

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika yang memberikan kontribusi besar pada perkembangan dunia pada era digital ini salah satunya adalah matematika diskrit. Matematika diskrit banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu bagian dari matematika diskrit adalah teori graf. Beberapa permasalahan yang dapat diselesaikan dengan teori graf antara lain analisis topologi jaringan, baik jaringan komunikasi maupun transportasi, serta kriptografi.

Karena aplikasinya yang cukup luas, kajian-kajian dalam teori graf mengalami perkembangan yang cukup pesat, antara lain himpunan dominasi, dimensi metrik, pewarnaan graf, dan pelabelan. Himpunan dominasi merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf, dengan ketentuan bahwa titik-titik sebagai himpunan *dominator* mendominasi titik-titik yang bertetangga dengan titik *dominator*. *Dominating number* merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Berdasarkan sejarah, masalah dominasi telah dipelajari dari tahun 1960, akan tetapi tingkat pengkajian tentang dominasi berkembang dan meningkat secara pesat pada pertengahan 1980-an. Definisi formal dan beberapa hasil penelitian terkait himpunan dominasi dapat dilihat pada Mathieu Liedloff (2008), Bagheri, dkk. (2011), serta Reni Umilasari dan Darmaji (2016).

Suatu himpunan bagian dari himpunan titik pada graf disebut sebagai himpunan pembeda apabila setiap dua titik pada graf memiliki representasi yang berbeda terhadap himpunan tersebut. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum merupakan basis pada graf. Sedangkan, kardinalitas dari basis disebut dimensi metrik pada graf. Definisi formal dan beberapa hasil penelitian terkait konsep dimensi metrik dapat dilihat pada

Careres, dkk. (2007) yang mengkaji dimensi metrik graf hasil kali kartesian. Yero, dkk. (2011) mengkaji dimensi metrik graf hasil korona, Iswadi, dkk. (2011) mengkaji graf hasil kali korona, Feng, dkk. (2013) mengkaji dimensi metrik graf lintasan, dan Saputro, dkk. (2017) mengkaji dimensi metrik pada graf hasil operasi *comb*.

Pewarnaan graf adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Dalam hal ini, pelabelan yang dimaksud adalah memberikan warna pada titik-titik graf dengan aturan tertentu. Ada tiga macam pewarnaan graf antara lain: pewarnaan titik (*vertex coloring*) yaitu memberikan warna pada setiap titik sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama, pewarnaan sisi (*edge coloring*) yaitu memberikan warna pada setiap sisi sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama, dan pewarnaan bidang yaitu memberikan warna pada setiap bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Definisi formal dan beberapa hasil penelitian terkait pewarnaan graf dapat dilihat pada Formanowicz and Tanas (2012).

Pelabelan suatu graf adalah pemberian notasi bilangan pada setiap titik atau setiap sisi, serta setiap titik dan sisi dengan suatu kondisi tertentu (Hartsfield dan Ringel, 1994). Setiap unsur dari graf seperti titik, sisi, atau titik dan sisi dapat dilabeli. Jika setiap titik pada suatu graf dilabeli disebut sebagai pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika setiap sisi pada suatu graf dilabeli disebut sebagai pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika setiap titik dan sisi pada suatu graf dilabeli disebut sebagai pelabelan total (*total labeling*).

Gallian pada tahun 2020 membuat survey tentang jenis-jenis pelabelan dan hasil-hasilnya beserta perkembangannya. Jenis-jenis pelabelan tersebut adalah pelabelan *graceful*, *harmonious*, *cordial*, *magic*, *antimagic*, *irregular*, dan lain-lain. Salah satu jenis pelabelan yang dikaji dalam penelitian ini adalah pelabelan *irregular* karena mempunyai sejarah yang menarik yang dikemukakan oleh Tanna, dkk (2017). Pada sebuah multigraf tanpa *loop*, ditentukan jumlah minimum sisi paralel yang diperlukan untuk memastikan bahwa semua titik dalam multigraf tersebut memiliki derajat yang berbeda. Apabila dianalogikan dengan graf sederhana, jumlah sisi paralel yang direpresentasikan dengan

