

DISERTASI

**PELABELAN k -IRREGULAR REFLEXIVE PADA
GRAF**



**IKA HESTI AGUSTIN
NIM 081917027317**

**PROGRAM STUDI S3 MIPA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA
2022**

DISERTASI

PELABELAN k -IRREGULAR REFLEXIVE PADA GRAF



IKA HESTI AGUSTIN
NIM 081917027317

PROGRAM STUDI S3 MIPA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA
2022

LEMBAR PENGESAHAN

Naskah Proposal ini telah disetujui

Pada tanggal 5 April 2022

Oleh:

PROMOTOR

Dr. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si.

NIP. 19700112 199412 2 002

KO-PROMOTOR

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Mengetahui,

DEKAN

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**



Prof. Dr. Moh. Yasin, M.Si.

NIP. 19670312 199102 1 001

Disertasi ini telah diuji pada Ujian Tertutup

Tanggal : 18 Maret 2022

PANITIA PENGUJI DISERTASI

Ketua : Dr. Yayuk Wahyuni, M.Si.

Anggota :

Dr. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dr. Fatmawati, M.Si.

Dr. Miswanto, M.Si.

Dr. Nenik Estuningsih, S.Si, M.Si.

Prof. Dr. Surahmat, M.Si.

Ditetapkan dengan Surat Keputusan Dekan
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga
Nomor: 2187/UN3.1.8/HK/2022

PERNYATAAN ORISINALITAS DISERTASI

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ika Hesti Agustin
NIM : 081917027317
Program Studi : S3 MIPA
Fakultas : Sains dan Teknologi
Universitas : Airlangga

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa:

1. Disertasi saya ini adalah asli dan benar-benar hasil karya saya sendiri, dan bukan hasil karya orang lain dengan mengatas namakan saya, serta bukan merupakan hasil peniruan atau penjiplakan (plagiarism) dari karya orang lain. Disertasi ini belum pernah diajukan untuk mendapatkan gelar akademik baik di Universitas Airlangga, maupun di perguruan tinggi lainnya.
2. Dalam disertasi ini tidak terdapat karya atau pendapat yang telah ditulis atau dipublikasikan orang lain, kecuali secara tertulis dengan jelas dicantumkan sebagai acuan dengan disebutkan nama pengarang dan dicantumkan dalam daftar kepustakaan.
3. Pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, dan apabila dikemudian hari terdapat penyimpangan dan ketidakbenaran dalam pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi akademik, serta sanksi-sanksi lainnya sesuai dengan norma dan peraturan yang berlaku di Universitas Airlangga.



Surabaya, 5 April 2022

Ika Hesti Agustin

NIM. 081917027317

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PANITIA UJIAN TERTUTUP DISERTASI.....	iii
DAFTAR ISI	iv
PRAKATA	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR SIMBOL.....	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT.....	xiii
BAB I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Batasan Masalah.....	7
1.4 Tujuan Penelitian	7
1.5 Manfaat Penelitian	7
BAB II.TINJAUAN PUSTAKA.....	8
2.1 Terminologi Graf	8
2.2 Jenis-jenis Graf	10
2.3 Operasi Graf	15
2.4 Selimut pada Graf	17
2.5 Pelabelan Graf	18
2.5.1 Pelabelan <i>Irregular</i>	18

