

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2) pertama kali terjadi pada Desember 2019 di Wuhan, China. Dalam beberapa minggu berikutnya, SARS-CoV-2 menyebar ke seluruh China dan seluruh dunia, serta mengakibatkan pandemi global. *World Health Organization* (WHO) menyatakan bahwa wabah tersebut adalah *Public Health Emergency of International Concern* (PHEIC) pada tanggal 30 Januari 2020. Selain itu, WHO secara resmi mengganti nama infeksi SARS-CoV-2 menjadi *Coronavirus Disease-19* (COVID-19) (WHO, 2020). COVID-19 adalah sekelompok virus RNA berantai tunggal *sense-positif* dan tidak tersegmentasi yang termasuk dalam ordo *Nidovirales*, famili *Coronaviridae*, subfamili *Orthocoronavirinae* dan tersebar luas di antara mamalia dan manusia (Samui dkk., 2020). Transmisinya melalui *people to people contact*. Transmisinya juga menunjukkan pertumbuhan yang hampir eksponensial pada fase awal epidemi seperti yang ditunjukkan oleh data harian global (Gebremeskel dkk., 2021). Dari peta persebaran COVID-19 di Indonesia, menunjukkan bahwa 4.178.164 individu terkonfirmasi terinfeksi COVID-19. Sebanyak 84.963 kasus aktif individu terinfeksi COVID-19, sebanyak 3.953.519 individu sembuh dari terinfeksi COVID-19 dan sebanyak 139.682 individu meninggal akibat terinfeksi COVID-19 (Covid19.go.id, 2021).

Banyaknya kasus terkonfirmasi COVID-19 menyebabkan setiap individu melakukan upaya terbaiknya untuk mengurangi kemungkinan terinfeksi COVID-19. WHO bersama badan terkait juga terus mengumumkan dan merilis langkah-langkah strategis intervensi non medis potensial seperti *Social distancing*, pelacakan kontak, karantina, isolasi, sering membersihkan tangan dengan sabun, tinggal di rumah, memakai masker, dan sebagainya yang dilakukan untuk mengurangi dan menekan merebaknya pandemi COVID-19 di

seluruh dunia, serta memerangi COVID-19 sepanjang waktu secara intensif di samping uji coba penemuan vaksin (**Gebremeskel dkk., 2021**).

Vaksin adalah produk biologi yang berisi antigen berupa mikroorganisme atau bagiannya yang telah diolah sedemikian rupa sehingga aman, yang apabila diberikan kepada seseorang dapat melindunginya dari penyakit yang melemahkan, bahkan yang mengancam jiwa. Vaksin akan merangsang pembentukan kekebalan terhadap penyakit tertentu pada tubuh seseorang (**Covid19.go.id, 2021**). Dalam pelaksanaan vaksinasi COVID-19 di Indonesia, pemerintah mengupayakan ketersediaan vaksin terpenuhi untuk setidaknya 208.265.720 penduduk. Sampai saat ini di Indonesia, sebanyak 83.248.128 individu telah melaksanakan vaksinasi ke-1 dan sebanyak 46.980.347 individu telah melaksanakan vaksinasi ke-2 (**Covid19.go.id, 2021**).

Pemodelan matematika dapat membantu dalam pemahaman seberapa menular suatu penyakit, kapan infektivitas menjadi tinggi selama epidemi, seberapa akut penyakitnya, dan seberapa efektif intervensi telah dan seharusnya terjadi (**Samui dkk., 2020**). Para peneliti di seluruh dunia telah menggambarkan model matematika dinamika penyebaran COVID-19, diantaranya **Gumel dkk. (2020)** yang menyajikan dasar untuk merumuskan, menganalisis dan mensimulasikan model matematika untuk memahami dinamika COVID-19. **Annas dkk. (2020)** menganalisis dan melakukan simulasi model SEIR melalui isolasi dan vaksinasi penyebaran COVID-19 di Indonesia. **Raslan (2020)** mengembangkan model fraksional menggunakan operator fraksional Caputo terhadap penyebaran COVID-19 di Mesir untuk mendukung upaya pengendalian proliferasi pada tingkat yang dapat ditangani oleh layanan kesehatan. **Wintachai dan Prathom (2021)** merumuskan dan menganalisis pemodelan matematika untuk COVID-19 model SEIR dengan parameter utama tingkat vaksinasi, efektivitas vaksin profilaksis dan terapeutik. **Kumar dkk. (2021)** mengusulkan model dinamis SEIRS baru dengan memasukkan tingkat vaksinasi yang kemudian dirumuskan ulang dalam turunan fraksional Atangana-Baleanu. **Anggriani dkk. (2021)** merumuskan, menganalisis dan

mensimulasikan transimi COVID-19 SEIR dengan mempertimbangkan kompartemen asimtomatik dan simtomatik serta penurunan imunitas.

