

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMUM PADA MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN ADANYA
POPULASI *CROSS-IMMUNE***

SKRIPSI



BERTHA AURELLIA PAMUDYA FAJAR

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMUM PADA MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN ADANYA
POPULASI *CROSS-IMMUNE***

SKRIPSI



BERTHA AURELLIA PAMUDYA FAJAR

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

IR - PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimum Pada Model Penyebaran Penyakit
Influenza Dengan Adanya Populasi *Cross-Immune***

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Bidang
Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga

Disetujui oleh:

Pembimbing I,



Dr. Miswanto, M.Si.

NIP. 196802041993031002

Pembimbing II,



Dr. Windarto, S.Si., M.Si.

NIP. 197711042003121001

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimum Pada Model Penyebaran
Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi *Cross-Immune*
Penyusun : Bertha Aurellia Pamudya Fajar
NIM : 081811233097
Pembimbing I : Dr. Miswanto, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Windarto, S.Si., M.Si.
Tanggal Seminar : 8 Juli 2022

Disetujui oleh:

Pembimbing I,



Dr. Miswanto, M.Si.

NIP. 196802041993031002

Pembimbing II,



Dr. Windarto, S.Si., M.Si.

NIP. 197711042003121001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga



Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si.

NIP. 196804041994031020

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak boleh dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkup Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penulis dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

SURAT PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Bertha Aurellia Pamudya Fajar
NIM : 081811233097
Program Studi : S-1 Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiasi dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

“Analisi Kestabilan dan Kontrol Optimum Pada Model Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi *Cross-Immune*”

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 11 Juli 2022



Bertha Aurellia Pamudya Fajar
081811233097

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Analisis kestabilan dan kontrol optimum pada model penyebaran penyakit influenza dengan adanya populasi cross-immune*” dan dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan jalan kebenaran kepada umatnya.

Keberhasilan penulis dalam menyusun skripsi ini tentunya tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, tak lupa penulis ucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Moh. Nasih SE., MT., Ak. Selaku Rektor Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menuntut ilmu.
2. Segenap pimpinan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga yang telah memberikan fasilitas selama mengikuti perkuliahan.
3. Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen dan Koordinator Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang selalu memberikan fasilitas.
4. Abdulloh Jaelani, S.Si., M.Si. selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama perkuliahan.
5. Dr. Miswanto, M.Si. selaku dosen pembimbing I dan Dr. Windarto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan berupa ilmu, arahan, waktu serta semangat dengan penuh kesabaran dan ketelitian.
6. Seluruh dosen di Universitas Airlangga, khususnya di Departemen Matematika yang telah menyampaikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.

7. Keluarga tercinta Andy Pamungkas dan Ety Dyah Ernawati selaku ayah dan ibu penulis yang selalu memberikan dukungan untuk penulis baik berupa material maupun spiritual, serta adik penulis, Alvito Pamudya Rama, yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2018 yang telah memberikan pengalaman dan bantuan selama masa perkuliahan.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat sebagai penambah informasi khususnya bagi mahasiswa Universitas Airlangga. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini dimungkinkan masih ada kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharap kritik dan saran yang sifatnya membangun demi penyempurnaan penulisan selanjutnya.

Surabaya, 11 Juli 2022

Penulis



Bertha Aurellia Pamudya Fajar

Bertha Aurellia Pamudya Fajar, 2022. **Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimum pada Model Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi *Cross-Immune***. Skripsi ini dibawah bimbingan Dr. Miswanto, M.Si., dan Dr. Windarto, M.Si., Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Influenza merupakan suatu penyakit infeksi saluran pernapasan. Influenza lebih dikenal dengan sebutan flu, yang disebabkan oleh virus RNA dari family *Orthomyxoviridae* (virus influenza). Skripsi ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan titik setimbang pada model matematika penyebaran penyakit influenza dengan adanya populasi *Cross-Immune*, serta menerapkan variabel kontrol optimal berupa upaya pencegahan dan pengobatan. Pada model matematika penyebaran penyakit influenza dengan adanya populasi *Cross-Immune* diperoleh dua titik setimbang, yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Kestabilan lokal dari titik setimbang bergantung pada bilangan reproduksi dasar (R_0). Ketika $R_0 < 1$ maka tidak ada penyebaran penyakit influenza dan ketika $R_0 > 1$ maka terjadi penyebaran penyakit influenza. Selanjutnya, permasalahan variabel kontrol pada model matematika penyebaran penyakit influenza diselesaikan dengan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa upaya pengobatan lebih efektif dalam menekan penyebaran penyakit influenza dibandingkan dengan upaya pencegahan. Namun pemberian variabel kontrol berupa upaya pencegahan dan pengobatan secara bersamaan paling efektif dalam meminimumkan jumlah populasi manusia terpapar dan terinfeksi Influenza.