bilangan bulat positif disebut label sisi dan jumlah semua label sisi yang terkait pada suatu titik disebut bobot titik. Ketidakteraturannya adalah semua bobot titik pada graf tersebut menjadi berbeda. Permasalahan tersebut saat ini dapat dinyatakan dengan kalimat “Labeli sisi-sisi graf sederhana yang terhubung berordo minimal 3 dengan bilangan bulat positif, sedemikian sehingga graf tersebut menjadi tidak teratur (*irregular*).” Permasalahan tersebut kemudian dikenal sebagai pelabelan *irregular*. Label terbesar yang minimum yang memenuhi penugasan *irregular* disebut *irregularity strength*.

Pelabelan *irregular* adalah pelabelan pada suatu elemen graf yang dilabeli dengan bilangan bulat positif secara berurutan dan boleh berulang. Teori pelabelan *irregular* diperkenalkan oleh Chartrand, dkk. (1988) yang dikenal sebagai *irregularity strength* ($s(G)$) yang kemudian diikuti oleh peneliti-peneliti selanjutnya. Berdasarkan penelitian tersebut, Bača, dkk. (2007) mengembangkan dua parameter yaitu *total edge irregularity strength* ($tes(G)$) dan *total vertex irregularity strength* ($tvs(G)$) pada graf. Selanjutnya Marzuki, dkk. (2013) memperkenalkan *total irregularity strength* ($ts(G)$) yang merupakan gabungan konsep *total edge irregularity strength* ($tes(G)$) dan *total vertex irregularity strength* ($tvs(G)$) pada graf. Ahmad, dkk. (2014) mendefinisikan *edge irregularity strength* ($es(G)$). Masalah utama dalam pelabelan *irregular* adalah menentukan label terbesar minimum yang memenuhi kondisi atau jenis pelabelan *irregular*. Label terbesar minimum biasanya disebut sebagai nilai pelabelan *irregular* yang besarnya didasarkan pada batas bawah nilai pelabelan tersebut.

Bača, dkk. (2007) mengawali penelitian tentang pelabelan total *k-irregular* sisi. Ahmad, dkk. (2014) melakukan penelitian pelabelan *k-irregular* sisi pada graf *paths*, *cycles*, *stars*, *double stars* dan graf hasil operasi *cartesian* $P_m \times P_n$, kemudian pada tahun 2018 mengembangkan penelitiannya pada graf *complete binary tree* dan *complete ternary tree*. Hinding, dkk. (2018) melakukan penelitian pelabelan total *k-irregular* sisi pada graf hasil operasi *cartesian* pada graf lintasan P_2 dan komplit. Tarawneh, dkk. (2018) melakukan penelitian pelabelan *k-irregular* sisi pada graf *triangle grid* (L_n) dan graf hasil operasi

cartesian graf lintasan. Tarawneh, dkk. (2020) juga meneliti pelabelan *k-irregular* sisi pada graf hasil operasi *corona* dengan graf siklus. Selanjutnya, penelitian pelabelan total *k-irregular* sisi juga dilakukan oleh Putra dan Susanti (2018) pada graf *centralized uniform theta*, serta dilakukan oleh Ratnasari dan Susanti (2020) pada graf *ladder-related*.

Konsep pelabelan *irregular* terus berkembang, yang ditandai dengan beberapa penelitian berikut. Hinding, dkk. (2010) telah melakukan penelitian tentang pelabelan total *k-irregular* titik pada graf *tree* dan graf lintasan P_n . Ramdani, dkk. (2015) meneliti batas atas nilai pelabelan total *k-irregular* titik pada graf hasil operasi kartesian dengan graf lintasan (P_2) dan graf reguler. Susilawati, dkk. (2015) meneliti pelabelan total *k-irregular* titik pada subdivisi beberapa graf pohon. Selanjutnya, Susilawati, dkk. (2018) meneliti kajian ini pada graf subdivisi pada graf *caterpillar*, *firecracker*, amalgamasi graf bintang dan subdivisi graf pohon. Berikutnya, Indriati, dkk. (2015) melakukan penelitian pelabelan total *k-irregular* pada graf bintang ganda dan *caterpillar*. Pada tahun 2019 Dewi, dkk. dan Haryanti, dkk. juga melakukan penelitian pada kajian pelabelan total *k-irregular* titik.