Dalam penelitian ini, model matematika dinamika penyebaran COVID-19 oleh **Gumel dkk. (2020)** akan dikembangkan menjadi model matematika orde fraksional menggunakan operator fraksional Caputo. Selanjutnya akan dilakukan estimasi parameter menggunakan data kumulatif penyebaran COVID-19 di Provinsi Jawa Timur. Selain itu akan dilakukan analisis kestabilan titik setimbang serta simulasi numerik dan interpretasinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana hasil estimasi parameter dari model matematika penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi?
2. Bagaimana bentuk model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi?
3. Bagaimana analisis kestabilan model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi?
4. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik dari model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi?

1.3 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan hasil estimasi parameter dari model matematika penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi.

2. Memperoleh bentuk model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi.
3. Menganalisis kestabilan model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi.
4. Menginterpretasi hasil simulasi numerik dari model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi.

1.4 Manfaat

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Dapat memberikan informasi dan wawasan mengenai penerapan model matematika orde fraksional penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi dalam mendeskripsikan dinamika penyebaran COVID-19, serta menjadi bahan referensi untuk penelitian selanjutnya.
2. Dapat memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan di bidang pemodelan matematika khususnya kesehatan, yaitu penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan adanya *saturated incidence rate* dan vaksinasi.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Model matematika yang dibahas merupakan model matematika modifikasi dari penelitian **Gumel dkk. (2020)**.
2. Sistem Persamaan Diferensial Fraksional (SPDF) yang digunakan adalah Sistem Persamaan Diferensial Fraksional Caputo.
3. Data yang digunakan merupakan data kumulatif penyebaran COVID-19 di Provinsi Jawa Timur, Indonesia pada 5 November – 4 Desember 2021.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 COVID-19

Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus (SARS-CoV-2) pertama kali terjadi pada Desember 2019 di Wuhan, China. Dalam beberapa minggu berikutnya, SARS-CoV-2 menyebar ke seluruh China dan di seluruh dunia, mengakibatkan pandemi global. *World Health Organization* (WHO) menyatakan bahwa wabah tersebut adalah *Public Health Emergency of International Concern* (PHEIC) pada tanggal 30 Januari 2020. Selain itu, WHO secara resmi mengganti nama infeksi SARS-CoV-2 menjadi *Coronavirus Disease-19* (COVID-19) (WHO, 2020). COVID-19 adalah sekelompok virus RNA berantai tunggal *sense-positif* dan tidak tersegmentasi yang termasuk dalam ordo *Nidovirales*, famili *Coronaviridae*, subfamili *Orthocoronavirinae* dan tersebar luas di antara mamalia dan manusia (Samui dkk., 2020).

COVID-19 ditularkan dari manusia ke manusia melalui kontak langsung dengan benda atau permukaan yang terkontaminasi dan menghirup tetesan pernapasan baik dari manusia yang terinfeksi bergejala maupun tidak bergejala. Masa inkubasi COVID-19 berkisar antara 2 hingga 14 hari, dan sebagian besar infeksi (lebih dari 80%) menunjukkan gejala klinis penyakit yang ringan atau tidak sama sekali (Ngonghala dkk., 2020b). Transmisinya menunjukkan pertumbuhan yang hampir eksponensial pada fase awal epidemi seperti yang ditunjukkan oleh data harian global. Ini menghasilkan hasil klinis parah ringan hingga tinggi sekitar 20% dari semua kasus yang dikonfirmasi (Gebremeskel dkk, 2021).

