E - (\mu + \alpha)I = 0$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{(\mu + \alpha)I}{\omega} \quad (1)$$

Pandang persamaan (4.1.1) sebagai berikut :

$$\Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = S(\beta_1 E + \beta_2 I + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda}{\beta_1 E + \beta_2 I + \alpha} = S \quad (2)$$

Substitusi persamaan (1) ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$$S = \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{(\mu + \alpha)I}{\omega} + \beta_2 I + \alpha}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\omega \Lambda}{\beta_1 (\mu + \alpha)I + \omega \beta_2 I + \omega \alpha} \quad (3)$$

Pandang persamaan (4.1.2) sebagai berikut :

$$\beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E = 0 \quad (4)$$

Substitusi persamaan (1) dan (3) ke persamaan (4), sehingga diperoleh

$$\leftrightarrow \beta_2 IS = (\omega + \alpha)E - \beta_1 ES$$

$$\leftrightarrow I = \frac{E((\omega + \alpha) - \beta_1 S)}{\beta_2 S}$$

$$\leftrightarrow I = \frac{(\mu + \alpha)I}{\omega} \left(\frac{(\omega + \alpha)}{\beta_2 S} - \frac{\beta_1 S}{\beta_2 S} \right)$$

$$\leftrightarrow \frac{I}{I} = \left(\frac{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)}{\omega \beta_2} \left(\frac{\beta_1(\mu + \alpha)I + \omega \beta_2 I + \omega \alpha}{\omega \Lambda} \right) - \frac{\beta_1(\mu + \alpha)}{\omega \beta_2} \right)$$

$$\leftrightarrow 1 = (\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\frac{\beta_1(\mu + \alpha)I + \omega \beta_2 I + \omega \alpha}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} \right) - \frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{\omega^2 \beta_2 \Lambda}$$

$$\leftrightarrow 1 = I(\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\frac{\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} \right) + \frac{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)\omega \alpha}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} - \frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{\omega^2 \beta_2 \Lambda}$$

$$\leftrightarrow 1 - \frac{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)\omega \alpha}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} + \frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{\omega^2 \beta_2 \Lambda} = I(\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\frac{\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} \right)$$

$$\leftrightarrow \left(1 - \frac{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)\omega \alpha}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} + \frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{\omega^2 \beta_2 \Lambda} \right) : \left((\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\frac{\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} \right) \right) = I$$

$$\leftrightarrow \left(\left(\frac{\omega \beta_2 \omega \Lambda}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega \beta_2 \omega \Lambda}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) \frac{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)\omega \alpha}{\omega \beta_2 \omega \Lambda} + \left(\frac{\omega \beta_2 \omega \Lambda}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) \frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{\omega^2 \beta_2 \Lambda} \right) = I$$

$$\leftrightarrow \left(\left(\frac{\omega^2 \beta_2 \Lambda}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega \alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) + \left(\frac{\omega \Lambda \beta_1(\mu + \alpha)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega \beta_2)} \right) \right) = I$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) \right) = I$$

Supaya $I > 0$, maka

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) - \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega(\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda)}{(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right) > \left(\frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2\Lambda}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} \frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)} > \frac{\omega\alpha}{(\beta_1(\mu + \alpha) + \omega\beta_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_1\Lambda(\mu + \alpha) + \beta_2\Lambda\omega}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} > 1$$

$$\Leftrightarrow R_0 > 1 \quad (5)$$

Pandang persamaan (4.1.4) sebagai berikut :

$$\mu I - (\rho + \alpha)T = 0$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\mu I}{(\rho + \alpha)} \quad (6)$$

Pandang persamaan (4.1.5) sebagai berikut :

$$\rho T - \alpha R = 0$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\rho T}{\alpha} \quad (7)$$

Substitusi persamaan (6) ke persamaan (7), sehingga diperoleh

$$R = \frac{\rho}{\alpha} \left[\frac{\mu I}{(\rho + \alpha)} \right]$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\rho\mu I}{\alpha(\rho + \alpha)} \quad (8)$$