2.5.2	Pelabelan Total k -Irregular Titik (<i>Vertex Irregular Total k-Labeling</i>) ..	19
2.5.3	Pelabelan Total k -Irregular Sisi (<i>Edge Irregular Total k-Labeling</i>)	19
2.5.4	Pelabelan Total k -Irregular Titik dan Sisi (<i>Totally Irregular Total k-Labeling</i>)	21
2.5.5	Pelabelan k -Irregular Sisi (<i>Edge Irregular k-Labeling</i>)	21
2.5.6	Pelabelan Titik k -Irregular $\mathcal{H}$ (<i>$\mathcal{H}$-Irregular Vertex k-Labeling</i>)	22
2.5.7	Pelabelan Sisi k -Irregular $\mathcal{H}$ (<i>$\mathcal{H}$-Irregular Edge k-Labeling</i>)	22
2.5.8	Pelabelan Total k -Irregular $\mathcal{H}$ (<i>$\mathcal{H}$-Irregular Total k-Labeling</i>)	23
2.5.9	Pelabelan k -Irregular Reflexive (<i>Irregular Reflexive k-Labeling</i>)	24
BAB III KERANGKA KONSEP DAN HIPOTESIS		27
3.1	Kerangka Konsep	27
3.2	Hipotesis	29
BAB IV METODE PENELITIAN		31
4.1	Pelabelan k-Irregular Reflexive Titik	31
4.1.1	Menentukan Batas Bawah Nilai Pelabelan k -Irregular Reflexive Titik .	32
4.1.2	Menentukan <i>reflexive vertex strength</i> pada Graf	32
4.2	Pelabelan k-Irregular Reflexive Sisi	33
4.3	Pelabelan k-Irregular Reflexive $\mathcal{H}$	34
4.3.1	Menentukan Batas Bawah Nilai Pelabelan k -Irregular Reflexive $\mathcal{H}$	34
4.3.2	Menentukan Nilai <i>reflexive $\mathcal{H}$ strength</i> pada Graf	35
BAB V. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN		37
5.1	Pelabelan k-Irregular Reflexive Titik pada Graf	37
5.1.1	Pelabelan <i>irregular reflexive</i> titik pada graf reguler	40
5.1.2	Pelabelan <i>irregular reflexive</i> titik pada graf hampir reguler	63
5.1.3	Pelabelan k -Irregular Reflexive Titik pada Graf dengan Titik Penda. .	80
5.2	Pelabelan k-Irregular Reflexive Sisi pada Graf	88
5.3	Pelabelan k-Irregular Reflexive Subgraf pada Graf	109

BAB VI KESIMPULAN DAN SARAN.....	124
6.1 Kesimpulan	124
6.2 Saran	127
DAFTAR PUSTAKA.....	128

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi yang berjudul "PELABELAN k -IRREGULAR REFLEXIVE PADA GRAF". Disertasi ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Doktor Matematika dan mencapai gelar Doktor pada Program Studi S3 Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga. Kajian ini diteliti karena konsep pelabelan mempunyai banyak aplikasi dalam topologi jaringan, baik jaringan komunikasi maupun transportasi, serta dalam kriptografi.

Penyusunan disertasi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga;
2. Ketua Program Studi S3 Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga;
3. Alm. Dr. M. Imam Utoyo, S.Si., M.Si., Dr. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si. dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku promotor dan co-promotor yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan disertasi ini;
4. Bapak dan ibu dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan disertasi ini;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya disertasi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan disertasi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga disertasi ini dapat bermanfaat.

Surabaya, April 2022

Penulis

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh graf G	9
2.2 $G_1 \cong G_2$	9
2.3 H subgraf dari graf G	10
2.4 Graf Bipartit Lengkap $K_{3,11}$ dan graf Siklus C_{16}	11
2.5 Jenis-jenis graf Pohon.	13
2.6 Jenis-jenis graf.	14
2.7 $C_4 \times P_3$	15
2.8 Graf $P_3 \odot C_4$	17
2.9 Graf <i>Triangular Ladder</i> TL_7	17
2.10 Pelabelan Total 4- <i>Irregular</i> Titik dari graf $G(3, 6)$	20
2.11 Hasil pelabelan <i>Total Irregularity</i> Sisi dari $G(3, 6)$	21
2.12 Hasil pelabelan <i>Total Irregularity</i> dari $G(3, 8)$ dengan selimut C_4	23
2.13 (a) Contoh pelabelan <i>k-Irregular Reflexive</i> Titik. (b) Pelabelan <i>k-Irregular Reflexive</i> Sisi.	26
3.1 Hasil-hasil penelitian <i>Irregularity Reflexive</i> pada penelitian sebelumnya.	28
3.2 Posisi penelitian pelabelan <i>k-Irregular Reflexive</i>	30
5.1 Pelabelan <i>irregular reflexive</i> pada C_3	42
5.2 Pelabelan <i>irregular reflexive</i> pada C_6	43
5.3 Pelabelan <i>irregular reflexive</i> pada C_4	50
5.4 Pelabelan <i>irregular reflexive</i> pada C_5	51
5.5 Pelabelan <i>irregular reflexive</i> pada $L_n, n \in \{3, 4, 5\}$	74