Gejala umum penyakit ini antara lain demam, batuk dan sesak napas untuk kasus ringan, dan pneumonia untuk kasus parah. Meskipun data dengan jelas menunjukkan bahwa sebagian besar kematian terkait COVID-19 dan kasus parah biasanya terjadi pada orang tua yaitu, orang berusia 65 tahun ke atas dan orang dengan penyakit penyerta, seperti penderita diabetes, hipertensi, obesitas, ginjal dan kondisi lain yang menekan atau membahayakan sistem kekebalan,

orang yang lebih muda dan petugas kesehatan garis depan juga berisiko tinggi tertular COVID-19 (Ngonghala dkk., 2020b). WHO bersama badan terkait terus mengumumkan dan merilis langkah-langkah strategis intervensi non medis potensial untuk memerangi COVID-19 sepanjang waktu secara intensif di samping uji coba penemuan vaksin. *Social distancing*, pelacakan kontak, karantina, isolasi, sering membersihkan tangan dengan sabun, tinggal di rumah, dan memakai masker adalah beberapa langkah intervensi strategis yang dilakukan untuk mengurangi dan menekan merebaknya pandemi COVID-19 di seluruh dunia (Gebremeskel dkk., 2021).

2.2 Vaksin COVID-19

Vaksin adalah produk biologi yang berisi antigen berupa mikroorganisme atau bagiannya yang telah diolah sedemikian rupa sehingga aman, yang apabila diberikan kepada seseorang untuk melindunginya dari penyakit yang melemahkan, bahkan yang mengancam jiwa. Vaksin akan merangsang pembentukan kekebalan terhadap penyakit tertentu pada tubuh seseorang (Covid19.go.id, 2021). Vaksin bukanlah obat. Vaksin mendorong pembentukan kekebalan spesifik tubuh agar terhindar dari tertular virus ataupun kemungkinan sakit berat. Selama belum ada obat khusus untuk COVID-19, maka perilaku 3M (memakai masker, mencuci tangan dengan sabun, dan menjaga jarak) adalah upaya perlindungan yang bisa kita lakukan agar terhindar dari COVID-19. Vaksin akan merangsang pembentukan kekebalan terhadap penyakit tertentu pada tubuh seseorang. Setelah divaksin, tubuh akan mengingat virus atau bakteri pembawa penyakit, mengenali dan tahu cara melawannya. Vaksinasi tidak hanya bertujuan untuk memutus rantai penularan penyakit, tetapi juga dalam jangka panjang untuk mengeliminasi bahkan membasmi penyakit itu sendiri. Apabila seseorang tidak menjalani vaksinasi, maka ia tidak akan memiliki kekebalan spesifik terhadap suatu penyakit (DISKOMINFOTIK, 2020).

Berdasarkan Keputusan Menteri Kesehatan No. HK.01.07/MENKES/12758/2020 tentang Penetapan Jenis Vaksin untuk

Pelaksanaan Vaksinasi COVID-19, pemerintah telah mengumumkan secara resmi tujuh vaksin yang digunakan untuk program vaksinasi COVID-19 secara massal yaitu PT Bio Farma, Sinopharm, Novavax, Sinovac, Pfizer BioNTech, Oxford-AstraZeneca, Moderna (**Rafie, 2021**). Selain itu, vaksin diberikan hanya untuk mereka yang sehat. Kelompok prioritas penerima vaksin adalah penduduk yang berdomisili di Indonesia yang berusia ≥ 18 tahun. Kelompok penduduk berusia di bawah 18 tahun dapat diberikan vaksinasi apabila telah tersedia data keamanan vaksin yang memadai dan persetujuan penggunaan pada masa darurat (*Emergency Use Authorization*) atau penerbitan Nomor Izin Edar (NIE) dari Badan Pengawas Obat dan Makanan (BPOM). Kriteria individu yang tidak boleh diimunisasi vaksin : adalah (1) orang yang sedang sakit, (2) memiliki penyakit penyerta, (3) tidak sesuai usia, (4) memiliki riwayat autoimun, (5) wanita hamil, (6) penyintas COVID-19, dan (7) dalam pengobatan, seperti defisiensi imun, penerima produk darah atau transfusi, gangguan pembekuan darah (**DISKOMINFOTIK, 2020**).

2.3 Saturated Incidence Rate

Dalam pemodelan penyakit menular, angka kejadian (*rate of new infection*) memegang peranan yang sangat penting. Beberapa faktor, seperti kepadatan penduduk dan gaya hidup, dapat mempengaruhi tingkat kejadian secara langsung atau tidak langsung dan fungsi kejadian dapat menentukan naik turunnya epidemi (**Sahu dan Dhar, 2011**).