Sehingga didapatkan titik setimbang endemik E_1 , sebagai berikut:

$$S^* = \frac{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\beta_1(\mu + \alpha)I + \beta_2 I \omega}$$

$$E^* = \frac{(\mu + \alpha)I^*}{\omega}$$

$$I^* = \frac{\alpha \omega (\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\Lambda - \beta_1(\mu + \alpha)^2(\omega + \alpha) - \beta_2(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}$$

$$T^* = \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)}$$

$$R^* = \frac{\rho \mu I^*}{\alpha(\rho + \alpha)}$$

Lampiran 4 : Analisis Kestabilan Titik Non-Endemik

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Berdasarkan persamaan (4.1.1)-(4.1.5) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = f_1(S, E, I, T, R)$$

$$\frac{dE}{dt} = f_2(S, E, I, T, R)$$

$$\frac{dI}{dt} = f_3(S, E, I, T, R)$$

$$\frac{dT}{dt} = f_4(S, E, I, T, R)$$

$$\frac{dR}{dt} = f_5(S, E, I, T, R)$$

Berdasarkan definisi 2.4, maka matriks *Jacobian* dari model matematika penyebaran COVID-19 adalah

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial T} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial T} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} -\beta_1 E - \beta_2 I - \alpha & -\beta_1 S & -\beta_2 S & 0 & 0 \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (\omega + \alpha) & \beta_2 S & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow J(E_0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}$$

a. Uji kestabilan lokal titik setimbang non endemic

Substitusikan titik setimbang non endemik $E_0(S, E, I, T, R) =$

$(\frac{\Lambda}{\alpha}, 0, 0, 0, 0)$ pada matriks *Jacobian* sehingga diperoleh

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari semua nilai λ dari matriks di atas untuk menganalisis kestabilannya. Berikut adalah langkahnya:

$$\det(\lambda I - J_{E^*}) = 0$$

$$\leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda + \alpha & \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} & \beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda + (\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & \lambda + \alpha \end{pmatrix} \right| = 0$$

1. Ekspansi kofaktor kolom 1, sehingga didapatkan hasil:

$$\leftrightarrow (\lambda + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda + (\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

2. Ekspansi kofaktor kolom 4, sehingga didapatkan hasil:

$$\leftrightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} & 0 \\ -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) & 0 \\ 0 & -\mu & \lambda + (\rho + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

3. Ekspansi kofaktor kolom 3, sehingga didapatkan hasil:

$$\leftrightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda + \alpha)(\lambda + \rho + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} \\ -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan nilai:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$$

$$\lambda_3 = -(\rho + \alpha)$$

$$4. \text{ Penyelesaian } \begin{vmatrix} \lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} \\ -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow \left| \left(\lambda - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} + \omega + \alpha \right) (\lambda + \mu + \alpha) - (-\omega) \left(-\beta_2 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) \right| = 0$$

$$\leftrightarrow \left[\left(\lambda^2 + \lambda\mu + \lambda\alpha - \lambda\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \lambda\omega + \mu\omega + \alpha\omega + \lambda\alpha + \mu\alpha + \alpha^2 \right) - \left(\beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \right) \right] = 0$$

$$\leftrightarrow \left[\left(-\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 \right) - \left(\beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \right) \right] = 0$$

$$\leftrightarrow \lambda^2 + \lambda \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) + \left(-\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \right) = 0$$

Sesuai dengan **Teorema 2.10** dimana

$$a_1 = \mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha}, \text{ dan}$$

$$a_2 = -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha}$$

$a_1, a_2 > 0$ maka didapatkan:

$$\leftrightarrow \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) \left(-\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \mu - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \alpha + \mu\omega + \alpha\omega + \mu\alpha + \alpha^2 - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \right) > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(-\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} (\mu + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) + \mu(\omega + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) + \right. \\
&\quad \left. \alpha(\alpha + \omega) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) \right) > 0 \\
&\Leftrightarrow -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} (\mu + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) + (\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \right. \\
&\quad \left. \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) > 0 \\
&\Leftrightarrow -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} (\mu + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha} \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) > \\
&\quad -(\mu + \alpha)(\omega + \alpha) \left(\mu + 2\alpha + \omega - \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha} \right) \\
&\Leftrightarrow -\beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} - \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} > -1 \\
&\Leftrightarrow \beta_1 \frac{\Lambda}{\alpha(\omega + \alpha)} + \beta_2 \frac{\Lambda\omega}{\alpha(\mu + \alpha)(\omega + \alpha)} < 1 \\
&\Leftrightarrow R_0 < 1
\end{aligned}$$