Konsep pelabelan *irregular* juga berkembang ke dalam *Vertex $\mathcal{H}$ -irregularity Strength* dan *Edge $\mathcal{H}$ -irregularity Strength* didefinisikan dalam Ashraf, dkk. (2016). Konsep pelabelan *Vertex $\mathcal{H}$ -irregularity Strength* adalah pelabelan *irregular* yang melabeli titik suatu graf dengan bilangan bulat positif secara berurut dan boleh berulang sehingga setiap subgraf $\mathcal{H}$ pada graf tersebut memiliki bobot yang berbeda. Sedangkan konsep pelabelan *Edge $\mathcal{H}$ -irregularity Strength* adalah pelabelan *irregular* yang melabeli sisi suatu graf dengan bilangan bulat positif secara berurut dan boleh berulang sehingga setiap subgraf $\mathcal{H}$ pada graf tersebut memiliki bobot yang berbeda. Selanjutnya, Ashraf, dkk. (2020) mendefinisikan pelabelan total *k $\mathcal{H}$ -irregular* yaitu pelabelan *irregular* yang melabeli titik dan sisi suatu graf dengan bilangan bulat positif secara berurut dan boleh berulang sehingga setiap subgraf $\mathcal{H}$ pada graf tersebut memiliki bobot yang berbeda. Bobot subgraf $\mathcal{H}$ merupakan hasil penjumlahan dari label titik dan label sisi yang terdapat dalam satu subgraf $\mathcal{H}$ tersebut. Nilai *k* minimum sehingga suatu graf G mempunyai pelabelan total *k $\mathcal{H}$ -irregular* disebut sebagai

total $\mathcal{H}$ -irregularity strength dapat dinotasikan sebagai $ths(G, \mathcal{H})$. Beberapa penelitian terkait kajian pelabelan *$\mathcal{H}$ -irregularity strength* dilakukan oleh Agustin, dkk. (2017), Bača, dkk. (2018), Ashraf, dkk. (2019), Naeem, dkk. (2021), dan Nisviasari, dkk. (2020).

Selanjutnya konsep pelabelan *irregular* dikembangkan pada pelabelan *k-irregular reflexive (irregular reflexive k-labeling)*. Tanna, dkk. (2017) menyatakan bahwa konsep *irregular reflexive* multigraf dikembangkan dari konsep *irregular* multigraf dengan memungkinkan adanya *loop*. Pelabelan *irregular reflexive* mencakup label titik yang merepresentasikan *loop*. Karena setiap *loop* memberikan kontribusi dua kali terhadap derajat titik, maka titik yang mengandung *loop* mempunyai label bilangan genap, sedangkan titik tanpa *loop* mempunyai label 0. Bobot sebuah titik pada pelabelan total ditentukan dengan menjumlahkan label titik dan label sisi-sisi yang terkait dengan titik tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut, konsep pelabelan *irregular reflexive* berbeda dengan konsep pelabelan *irregular* yaitu, pada cara melabeli titiknya. Pada pelabelan *k-irregular reflexive*, titik-titik pada sebuah graf dilabeli dengan bilangan bulat non negatif genap sedangkan sisinya dilabeli dengan bilangan bulat positif serta label titik maupun sisi boleh berulang. Konsep tersebut memberikan hasil berbeda dengan konsep pelabelan *irregular* sebelumnya sehingga menarik untuk dikembangkan. Terdapat dua jenis pelabelan *irregular reflexive* yang telah diperkenalkan definisinya, yaitu pelabelan *k-irregular reflexive* sisi dan pelabelan *k-irregular reflexive* titik. Nilai pelabelan *k-irregular reflexive* sisi dari graf G disebut *reflexive edge strength* dan dinotasikan dengan $res(G)$, sedangkan nilai pelabelan *k-irregular reflexive* titik dari graf G disebut *reflexive vertex strength* dan dinotasikan dengan $rvs(G)$.