DAFTAR TABEL

	Halaman
5.1 Pelabelan pada titik y_l dan sisi-sisi x_1y_l, x_2y_l , and $wt(y_l)$	79
5.2 Label sisi u_ju_{j+1}	108
5.3 Label sisi $v_{1,j}v_{3,j}, v_{2,j}v_{3,j}, v_{3,j}u_j, v_{1,j}u_j, v_{2,j}u_j, v_{1,j}v_{2,j}$	108
5.4 Label titik dan sisi pada $TL_n : n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$	112
5.5 Label titik dan sisi pada $F_n : n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$	115
5.6 Label titik dan sisi pada $L_n : n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	118
5.7 Label titik dan sisi pada $B_n : n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	121
6.1 Nilai rvs pada Graf.....	124
6.2 Nilai res pada Graf.	125
6.3 Nilai $r\mathcal{H}s$ pada Graf.....	126

DAFTAR SIMBOL

p	: kardinalitas himpunan titik dalam graf G	8
q	: Kardinalitas himpunan sisi dalam graf G	8
$\Delta(G)$	: derajat terbesar pada suatu titik di graf G	8
$\delta(G)$	: derajat terkecil pada suatu titik di graf G	8
$G \cong H$	: dua graf G dan H yang isomorfis	9
P_n	: graf lintasan	3
C_n	: graf siklus	5
W_n	: graf roda	5
F_n	: graf kipas	5
K_n	: graf lengkap	12
A_n	: graf antiprisma	15
$\mathcal{F}_n$	: graf <i>friendship</i>	12
DW_n	: graf roda ganda	11
B_n	: graf buku	16
$K_{2,n}$	: graf lengkap dua partisi	63
$\mathcal{S}_n$	: graf sunlet	82
H_n	: graf helm	82
SS_n	: graf <i>subdivided star</i>	11
Br_n	: graf <i>broom</i>	11
$G(m, n)$	: graf grid	15
L_n	: graf tangga	15
TL_n	: graf <i>triangular ladder</i>	15
$s(G)$	: <i>irregularity strength</i> (nilai pelabelan <i>irregular</i>)	18
$es(G)$	: <i>edge irregularity strength</i> (nilai pelabelan <i>k-irregular</i> sisi)	21

$tvs(G)$	: <i>total vertex irregularity strength</i> (nilai pelabelan total k -irregular titik)	3
$tes(G)$	: <i>total edge irregularity strength</i> (nilai pelabelan total k -irregular sisi)	.. 3
$ts(G)$	: <i>total irregularity strength</i> (nilai <i>totally irregular total k-labeling</i>)	 3
$vhs(G, \mathcal{H})$	: <i>vertex $\mathcal{H}$-irregularity strength</i> (nilai pelabelan titik k -irregular $\mathcal{H}$)	 22
$ehs(G, \mathcal{H})$	: <i>edge $\mathcal{H}$-irregularity strength</i> (nilai pelabelan sisi k -irregular $\mathcal{H}$)	 22
$ths(G, \mathcal{H})$	: <i>total $\mathcal{H}$-irregularity strength</i> (nilai pelabelan total k -irregular $\mathcal{H}$)	 4
$res(G)$	: <i>reflexive vertex strength</i> (nilai pelabelan k -irregular reflexive sisi)	 xi
$rvs(G)$	: <i>reflexive edge strength</i> (nilai pelabelan k -irregular reflexive titik)	 xi
$r\mathcal{H}s(G)$	: <i>reflexive $\mathcal{H}$ strength</i> (nilai pelabelan k -irregular reflexive $\mathcal{H}$)	 xi
$\lceil x \rceil$	: bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x	 19