Lampiran 5 : Analisis Kestabilan Titik Endemik

Sehingga didapatkan titik setimbang endemik E_1 , sebagai berikut:

$$S^* = \frac{(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\beta_1(\mu + \alpha)I + \beta_2 I \omega} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$E^* = \frac{(\mu + \alpha)I^*}{\omega} = \frac{n_3}{n_4}$$

$$I^* = \frac{\alpha \omega (\omega + \alpha)(\mu + \alpha)}{\Lambda - \beta_1(\mu + \alpha)^2(\omega + \alpha) - \beta_2(\omega + \alpha)(\mu + \alpha)} = \frac{n_5}{n_6}$$

$$T^* = \frac{\mu I^*}{(\rho + \alpha)} = \frac{n_7}{n_8}$$

$$R^* = \frac{\rho \mu I^*}{\alpha(\rho + \alpha)} = \frac{n_9}{n_{10}}$$

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial T} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial T} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} -\beta_1 E - \beta_2 I - \alpha & -\beta_1 S & -\beta_2 S & 0 & 0 \\ \beta_1 E + \beta_2 I & \beta_1 S - (\omega + \alpha) & \beta_2 S & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow J = \begin{pmatrix} -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} - \alpha & -\beta_1 \frac{n_1}{n_2} & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \rho & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari semua nilai λ dari matriks diatas untuk menganalisis kestabilannya. Berikut adalah langkahnya:

$$\det(\lambda I - J_{E^*}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} - \alpha & -\beta_1 \frac{n_1}{n_2} & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} - (\omega + \alpha) & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & -(\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\alpha \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & \lambda + (\mu + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda + (\rho + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

1. Ekspansi kofaktor kolom 5

$$\Leftrightarrow (\lambda + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & -\omega & \lambda + \mu + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda + \rho + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

2. Ekspansi kofaktor kolom 4

$$\Leftrightarrow (\lambda + \alpha)(\lambda + \rho + \alpha) \begin{vmatrix} \lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \\ -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + (\omega + \alpha) & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} \\ 0 & -\omega & \lambda + \mu + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

3. Ekspansi

Dimisalkan:

$$a = (\omega + \alpha)$$

$$b = (\mu + \alpha)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha & \beta_1 \frac{n_1}{n_2} & \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \\ -\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} & \lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + a & -\beta_2 \frac{n_1}{n_2} \\ 0 & -\omega & \lambda + b \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha \right) \left(\lambda - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + a \right) (\lambda + b) + 0 + \left(\beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) \left(-\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) (-\omega) - \left(\beta_1 \frac{n_1}{n_2} \right) \left(-\beta_1 \frac{n_3}{n_4} - \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) (\lambda + b) - \left(\lambda + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha \right) \left(-\beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) (-\omega) - 0 = 0$$

$$\leftrightarrow \left((\lambda^3 + \lambda^2 b) - \left(\lambda^2 \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \lambda b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \right) + (\lambda^2 a + \lambda ab) \right) + \left(\left(\lambda^2 \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \lambda b \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \right) - \left(\lambda \beta_1^2 \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4} + b \beta_1^2 \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4} \right) + \left(\lambda a \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + ab \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \right) \right) + \left(\left(\lambda^2 \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \lambda b \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \left(\lambda \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) + \left(\lambda a \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + ab \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) \right) + \left((\lambda^2 \alpha + \lambda \alpha b) - \left(\lambda \alpha \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \alpha b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \right) + (\lambda a^2 + a^2 b) \right) + \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) + \lambda \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) + b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \left(\lambda \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \alpha \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) = 0$$

