

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Rokok adalah suatu produk tembakau berbentuk tabung yang dibakar di salah satu ujungnya, dihisap dan/atau dihirup termasuk rokok kretek, rokok putih, cerutu atau bentuk lain terbuat dari daun tembakau yang diawetkan, dipotong halus, dan dibungkus kertas tipis. Rokok mengandung nikotin, tar, dan banyak bahan kimia lainnya penyebab berbagai jenis penyakit seperti gangguan pernafasan, kanker mulut, dan kanker paru-paru (**Kemenkes, 2013**). Meskipun rokok mengandung berbagai bahan kimia yang berbahaya, namun hal tersebut tidak menurunkan minat sebagian orang untuk tetap membeli rokok.

Merokok merupakan salah satu masalah yang dapat menimbulkan kerugian bagi perokok dan orang lain (**Kemenkes, 2011**). Menurut data *World Health Organization* (WHO), 7 juta orang meninggal setiap tahun akibat merokok dan 1.2 juta orang meninggal setiap tahun akibat terpapar asap rokok (**WHO, 2022**). Merokok menjadi masalah kesehatan global dan menarik perhatian orang di seluruh dunia.

Pada saat pandemi COVID-19 semua orang dihimbau untuk tetap di rumah saja, akibatnya trend merokok meningkat. Ketidakpastian sosial-ekonomi yang disebabkan pandemi dapat meningkatkan tekanan psikologis seperti kecemasan, stres, dan depresi. Merokok menjadi solusi atas masalah psikologis tersebut (**Kemenkes, 2022**). Berdasarkan hasil survei *Global Youth Tobacco Survey* (GYTS), selama 10 tahun terakhir jumlah perokok dewasa mengalami kenaikan yang signifikan yaitu sebanyak 8.8 juta orang, dari 60.3 juta pada tahun 2011 menjadi 69.1 juta perokok pada tahun 2021 (**Dinkes Jakarta, 2022**). Jumlah perokok di seluruh dunia tercatat mencapai 1.3 miliar orang dengan sebagian besar diantaranya berada di negara dengan penghasilan rendah dan menengah (**WHO, 2022**).

Beberapa penelitian dalam pemodelan matematika terkait dinamika merokok telah dilakukan oleh para ahli. **Castillo-Garsow dkk (1997)** memperkenalkan model matematika terkait dinamika merokok pada permasalahan pemakaian tembakau yang diasumsikan menjadi tiga kelompok individu, yaitu populasi individu yang rentan merokok, populasi individu yang merokok, dan populasi individu yang berhenti merokok. Kemudian, **Zaman (2011)** membedakan populasi individu yang merokok menjadi dua kompartemen yaitu populasi perokok ringan dan populasi perokok berat dan menerapkan dua kontrol pada model.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh **Rahman dkk (2019)** membahas model dinamika merokok dengan memperkenalkan interaksi antara individu yang rentan merokok dengan perokok ringan. Kemudian, **Zhang dkk (2020)** mengkonstruksi model dinamika merokok dengan mengklasifikasikan kompartemen menjadi empat, antara lain: populasi individu yang berpotensi menjadi perokok, populasi perokok ringan, populasi perokok berantai dan populasi individu yang berhenti merokok. Penelitian matematika tentang dinamika merokok juga dikembangkan oleh **Verma (2020)**. Dalam penelitian tersebut **Verma (2020)** membagi kompartemen menjadi empat yaitu P (populasi individu yang berpotensi menjadi perokok), S (populasi perokok), dan R (populasi individu yang berhenti merokok), serta M (kampanye media).

Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikembangkan model matematika dinamika merokok dari jurnal yang ditulis oleh **Verma (2020)** dengan membedakan populasi individu perokok menjadi dua kompartemen, yaitu populasi perokok kadang-kadang dan populasi perokok berat. Selain itu, pada penelitian ini juga akan ditambahkan kontrol pada model berupa edukasi dan *candy treatment*. Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik yang hasilnya dapat dimanfaatkan untuk bahan acuan untuk memprediksi perkembangan jumlah populasi perokok di masa mendatang dan akan digunakan untuk mengetahui efektivitas dari kontrol optimal yang diberikan.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan titik setimbang dari model matematika penghentian perilaku merokok?
2. Bagaimana bentuk kontrol optimal pada model matematika penghentian perilaku merokok?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi dari model matematika penghentian perilaku merokok sebelum dan sesudah diberi kontrol?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis kestabilan titik setimbang dari model matematika penghentian perilaku merokok.
2. Mengetahui bentuk kontrol optimal pada model matematika penghentian perilaku merokok.
3. Mengetahui hasil simulasi numerik dan interpretasi dari model matematika penghentian perilaku merokok sebelum dan sesudah diberi kontrol.