Ika Hesti Agustin, 2022, **Pelabelan k -Irregular Reflexive Pada Graf**. Disertasi ini dibawah bimbingan Dr. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si. dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Teori graf merupakan kajian yang mempunyai banyak aplikasi, diantaranya adalah analisis topologi jaringan komunikasi dan transportasi, serta kriptografi. Pelabelan adalah salah satu kajian dalam teori graf yang dapat mendukung aplikasi tersebut. Oleh karena itu, penelitian mengenai pelabelan terus dikembangkan. Pelabelan suatu graf adalah pemberian notasi bilangan pada setiap titik atau setiap sisi, serta setiap titik dan sisi dengan suatu kondisi tertentu. Pelabelan dalam penelitian ini adalah pelabelan k -irregular reflexive. Terdapat tiga jenis pelabelan k -irregular reflexive, yaitu pelabelan k -irregular reflexive titik, sisi, dan subgraf. Pelabelan k -irregular reflexive pada graf G adalah fungsi f_v dari himpunan titik pada graf G ke bilangan $\{0, 2, 4, \dots, 2k_v\}$ dan fungsi f_e dari himpunan sisi pada graf G ke bilangan $\{1, 2, 3, \dots, k_e\}$. Pelabelan k -irregular reflexive titik adalah pelabelan k -irregular reflexive jika untuk setiap dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ memenuhi $wt(u) \neq wt(v)$, dengan $wt(u) = f_v(u) + \sum_{uv \in E(G)} f_e(uv)$. Pelabelan k -irregular reflexive sisi adalah pelabelan k -irregular reflexive jika untuk setiap dua sisi yang berbeda xy dan $x'y'$ memenuhi $wt(xy) \neq wt(x'y')$, dengan $wt(xy) = f_v(x) + f_e(xy) + f_v(y)$. Pelabelan k -irregular reflexive subgraf $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \subset G$) adalah pelabelan k -irregular reflexive jika untuk setiap dua subgraf yang berbeda $\mathcal{H}'$ dan $\mathcal{H}''$ yang isomorfis dengan $\mathcal{H}$ memenuhi $wt(\mathcal{H}') \neq wt(\mathcal{H}'')$, dengan $wt(\mathcal{H}) = \sum_{x \in V(\mathcal{H})} f_v(x) + \sum_{xy \in E(\mathcal{H})} f_e(xy)$. Nilai pelabelan k -irregular reflexive titik, sisi, atau subgraf pada graf G adalah minimum k dengan $k = \max\{2k_v, k_e\}$ sehingga graf G mempunyai pelabelan k -irregular reflexive titik, sisi, atau subgraf yang berturut-turut dinotasikan dengan $rvs(G)$, $res(G)$, dan $r\mathcal{H}s(G)$. Permasalahan dari penelitian ini adalah bagaimana menentukan nilai-nilai tersebut beserta batas bawahnya. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan batas bawah $rvs(G)$, $rvs(G)$, $res(G)$, batas atas $res(G)$, batas bawah $r\mathcal{H}s(G)$, dan $r\mathcal{H}s(G)$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif-kualitatif dan deduktif-analitik. Hasil-hasil penelitian ini adalah lema batas bawah $rvs(G)$ dan rvs pada graf siklus, graf lengkap, graf antiprisma, graf *friendship*, graf roda ganda, graf buku, graf tangga, graf lengkap dua partisi, sebarang graf dengan titik pendaan, graf sunlet, graf helm, graf *subdivided star*, dan graf *broom*. Batas atas $res(G)$ dan res pada graf *generalized subdivided star*, graf *broom*, graf bintang ganda, graf tangga, graf *triangular ladder*, graf $P_n \times C_3$, graf $P_n \odot P_2$, dan graf $P_n \odot C_3$. Batas bawah $r\mathcal{H}s(G)$ dan $r\mathcal{H}s$ pada graf *triangular ladder* dengan $\mathcal{H} \equiv C_3$, graf tangga dengan $\mathcal{H} \equiv C_4$, graf kipas dengan $\mathcal{H} \equiv C_3$, dan graf buku dengan $\mathcal{H} \equiv C_4$.