Tanna, dkk. (2017) telah menentukan $res(G)$, dengan G adalah graf prisma (D_n), graf roda (W_n), graf kipas (F_n) dan graf keranjang (B_n) serta menentukan batas bawah $res(G)$. Bača, dkk. (2017) juga menentukan $res(G)$, dengan G adalah graf *generalized friendship*. Dari penelitian tersebut, terdapat masalah terbuka yaitu menentukan $rvs(G)$, dengan G adalah graf-graf yang telah diteliti dan sudah dipecahkan oleh Tanna, dkk. (2018).

Batas bawah untuk nilai $rvs(G)$ yang sudah diteliti adalah batas bawah $rvs(G)$ dengan G graf reguler, sedangkan untuk jenis graf lainnya belum diteliti dan merupakan masalah terbuka. Bača, dkk. telah menentukan $res(G)$, dengan G adalah graf *friendship* ($\mathcal{F}_{n,m}$). Bača, dkk. (2018) telah menentukan $res(G)$, dengan G adalah graf siklus (C_n), graf hasil operasi kartesian siklus ($C_n \times C_3$), dan graf hasil operasi join ($P_n + (2K_1)$, $C_n + (2K_1)$). Guirao, dkk. (2018) telah menentukan $res(G)$, dengan G adalah graf *disjoint union generalized petersen*.

Berdasarkan uraian hasil-hasil penelitian *irregular reflexive* mulai tahun 2017, masalah terbuka dalam penelitian *irregular reflexive* adalah menentukan batas bawah $rvs(G)$ pada graf secara general, batas atas $res(G)$, $rvs(G)$ dan $res(G)$ pada graf-graf selain yang sudah diteliti oleh peneliti sebelumnya, serta graf-graf hasil operasi. Pelabelan *k-irregular reflexive* menarik untuk dikembangkan dengan evaluator selain sisi dan titik. Oleh karena itu, Penelitian ini juga mengembangkan definisi baru yaitu, pelabelan $\mathcal{H}$ -*irregular reflexive* dari graf G ($\mathcal{H}$ adalah subgraf pada graf G) yang diinisiasi dari penelitian *irregular* sebelumnya yang mengembangkan pelabelan total k $\mathcal{H}$ -*irregular*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

- Bagaimana menentukan batas bawah *reflexive vertex strength* (rvs) dan *reflexive vertex strength* (rvs) pada graf?
- Bagaimana menentukan *reflexive edge strength* (res) dan batas atas *reflexive edge strength* (res) pada graf?
- Bagaimana mengembangkan definisi baru, yaitu pelabelan $\mathcal{H}$ -*irregular reflexive* dari graf G dengan $\mathcal{H} \subset G$, dan bagaimana menentukan batas bawahnya serta bagaimana menentukan nilai pelabelan $\mathcal{H}$ -*irregular reflexive* dari graf G ?

1.3 Batasan Masalah

Graf-graf yang digunakan pada seluruh penelitian ini adalah graf sederhana dan terhubung.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang di atas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

- a. Menentukan batas bawah *reflexive vertex strength* (rvs) dan *reflexive vertex strength* (rvs) pada graf?
- b. Menentukan *reflexive edge strength* (res) dan batas atas *reflexive edge strength* (res) pada graf?
- c. Mengembangkan definisi baru, yaitu pelabelan $\mathcal{H}$ -irregular reflexive dari graf G dengan $\mathcal{H} \subset G$, dan menentukan batas bawahnya serta menentukan nilai pelabelan $\mathcal{H}$ -irregular reflexive dari graf G ?

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

- a. Memberi motivasi kepada peneliti graf lain untuk memperluas penelitian tentang pelabelan *irregular reflexive* pada graf dari titik, sisi, maupun subgraf $\mathcal{H}$;
- b. Dapat digunakan sebagai pengembangan dan perluasan ilmu dari permasalahan pelabelan *irregular reflexive* pada graf dari titik, sisi, maupun subgraf $\mathcal{H}$.