Pada tahun 1973, Capasso dan Serio memperkenalkan *saturated incidence rate* $g(I)S$ ke dalam model epidemi, dengan $g(I)$ cenderung ketingkat kejadian jenuh ketika I semakin besar yaitu $g(I) = \frac{\beta I}{1+\alpha I}$ dimana βI mengukur kekuatan infeksi penyakit dan $\frac{1}{1+\alpha I}$ mengukur efek penghambatan dari pengaruh faktor kejenuhan atau α yang berasal dari pengendalian epidemi seperti perubahan perilaku individu yang rentan ketika jumlah mereka meningkat atau dari efek kerumunan individu yang terinfeksi (**Sahu dan Dhar, 2011**).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Pada subbab ini dijelaskan mengenai nilai eigen dari sebuah matriks yang akan digunakan untuk menentukan kestabilan titik setimbang dari suatu sistem persamaan diferensial linier.

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2010) Misalkan $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ merupakan himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real dan $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.1)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x disebut sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Teorema 2.2 (Anton dan Rorres, 2010) Misalkan $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Skalar λ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) disebut persamaan karakteristik dari A .

2.5 Turunan Fraksional Caputo

Turunan fraksional merupakan pengembangan dari turunan dengan orde bilangan bulat positif. Berbeda dengan turunan dengan orde bilangan bulat positif, turunan fraksional dapat memiliki orde bilangan real positif (Diethelm, 2004). Pada penelitian ini, pendekatan turunan fraksional yang digunakan adalah turunan fraksional Caputo. Keuntungan menggunakan pendekatan turunan fraksional Caputo adalah turunan Caputo dari sebuah konstanta adalah nol atau $\frac{d^\alpha(c)}{dt^\alpha} = 0$ (Podlubny, 1999). Hal ini memiliki kesamaan bentuk dengan yang ada pada turunan biasa. Perhitungan turunan fraksional Caputo membutuhkan definisi dari fungsi gamma. Berikut ini diberikan definisi fungsi gamma dan turunan fraksional Caputo.

Definisi 2.3 (Diethelm, 2004) Fungsi $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, didefinisikan sebagai

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.3)$$

disebut fungsi Gamma.

Definisi 2.4 (Diethelm, 2004) Untuk $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Definisi 2.5 (Rida & Arafa, 2011) Misalkan $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$, dan $f(t) \in \mathbb{R}^+$.

Turunan fraksional Caputo dari $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad (2.4)$$

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau & , \quad m-1 < \alpha < m \\ f^{(m)}(t) & , \quad \alpha = m \end{cases} \quad (2.5)$$

Jika $\alpha = m$, maka $D^\alpha f(t) = f^{(m)}(t)$, sehingga turunan fraksional Caputo merupakan perumuman dari turunan biasa.

Untuk turunan Caputo $D^\alpha C = 0$, C adalah konstanta. Turunan fraksional Caputo dari polinomial diberikan sebagai berikut

$$D^\alpha t^n = \begin{cases} 0 & , \quad n \leq \alpha - 1 \\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} t^{n-\alpha} & , \quad n > \alpha - 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.6 Sistem Persamaan Differensial Fraksional

Berdasarkan sifat linieritas, sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linier dan non-linier (**Zill dan Wright, 2013**). Berikut merupakan definisi dan teorema terkait sistem persamaan diferensial linier dan non-linier.

2.6.1 Sistem Persamaan Differensial Fraksional Linier

Pada subbab ini dijelaskan mengenai Sistem Persamaan Differensial Fraksional Linier (SPDFL).

Definisi 2.6 (Diethelm, 2004) Misalkan $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$.

Sistem persamaan diferensial orde fraksional linier didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = (D^\alpha x_1(t), D^\alpha x_2(t), \dots, D^\alpha x_n(t))^T = Ax(t) \quad (2.7)$$

dengan $0 < \alpha \leq 1, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), t > 0$.

Solusi x^* disebut titik setimbang sistem (2.7) jika memenuhi :

$$\frac{d^\alpha x^*}{dt^\alpha} = 0$$

Solusi dari sistem (2.7) berbentuk fungsi Mittag-Leffler. Berikut diberikan definisi fungsi Mittag-Leffler :

Definisi 2.7 (Diethelm, 2004) Misalkan $\alpha > 0, z \in \mathbb{C}$. Fungsi Mittag-Leffler E_α didefinisikan oleh

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (2.8)$$

Teorema 2.8 (Diethelm, 2004) Solusi dari Sistem Persamaan Diferensial Fraksional Linier (SPDFL) (2.7) adalah

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha)x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x_0 \quad (2.9)$$

dengan $x(0) = x_0$ nilai awal dari sistem.