Kata Kunci: Model Matematika, Influenza, Pencegahan, Pengobatan, Kestabilan, Kontrol Optimal

Bertha Aurellia Pamudya Fajar, 2022. **Influenza Spreading Stability And Optimization Controls With The Existence Of *Cross-Immune* Population Analysis**. This thesis is supervised by Dr. Miswanto, M.Si., and Dr. Windarto, M.Si., Mathematic Department, Science and Technology Faculty, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

Influenza is a respiratory tract infection known as flu. Caused by an RNA virus from *Orthomyxoviridae family*. This thesis aims to analyze the stability of the equilibrium point in the mathematical model of influenza transmission with *Cross-Immune* population and applying optimal control variables in the form of prevention and treatment. In this mathematical model of influenza transmission with *Cross-Immune* population, we obtain two equilibriums namely, the non- endemic equilibrium and the endemic equilibrium. Local stability and the existence of endemic equilibrium depend on the basic reproduction number (R_0). The spread of influenza does not occur in the population when $R_0 < 1$ and the spread of influenza persist in the population when $R_0 > 1$. Furthermore, the problem of control variables in the mathematical model of influenza transmission is determined through the Pontryagin Maximum Principle method. The numerical simulation results show that treatment efforts are more effective in suppressing the spread of influenza disease than prevention efforts. However, giving control variables in the form of prevention and treatment at the same time is very effective in minimizing the number of human populations *expose* to and infected with influenza.

Keywords: Mathematical Model, Influenza, Prevention, Treatment, Stability, Optimal Control.

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI	iii
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI	iv
SURAT PERNYATAAN ORISINALITAS	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB I	1
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	3
1.5 Batasan Masalah	3
BAB II	4
TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Influenza	4
2.1.1 <i>Cross-Immune</i>	4
2.1.2 Penularan Penyakit Influenza	4
2.1.3 Pencegahan Penyakit Influenza	5
2.1.4 Pengobatan Penyakit Influenza	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	6
2.3 Model Pertumbuhan Logistik	7
2.4 Kestabilan Sistem Linier	8

2.5	Kriteria Routh-Hurwitz	10
2.6	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	11
2.7	Masalah Kontrol Optimal	12
2.8	Prinsip Maksimum Pontryagin	13
BAB III.....		15
METODOLOGI PENELITIAN		15
BAB IV		17
PEMBAHASAN.....		17
4.1	Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Populasi <i>Cross-Immune</i> Tanpa Kontrol.....	17
4.2	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	21
4.2.1	Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza ...	21
4.2.2	Kestabilan Lokal Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	25
4.2.2.1	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik.....	26
4.2.2.2	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Endemik	28
4.2.3	Analisis Sensitivitas.....	31
4.3	Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	34
4.3.1	Penyelesaian Kontrol Optimal	36
4.3.2	Simulasi dan Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza dengan Kontrol dan Tanpa Kontrol	39
BAB V.....		47
PENUTUP.....		47
5.1	Kesimpulan	47
5.2	Saran	48

DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN	51

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul Tabel	Halaman
4.1	Variabel dalam Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	18
4.2	Parameter dalam Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	18
4.3	Nilai Parameter Bidang Fase Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	29
4.4	Nilai Awal Bidang Fase Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	30
4.5	Nilai Indeks Sensitivitas Parameter	32
4.6	Hubungan antara Perubahan pada Nilai Parameter terhadap Nilai R_0	32
4.7	Notasi dan Pengertian Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza dengan Variabel Kontrol	34
4.8	Jumlah Populasi Manusia Terpapar Dalam Masa Inkubasi selama 100 hari	41
4.9	Jumlah Populasi Manusia Terpapar selama 100 hari	42
4.10	Fungsi Ongkos	45

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Gambar	Halaman
4.1	Diagram Transmisi Model Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>	19
4.2	Grafik Bidang Fase pada Bidang I-E pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	30
4.3	Sensitivitas β terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai k yang Berbeda	33
4.4	Sensitivitas k terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai β yang Berbeda	33
4.5	Grafik Simulasi Jumlah Populasi Manusia Terpapar Dalam Masa Inkubasi (E)	40
4.6	Grafik Simulasi Jumlah Populasi Manusia Terpapar (I)	41
4.7	Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan Terinfeksi Influenza (u_1)	42
4.8	Grafik Profil Kontrol Upaya Pengobatan Terinfeksi Influenza (u_2)	43
4.9	Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan (u_1) dan Pengobatan (u_2) Terinfeksi Influenza	44

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran
1	Perhitungan Titik Setimbang Non Endemik E_0 Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>
2	Perhitungan <i>Basic Reproduction Number</i> R_0
3	Perhitungan Titik Setimbang Endemik E_1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dengan Adanya Populasi <i>Cross-Immune</i>
4	Analisis Titik Setimbang Non Endemik E_0
5	Analisis Titik Setimbang Endemik E_1
6	Kode Program Simulasi Numerik Grafik Bidang Fase I dan E Titik Setimbang Endemik E_1
7	Kode Program untuk Sensitivitas β terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai k yang Berbeda
8	Kode Program untuk Sensitivitas k terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai β yang Berbeda
9	Kode Program Simulasi Numerik pada Matlab untuk Model tanpa Variabel Kontrol
10	Kode Program DOTcvp pada Matlab untuk Model dengan Variabel Kontrol u_1
11	Kode Program DOTcvp pada Matlab untuk Model dengan Variabel Kontrol u_2
12	Kode Program DOTcvp pada Matlab untuk Model dengan Variabel Kontrol u_1 dan u_2