$$\leftrightarrow \left((\lambda^3 + \lambda^2 b) - \left(\lambda^2 \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \lambda b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \right) + (\lambda^2 a + \lambda ab) \right) + \left(\left(\lambda^2 \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \lambda b \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \right) - \left(\lambda \beta_1^2 \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4} + b \beta_1^2 \frac{n_1}{n_2} \frac{n_3}{n_4} \right) + \left(\lambda a \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + ab \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \right) \right) + \left(\left(\lambda^2 \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \lambda b \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \left(\lambda \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) + \left(\lambda a \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + ab \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) \right) + \left((\lambda^2 \alpha + \lambda \alpha b) - \left(\lambda \alpha \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \alpha b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \right) + (\lambda a^2 + a^2 b) \right) + \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) + \lambda \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) + b \beta_1 \frac{n_1}{n_2} \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \left(\lambda \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \alpha \omega \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 \left(b - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + a + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha \right) + \lambda \left(-b\beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \alpha\beta_1 \frac{n_1}{n_2} b\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \alpha\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + b\beta_2 \frac{n_5}{n_6} + a\beta_2 \frac{n_5}{n_6} - \omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \alpha b + ab + a^2 \right) + \left(ab \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \alpha b\beta_1 \frac{n_1}{n_2} - \alpha\omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} a^2 b \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 = b - \beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + a + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow b + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} + a + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + \alpha > \beta_1 \frac{n_1}{n_2}$$

$$\Leftrightarrow b \frac{n_2}{\beta_1 n_1} + \beta_1 \frac{n_3}{n_4} \frac{n_2}{\beta_1 n_1} + a \frac{n_2}{\beta_1 n_1} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \frac{n_2}{\beta_1 n_1} + \alpha \frac{n_2}{\beta_1 n_1} > 1$$

$$\Leftrightarrow b \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} + \beta_1 \frac{I^* b}{\omega} \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} + a \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} +$$

$$\beta_2 \frac{\alpha \omega ab}{\Lambda - \beta_1 ab^2 - \beta_2 ab} \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} + \alpha \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{a} + \frac{I^* b}{\omega} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} + \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{b} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\alpha \omega}{\Lambda - \beta_1 ab^2 - \beta_2 ab} (\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega) + \alpha \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{a} + \frac{I^* b}{\omega} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} + \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{b} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\alpha \omega}{\Lambda - \beta_1 ab^2 - \beta_2 ab} (\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega) + \alpha \frac{1}{\beta_1} \frac{\beta_1 I^* b + \beta_2 I^* \omega}{ab} > 1$$

$$\Leftrightarrow b_2 = \left(-b\beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \alpha\beta_1 \frac{n_1}{n_2} b\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + a\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + b\beta_2 \frac{n_5}{n_6} + a\beta_2 \frac{n_5}{n_6} - \omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} + \alpha b + ab + a^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (-b - \alpha)\beta_1 \frac{n_1}{n_2} + (b + a) \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} \right) - \omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2} + ab + ab + a^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (b + a) \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + a \right) + \alpha b > (b + \alpha)\beta_1 \frac{n_1}{n_2} + \omega\beta_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_2}{n_1} ((b + a) \left(\beta_1 \frac{n_3}{n_4} + \beta_2 \frac{n_5}{n_6} + a \right) + \alpha b) > (b + \alpha)\beta_1 + \omega\beta_2$$

Terlalu sulit untuk didapatkan solusi analitiknya. Sehingga akan dilanjutkan dengan bantuan *Software* MATLAB.

Lampiran 6 : Aproksimasi Solusi Model Matematika Covid-19 dengan Metode Beda Hingga Tak Standar

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu rentan persamaan (4.1.1)

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(n+1) - S(n)}{h} = \Lambda - \beta_1 E(n)S(n+1) - \beta_2 I(n)S(n+1) - \alpha S(n+1)$$

$$\Leftrightarrow S(n+1) = h[\Lambda - \beta_1 E(n)S(n+1) - \beta_2 I(n)S(n+1) - \alpha S(n+1)] + S(n)$$

$$\Leftrightarrow S(n+1) + S(n+1)h[\beta_1 E(n) + \beta_2 I(n) + \alpha] = h(\Lambda) + S(n)$$

$$\Leftrightarrow S(n+1) = \frac{h(\Lambda) + S(n)}{1 + h[\beta_1 E(n) + \beta_2 I(n) + \alpha]}$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu rentan persamaan (4.1.2)

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E$$

$$\Leftrightarrow \frac{E(n+1) - E(n)}{h} = \beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1) - (\omega + \alpha)E(n+1)$$

$$\Leftrightarrow E(n+1) = h[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1) - (\omega + \alpha)E(n+1)] + E(n)$$

$$\Leftrightarrow E(n+1)[1+h(\omega+\alpha)] = h[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1)] + E(n)$$

$$\Leftrightarrow E(n+1) = \frac{h[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1)] + E(n)}{1 + h(\omega + \alpha)}$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu rentan persamaan (4.1.3)