Definisi 2.9 (Diethelm, 2004) Sistem Persamaan Diferensial Fraksional Linier (2.7) stabil asimtotis jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.10)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ merupakan solusi dari sistem (2.7) dan $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik setimbang sistem persamaan diferensial fraksional linier (2.7).

Teorema 2.10 (Diethelm, 2004) Titik setimbang dari sistem (2.7) bersifat :

- Stabil asimtotis jika dan hanya jika semua nilai eigen λ_i dari matriks A memenuhi $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- Stabil jika dan hanya jika nilai eigen λ_i memenuhi $|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Proposisi 2.11 (Ahmed dkk., 2006) Misalkan λ merupakan akar dari persamaan karakteristik berderajat n

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.11)$$

dengan $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jika $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka $a_n > 0$.

2.6.2 Sistem Persamaan Differensial Fraksional non-Linier

Pada subbab ini dijelaskan mengenai Sistem Persamaan Differensial Fraksional (SPDF) non-linier dan linierisasi SPDF non-linier.

Definisi 2.12 (Petrus, 2011) Sistem persamaan diferensial orde fraksional non-linier didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \quad (2.12)$$

$$x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan c_i adalah kondisi awal. Representasi vektor (2.12) adalah

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = f(x(t)) \quad (2.13)$$

dengan $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ dan $f(x(t)) =$

$$[f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t))]^T.$$

Solusi x^* disebut titik setimbang sistem (2.13) jika:

$$f(x^*(t)) = 0$$

Perilaku solusi sistem persamaan diferensial fraksional non-linier dapat diketahui melalui linierisasi sistem persamaan diferensial fraksional non-linier di sekitar titik setimbang. Pada penelitian ini, ekspansi deret Taylor digunakan

untuk linierisasi sistem persamaan diferensial fraksional nonlinier. Ekspansi deret Taylor $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ di sekitar x^* adalah

$$f_i(x) = f_i(x^*) + \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^*) \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_k} + \mathcal{R}(x) \quad (2.14)$$

dengan $\mathcal{R}(x)$ merupakan suku-suku polinomial derajat lebih dari satu.

Jika x sangat dekat dengan x^* maka selisih x dan x^* sangat kecil sehingga $\mathcal{R}(x)$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, persamaan (2.15) dapat dituliskan

$$f_i(x) \approx \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^*) \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_k} \quad (2.15)$$

Dengan substitusi (2.15) ke (2.13) diperoleh

$$\mathcal{D}^\alpha x \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Misalkan $J(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_2)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ merupakan matriks

Jacobian dari sistem (2.13) dan $y = x - x^*$. Karena $\mathcal{D}^\alpha y = \mathcal{D}^\alpha x$ maka sistem (2.16) dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathcal{D}^\alpha y(t) = J(x^*)y(t) \quad (2.17)$$

Sistem persamaan (2.17) merupakan linierisasi dari sistem persamaan (2.15).

2.7 Basic Reproduction Number

Basic Reproduction Number, dilambangkan dengan R_0 , didefinisikan sebagai jumlah infeksi sekunder yang disebabkan oleh satu infeksi primer dalam suatu populasi (Anggriani dkk., 2021). Berdasarkan pengertian tersebut maka

dapat dipahami dengan mudah bahwa bila $R_0 < 1$ maka infektifnya akan menurun sehingga penyakit akan menuju kepunahan. Sedangkan bila $R_0 > 1$ maka infektifnya akan meningkat sehingga penyakit tidak dapat dihilangkan dan biasanya berkembang menjadi endemik (Ma dkk., 2009).