Kata kunci: Pelabelan k -irregular reflexive titik, pelabelan k -irregular reflexive sisi, pelabelan k -irregular reflexive $\mathcal{H}$, $rvs(G)$, $res(G)$, $r\mathcal{H}s(G)$.

Ika Hesti Agustin, 2022, *Irregular Reflexive k -Labeling of Graphs*. This thesis is supervised by Dr. Liliek Susilowati, S.Si., M.Si. and Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

Graph theory is a study that has many applications, including topological analysis of communication and transportation networks, and cryptography. Labeling which is one of the studies in graph theory can support this application. Therefore, the research on labeling continues to develop significantly. A labeling of a graph is a map that carries graph elements to the numbers, usually to the positive or non-negative integers with a certain condition. The labeling in this research is irregular reflexive k -labeling. There are three types of irregular reflexive k -labeling, namely a vertex irregular reflexive k -labeling, an edge irregular reflexive k -labeling, and an $\mathcal{H}$ irregular reflexive k -labeling. The irregular reflexive k -labeling of graph G is the function f_v from the vertex set of G to the number $\{0, 2, 4, \dots, 2k_v\}$ and the function f_e from the edge set of G to the number $\{1, 2, 3, \dots, k_e\}$. The vertex irregular reflexive k -labeling is irregular reflexive k -labeling if for any two different vertices $u, v \in V(G)$ satisfy $wt(u) \neq wt(v)$, where $wt(u) = f_v(u) + \sum_{uv \in E(G)} f_e(uv)$. The edge irregular reflexive k -labeling is irregular reflexive k -labeling if for every two different edges xy and $x'y'$ satisfy $wt(xy) \neq wt(x'y')$, where $wt(xy) = f_v(x) + f_e(xy) + f_v(y)$. The $\mathcal{H}$ irregular reflexive k -labeling ($\mathcal{H} \subset G$) is irregular reflexive k -labeling if for any two different sub graphs $\mathcal{H}'$ and $\mathcal{H}''$ which is isomorphic with $\mathcal{H}$ satisfy $wt(\mathcal{H}') \neq wt(\mathcal{H}'')$, with $wt(\mathcal{H}) = \sum_{x \in V(\mathcal{H})} f_v(x) + \sum_{xy \in E(\mathcal{H})} f_e(xy)$. The reflexive vertex, edge, and $\mathcal{H}$ strength of the graph G is minimum k with $k = \max\{2k_v, k_e\}$ so that graph G has vertex, edge, and $\mathcal{H}$ irregular reflexive k -labeling, and denoted by $rvs(G)$, $res(G)$, and $r\mathcal{H}s(G)$, respectively. The problem of this research is how to determine these values and their lower bounds. The purpose of this research is to determine the lower bound of $rvs(G)$, $res(G)$, upper bound of $res(G)$, lower bound of $r\mathcal{H}s(G)$, and $r\mathcal{H}s(G)$. The methods are used in this research are deductive-qualitative and deductive-analytic. The results of this research are the lower bound of $rvs(G)$ and rvs of cycle graph, complete graph, antiprism graph, *friendship* graph, double wheel graph, book graph, ladder graph, two-partition complete graph, any graph with a pendant point, sunlet graph, helm graph, *subdivided star*, and *broom* graph. The upper bound of $res(G)$ and res of graph *generalized subdivided star*, *broom*, double star graph, ladder graph, graph *triangular ladder*, graph $P_n \times C_3$, graph $P_n \odot P_2$, and the graph $P_n \odot C_3$. The lower bound of $r\mathcal{H}s(G)$ and $r\mathcal{H}s$ of *triangular ladder* graph with $\mathcal{H} \equiv C_3$, ladder graph with $\mathcal{H} \equiv C_4$, fan graph with $\mathcal{H} \equiv C_3$, and book graph with $\mathcal{H} \equiv C_4$.

Keywords: Vertex irregular reflexive k -labeling, edge irregular reflexive k -labeling, $\mathcal{H}$ irregular reflexive k -labeling, $rvs(G)$, $res(G)$, $r\mathcal{H}s(G)$.