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I$$

$$\Leftrightarrow \frac{I(n+1) - I(n)}{h} = \omega E(n+1) - (\mu + \alpha)I(n+1)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1) = h[\omega E(n+1) - (\mu + \alpha)I(n+1)] + I(n)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1) + h(\mu + \alpha)I(n+1) = h[\omega E(n+1)] + I(n)$$

$$\Leftrightarrow I(n+1) = \frac{h[\omega E(n+1)] + I(n)}{1 + h(\mu + \alpha)}$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu rentan persamaan (4.1.4)

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T$$

$$\Leftrightarrow \frac{T(n+1) - T(n)}{h} = \mu I(n+1) - (\rho + \alpha)T(n+1)$$

$$\Leftrightarrow T(n+1) = h[\mu I(n+1) - (\rho + \alpha)T(n+1)] + T(n)$$

$$\Leftrightarrow T(n+1) + h(\rho + \alpha)T(n+1) = h\mu I(n+1) + T(n)$$

$$\Leftrightarrow T(n+1) = \frac{h\mu I(n+1) + T(n)}{1 + h(\rho + \alpha)}$$

Diskritisasi laju perubahan jumlah individu rentan persamaan (4.1.4)

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R$$

$$\Leftrightarrow \frac{R(n+1) - R(n)}{h} = \rho T(n+1) - \alpha R(n+1)$$

$$\Leftrightarrow R(n+1) = h[\rho T(n+1) - \alpha R(n+1)] + R(n)$$

$$\Leftrightarrow R(n+1) + h\alpha R(n+1) = h\rho T(n+1) + R(n)$$

$$\Leftrightarrow R(n+1) = \frac{h\rho T(n+1) + R(n)}{1 + h\alpha}$$

Sehingga didapatkan model matematika diskrit penyebaran covid-19, sebagai berikut :

$$S(n+1) = \frac{h(\Lambda) + S(n)}{1 + h[\beta_1 E(n) + \beta_2 I(n) + \alpha]}$$

$$E(n+1) = \frac{h[\beta_1 E(n)S(n+1) + \beta_2 I(n)S(n+1)] + E(n)}{1 + h(\omega + \alpha)}$$

$$I(n+1) = \frac{h[\omega E(n+1)] + I(n)}{1 + h(\mu + \alpha)}$$

$$T(n+1) = \frac{h\mu I(n+1) + T(n)}{1 + h(\rho + \alpha)}$$

$$R(n+1) = \frac{h\rho T(n+1) + R(n)}{1 + h\alpha}$$

**Lampiran 7 : Tetapan untuk Menentukan Aproksimasi Solusi Model
Matematika Penyebaran COVID-19 dengan Metode Beda Hingga Tak
Standar**

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S \quad (4.1.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E \quad (4.1.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - (\mu + \alpha)I \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dT}{dt} = \mu I - (\rho + \alpha)T \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho T - \alpha R \quad (4.1.5)$$

Karena $N = S + E + I + T + R$, maka

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \beta_1 ES - \beta_2 IS - \alpha S + \beta_1 ES + \beta_2 IS - (\omega + \alpha)E +$$

$$\omega E - (\mu + \alpha)I + \mu I - (\rho + \alpha)T$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \alpha S - \alpha E - \alpha I - \alpha T - \alpha R$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \alpha(S + E + I + T + R)$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \alpha N$$

Penyelesaian dengan persamaan diferensial:

$$\frac{1}{\Lambda - \alpha N} dN = dt$$

$$\int \frac{1}{\Lambda - \alpha N} dN = \int dt$$

$$-\frac{1}{\alpha} \ln(\Lambda - \alpha N) = t + C$$

$$\ln(\Lambda - \alpha N) = -\alpha(t + C)$$

$$(\Lambda - \alpha N) = e^{-\alpha(t+C)}$$

$$(\Lambda - \alpha N) = e^{-\alpha t} C_1, C_1 = e^C$$

$$-\alpha N = e^{-\alpha t} C_1 - \Lambda$$

$$N(t) = \frac{1}{-\alpha} (e^{-\alpha t} C_1 - \Lambda)$$

Didapatkan solusi umum sistem persamaan diferensial yaitu:

$$N(t) = \frac{1}{\alpha} (\Lambda - e^{-\alpha t} C_1)$$

Diambil sebarang $N_0 = N^n \geq 0$,

$$N_0 = \frac{1}{\alpha} (\Lambda - e^0 C_1)$$

$$N_0 = \frac{1}{\alpha} (\Lambda - C_1)$$

$$C_1 = (\Lambda - \alpha N_0)$$

Sehingga didapatkan solusi khusus sistem persamaan diferensial model matematika penyebaran COVID-19 yaitu:

$$N(t) = \frac{1}{\alpha} (\Lambda - (\Lambda - \alpha N_0) e^{-\alpha t})$$

Dengan $N^{n+1} = N(t)$, maka

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^{n+1} - N^n}{\phi(h)} = \Lambda - \alpha N^n$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\frac{1}{\alpha} (\Lambda - (\Lambda - \alpha N_0) e^{-\alpha t}) - N^n}{\phi(h)} = \Lambda - \alpha N^n$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\frac{1}{\alpha} (\Lambda - (\Lambda - \alpha N_0) e^{-\alpha t}) - N^n}{\Lambda - \alpha N^n} = \phi(h)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\Lambda - \Lambda e^{-\alpha t} + \alpha N_0 e^{-\alpha t} - \alpha N^n}{\alpha (\Lambda - \alpha N^n)} = \phi(h)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{(\Lambda - \alpha N^n)(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha (\Lambda - \alpha N^n)} = \phi(h)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \phi(h)$$

Sehingga didapatkan tetapan untuk menentukan aproksimasi solusi model matematika penyebaran COVID-19 yaitu:

$$\phi(h) = \frac{(1 - e^{-\alpha t})}{\alpha}$$

Lampiran 8 : Kode Program Simulasi Numerik m.file

```
function dy = simul(t,y)
global Lambda beta1 beta2 alfa omega miu ro;

dy=zeros(5,1);

%Model
dy(1)=(Lambda-(beta1*y(1)*y(2))-(beta2*y(1)*y(3))-(alfa*y(1)));
dy(2)=(beta1*y(1)*y(2))+(beta2*y(1)*y(3))-(omega*y(2))-(
(alfa*y(2)));
dy(3)=(omega*y(2))-(miu*y(3))-(alfa*y(3));
dy(4)=(miu*y(3))-(ro*y(4))-(alfa*y(4));
dy(5)=(ro*y(4))-(alfa*y(5));

end
```

Lampiran 9 : Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Titik Setimbang Non Endemik Model Matematika Penyebaran COVID-19

```

clc;
clear all;
close all;

global Lambda beta1 beta2 alfa omega miu ro;

Lambda = 0.2;
beta1 = 0.3;
beta2 = 0.6;
alfa = 0.25;
omega = 0.1;
miu = 0.1;
ro = 0.3;

%NilaiR0
r0 = ((beta1*Lambda)/(alfa*(omega+alfa)) + (beta2*Lambda*omega)/(alfa*(omega+alfa)*(miu+alfa)))

[t1,y1]=ode45(@simul,[0 10],[0.45 0.15 0.1 0.2 0.1]);

figure(1)
plot(t1,y1(:,1),'-',t1,y1(:,2),'-',t1,y1(:,3),'-',t1,y1(:,4),'-',t1,y1(:,5),'-', 'LineWidth',2);
xlabel('Hari');
ylabel('Populasi');
legend('S','E','I','T','R');
title('Grafik simulasi non endemik');

grid on

```

Lampiran 10 : Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Titik Setimbang Endemik Model Matematika Penyebaran COVID-19

```

clc;
clear;
close all;

global Lambda beta1 beta2 alfa omega miu ro;

Lambda = 0.2;
beta1 = 0.3;
beta2 = 0.6;
alfa = 0.25;
omega = 0.1;
miu = 0.1;
ro = 0.3;

[t1,y1]=ode15s(@simul,[0 10], [0.45 0.1 0.15 0.2 0.1]);
r0=((beta1*Lambda)/(alfa*(omega+alfa)))+(beta2*Lambda*omega)/(alfa*(omega+alfa)*(miu+alfa))

figure(1)
plot(t1,y1(:,1),'-',t1,y1(:,2),'-',t1,y1(:,3),'-',t1,y1(:,4),'-',t1,y1(:,5),'-', 'LineWidth',2);
xlabel('Hari');
ylabel('Populasi');
legend('S','E','I','T','R');
title('Simulasi Numerik endemik');
grid on;