Pada penelitian ini, metode yang digunakan untuk menentukan R_0 adalah metode pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM) yang dikembangkan oleh **Van den Driessche dan Watmough (2002)**. Langkah-langkah menentukan R_0 dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) adalah sebagai berikut:

1. Membentuk matriks $X \in \mathbb{R}^n$, dengan X merupakan matriks yang berisi kompartemen terinfeksi, baik yang dapat menularkan maupun yang tidak dapat menularkan infeksi.
2. Mendekomposisikan matriks X menjadi $X = F(x) - Z(x)$ dengan $F(x)$ matriks transmisi dan $Z(x)$ matriks transisi. Matriks $F(x)$ merupakan matriks transmisi yang memuat adanya perpindahan dari populasi non terinfeksi menjadi populasi terinfeksi. Sedangkan matriks $Z(x)$ adalah matriks transisi, yang memuat populasi terinfeksi dan berkembang menjadi tahapan penyakit selanjutnya.
3. Menentukan matriks Jacobi dari F terhadap x ($J_1 = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$) dan matriks Jacobi dari Z terhadap x ($J_2 = \frac{\partial Z(x)}{\partial x}$).
4. Menentukan matriks $\mathbb{F}$ dan matriks $\mathbb{Z}$ dengan mensubstitusikan titik setimbang bebas infeksi E_0 , dari model ke dalam matriks Jacobi J_1 dan J_2 yang diperoleh dari Langkah (3), sehingga $\mathbb{F} = J_1(E_0)$ dan $\mathbb{Z} = J_2(E_0)$.
5. Menentukan invers dari matriks $\mathbb{Z}$ yaitu $\mathbb{Z}^{-1}$ dengan matriks $\mathbb{Z}$ adalah matriks non singular
6. Menentukan nilai eigen dari matriks $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$.
7. Menentukan R_0 yang diperoleh dari mutlak nilai eigen terbesar dari matriks $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$, atau dapat dinyatakan sebagai

$$R_0 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ nilai eigen } \mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}\}$$

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Pada permasalahan tertentu sulit untuk dilakukan penentuan akar-akar persamaan karakteristik (λ). Oleh karena itu, dibutuhkan metode untuk menentukan tanda bagian real dari akar-akar persamaan karakteristik tanpa mencari akar-akar persamaan karakteristik terlebih dahulu. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz.

Definisi 2.13 (Merkin, 1997) Diberikan persamaan karakteristik berderajat n sebagai berikut

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.18)$$

dengan koefisien $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ adalah bilangan real. Misalkan $H_k \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks H_k adalah matriks Hurwitz yang berisi koefisien a_j dari persamaan karakteristik (2.18) yang didefinisikan sebagai berikut

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & a_{2k-6} & \dots & a_{k-2} \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \dots & a_k \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\text{dengan } a_j = \begin{cases} a_j, & j \leq k \\ 0, & j > k \end{cases}$$

Teorema 2.14 (Merkin, 1997) Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.18)

bernilai negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks Hurwitz bernilai positif atau $\det(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Berikut ini diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 3$. Bentuk persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.19.a)$$

Dari persamaan (2.19. *a*) dapat dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan (2.19. *a*) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det(H_1) > 0, \det(H_2) > 0, \text{ dan } \det(H_3) > 0.$$

Dengan demikian diperoleh kondisi sebagai berikut

- i. $\det(H_1) = |a_1| > 0$ sehingga diperoleh $a_1 > 0$.
- ii. $\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ sehingga diperoleh $a_1 a_2 > 0$.

Karena $a_1 > 0$ maka $a_2 > 0$.

- iii. $\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$ sehingga diperoleh $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$.

Akibatnya $a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0$ dan diperoleh dua kondisi berikut

1. $a_3 > 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) > 0$
2. $a_3 < 0$ dan $(a_1 a_2 - a_3) < 0$.

Untuk kondisi (2) tidak mungkin terjadi, sebab jika $a_3 < 0$ dan $a_1 a_2 > 0$ maka $(a_1 a_2 - a_3) < 0$ tidak akan terpenuhi.

Berdasarkan kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan karakteristik (2.19. *a*) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$a_1, a_2, a_3 > 0 \text{ dan } a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

2.9 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk menganalisis faktor-faktor yang menyebabkan penyakit menyebar dan bertahan di masyarakat (Hussain dkk., 2021).

Definisi 2.15 (Malorung dkk., 2018) *Normalized sensitivity index* diperoleh dengan indeks sensitivitas normalisasi dari variabel V , terdiferensialkan pada parameter p , didefinisikan sebagai berikut :

$$C_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V}$$

dengan V adalah variabel yang akan dianalisis dan p adalah parameter.