```

Lampiran 11 : Kode Program Simulasi Numerik m.file untuk Bidang Fase Model Matematika Penyebaran COVID-19

```

close all;
clear all;
clc;
global Lambda beta1 beta2 alfa omega miu ro;

%nilai parameter

Lambda = 0.2;
beta1 = 0.3;
beta2 = 0.6;
alfa = 0.25;
omega = 0.1;
miu = 0.1;
ro = 0.3;

[t1,y1]=ode45('sthnon',[0 1000],[0.45 0.1 0.15 0.2 0.1])
[t2,y2]=ode45('sthnon',[0 1000],[0.48 0.13 0.17 0.23 0.13])
[t3,y3]=ode45('sthnon',[0 1000],[0.43 0.09 0.13 0.17 0.09])

figure(1);
plot(y1(:,1),y1(:,3),'r',y2(:,1),y2(:,3),'b',y3(:,1),y3(:,3),'g','linewidth',2);
xlabel('populasi T');
ylabel('populasi R');
legend('Nilai awal 1','Nilai awal 2','Nilai awal 3');
title('Bidang Fase Model Matematika Penyebaran COVID-19');

R0=((beta1*Lambda)/(alfa*(omega+alfa)))+(beta2*Lambda*omega)/(alfa*(omega+alfa)*(miu+alfa))

```

Lampiran 12 : Kode Program Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran COVID-19

```

clear all;
clc;
S0 = 0.45;
E0 = 0.1;
I0 = 0.15;
T0 = 0.2;
R0 = 0.1;
Lambda = 0.2;
alfa = 0.25;
omega = 0.1;
miu = 0.1;
ro = 0.3;
h=input(' masukkan nilai h = ');
n=1000;
fd=(1-exp(-alfa*h))/(alfa);
fprintf('nilai fd = %f',fd);
S1(1)=S0;
E1(1)=E0;
I1(1)=I0;
T1(1)=T0;
R1(1)=R0;
beta1 = input(' masukkan beta 1 = ');
beta2 = input(' masukkan beta 2 = ');
r0=((beta1*Lambda)/(alfa*(omega+alfa)))+(beta2*Lambda*omega)/(alfa*(omega+alfa)*(miu+alfa));
fprintf('nilai R0 = %f',r0);
fprintf('\n');
for i=1:n-1
S1(i+1)=(fd*Lambda+S1(i))/(1+fd*(beta1*E1(i)+beta2*I1(i)+alfa));
E1(i+1)=((fd*(beta2*I1(i)*S1(i+1)+beta1*E1(i)*S1(i+1))+E1(i))/(1+fd*(omega+alfa)));
I1(i+1)=(fd*omega*E1(i+1)+I1(i))/(1+fd*(miu+alfa));
T1(i+1)=(fd*miu*I1(i+1)+T1(i))/(1+fd*(ro+alfa));
R1(i+1)=(fd*ro*T1(i+1)+R1(i))/(1+fd*alfa);
end
Sn=S1(n);
En=E1(n);
In=I1(n);
Tn=T1(n);
Rn=R1(n);
fprintf('\n');
fprintf('hasil iterasi = ');
fprintf('\n');
fprintf('titik setimbang yang dihasilkan dari iterasi = ');
fprintf('\n');
fprintf('S* = %8.20f\n',Sn);
fprintf('E* = %8.20f\n',En);
fprintf('I* = %8.20f\n',In);
fprintf('T* = %8.20f\n',Tn);
fprintf('R* = %8.20f\n',Rn);
figure(1)

```

```
hold on;  
plot(1:n,S1(:),'-r',1:n,E1(:),'-m',1:n,I1(:),'-g',1:n,R1(:),'-  
b','linewidth',2.5);  
title('Aproksimasi solusi saat  $R_0 > 1$ ','fontweight','bold')  
xlabel('n');  
ylabel('nilai S(t)/E(t)/I(t)/T(t)/R(t)');  
grid on;
```