Definisi di atas berarti bahwa indeks sensitivitas dicari dengan menggunakan konsep laju perubahan yang kemudian diukur besar kecilnya perubahan tersebut. Semakin besar indeks tersebut maka semakin besar pengaruh parameter tersebut terhadap variabel yang diukur. Dengan demikian, rumus analitis untuk indeks sensitivitas R_0 dapat dihitung. Misalkan diketahui bahwa parameter yang paling sensitif adalah tingkat individu yang terpapar menjadi menular (tingkat kontak), diikuti dengan tingkat pemulihan individu yang terinfeksi. Indeks ini menunjukkan bahwa jika kita dapat meningkatkan tingkat pemulihan dan mengurangi tingkat kontak yang memadai hampir 10%, nilai R_0 dapat berkurang hingga 10% (**Hussain dkk., 2021**).

2.10 Algoritma Genetika

Genetic Algorithms (GA) atau Algoritma Genetika ditemukan oleh John Holland. Holland mengembangkan ide ini dalam bukunya "Adaptation in natural and artificial systems" pada tahun 1975. Holland mengusulkan algoritma genetika sebagai metode heuristik berdasarkan "Survival of the fittest". Algoritma genetika ditemukan sebagai alat yang berguna untuk masalah pencarian dan pengoptimalan (**Sivanandam dan Deepa, 2008**).

Beberapa istilah yang digunakan dalam algoritma genetika diantaranya Gen merupakan instruksi dasar untuk membangun algoritma genetika. Gen dapat merepresentasikan suatu variabel permasalahan. Solusi direpresentasikan dengan kromosom atau individu. Populasi merupakan sebuah kumpulan dari kromosom. Dua aspek penting dari populasi yang digunakan pada algoritma

genetika yaitu, pembentukan populasi awal dan ukuran populasi. *Fitness* dari sebuah kromosom pada algoritma genetika merupakan nilai fungsi tujuan. Untuk menghitung *fitness*, kromosom harus mengalami pemecahan kode dan fungsi tujuan yang dihitung. *Fitness* tidak hanya mengindikasikan seberapa baik solusi, tetapi juga berpengaruh terhadap keoptimalan dari kromosom. Seleksi adalah proses memilih induk dari populasi menurut nilai *fitness* masing-masing kromosom. Tujuan seleksi adalah untuk memilih kromosom-kromosom yang baik dalam populasi yang diharapkan memiliki keturunan yang memiliki nilai yang lebih baik (**Sivanandam dan Deepa, 2008**).

Crossover adalah proses pengambilan solusi dua induk dan produksi untuk mendapatkan kromosom baru yang sifat dari kedua induknya. Satu pasang induk kromosom yang terpilih mengalami persilangan dengan probabilitas (P). Jika probabilitas *crossover* layak 0,5 maka diharapkan setengah dari populasi akan mengalami *crossover*. Mutasi berperan dalam menutup kemungkinan hilangnya suatu informasi genetik yang dihasilkan dari pembangkitan bilangan acak dan dilihat sebagai operator dasar untuk menjaga keragaman genetika pada populasi (**Sivanandam dan Deepa, 2008**).

Secara garis besar dalam **Sivanandam dan Deepa (2008)** algoritma genetika dapat dijelaskan melalui algoritma sebagai berikut :

1. Membangkitkan populasi acak yang terdiri dari n kromosom.
2. [*Fitness*] menemukan nilai *fitness* untuk setiap kromosom pada populasi.
3. [Populasi baru] membentuk populasi baru dengan mengulang langkah-langkah berikut sampai populasi baru selesai dibentuk.
4. [Seleksi] memilih kromosom induk dari populasi menurut nilai *fitness*, semakin baik nilai *fitness* semakin besar kesempatan untuk terpilih
5. [*Crossover*] dengan probabilitas *crossover*, silangkan induk untuk mendapatkan anak. Jika tidak ada *crossover* maka anak merupakan dari induk.

6. [Mutasi] dengan probabilitas mutasi, mutasi anak baru pada lokus (posisi pada kromosom).
7. [Penerimaan] tempatkan anak baru pada populasi baru.
8. [Mengganti] gunakan populasi baru dengan jumlah yang sesuai dengan algoritma.
9. [Menguji] jika kondisi akhir telah terpenuhi, berhenti dan tampilkan individu terbaik pada populasi. Jika kondisi akhir belum terpenuhi, kembali ke Langkah (2) untuk mengevaluasi nilai fitness