1.4 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Memberikan wawasan terkait strategi pengendalian populasi perokok untuk menurunkan jumlah perokok.
2. Menjadi bahan rujukan bagi penulis lain yang ingin mengembangkan model matematika penghentian perilaku merokok.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini merujuk pada jurnal yang ditulis oleh **Verma (2020)**.
2. Kontrol yang diberikan pada model berupa upaya edukasi dan upaya *candy treatment* bagi perokok.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan tinjauan pustaka terkait penelitian skripsi yang dilakukan yaitu meliputi penjelasan mengenai rokok, beberapa definisi dan teorema matematika yang digunakan.

2.1 Rokok

Rokok adalah lintingan atau gulungan tembakau yang digulung/ dibungkus dengan menggunakan kertas, daun, atau kulit jagung, sebesar kelingking dengan panjang 8-10 cm, biasanya dihisap seseorang ketika setelah dibakar ujungnya (**Dinkes Banten, 2017**). Di dalam sebatang rokok mengandung 4.000 jenis senyawa kimia beracun yang berbahaya bagi tubuh. Komponen utama rokok yaitu nikotin, tar, dan karbon monoksida (**Kemenkes, 2018**).

Merokok merupakan salah satu faktor risiko utama terjadinya berbagai penyakit tidak menular seperti penyakit jantung koroner, stroke, dan kanker yang merupakan penyebab kematian utama di dunia, termasuk Indonesia. Hal tersebut menyebabkan tingginya beban biaya pengobatan bagi penyakit akibat rokok. Tingginya beban ekonomi terkait penyakit akibat rokok membuat pemerintah diberbagai negara melakukan segala upaya untuk mengontrol angka perokok (**Nabila, 2017**).

Upaya yang dapat dilakukan untuk mengendalikan perilaku merokok dibedakan menjadi dua yaitu upaya preventif dan kuratif. Upaya preventif yang dapat dilakukan ialah dengan edukasi terkait bahaya merokok. Sedangkan upaya kuratif yang dapat dilakukan yaitu dengan adanya terapi (**WHO, 2017**).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Secara umum, sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Berdasarkan variabel bebasnya, persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan persamaan

diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa non linier (Bronson dan Costa, 2007).

Berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan persamaan diferensial:

Definisi 2.1 Sebuah sistem persamaan diferensial linier dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.1)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*), sedangkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real.

(Bronson dan Costa, 2007)

Penyelesaian dari sistem (2.1) jika diberikan nilai awal $x(t) = x_0$ adalah sebagai berikut:

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

$$\text{dengan } e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k.$$

Definisi 2.2 Sistem persamaan diferensial orde satu dikatakan sebagai **sistem autonomous** jika dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ serta f_i tidak memuat variabel t secara eksplisit.

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.3 Diberikan sebuah sistem persamaan diferensial *autonomous*

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$. Titik $\bar{x}$ dikatakan titik setimbang jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

(Olsder, 2003)

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar atau *Basic Reproduction Number* dengan notasi R_0 merupakan parameter yang dapat menjadi ukuran potensial dari adanya penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi. *Basic Reproduction Number* merupakan jumlah rata-rata kasus sekunder yang dihasilkan ketika seorang individu yang terinfeksi masuk ke dalam populasi yang rentan (**Diekmann dkk., 1990**). Metode untuk mendapatkan R_0 ada beberapa cara, yakni melalui eksistensi titik setimbang, analisis kestabilan dan *Next-Generation Matrix* (NGM). Jika $R_0 < 1$, maka populasi akan bebas dari terjadinya infeksi (non endemik). Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ maka mengakibatkan endemik dalam suatu populasi (**Brauer dkk., 2008**).

Pada penelitian ini pencarian R_0 menggunakan metode *Next-Generation Matrix* (NGM). Berikut merupakan langkah-langkah menentukan R_0 menggunakan metode NGM:

1. Langkah pertama adalah menentukan matriks x yang terdiri dari populasi yang menyebabkan terjadinya penyebaran suatu penyakit.
2. Selanjutnya, membentuk $\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(x) - \mathcal{Z}(x)$. Matriks $\mathcal{F}(x)$ merupakan matriks transmisi yang memuat adanya perpindahan dari populasi sehat menjadi populasi terinfeksi. Sedangkan matriks $\mathcal{Z}(x)$ adalah matriks transisi yang memuat perpindahan populasi terinfeksi dan berkembang menjadi tahapan penyakit selanjutnya.
3. Kemudian menentukan matriks $\mathbb{F}$ dan matriks $\mathbb{Z}$, yaitu matriks Jacobian dari $\mathcal{F}(x)$ dan $\mathcal{Z}(x)$ yang sudah disubstitusikan titik setimbang non-endemik.
4. Langkah terakhir yaitu menentukan $\mathcal{R} = \mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$. Parameter R_0 diperoleh dengan menentukan nilai eigen terbesar matriks $\mathcal{R}$.

2.4 Kestabilan Sistem Linier

Setelah mendapatkan titik setimbang, maka langkah selanjutnya adalah melakukan hampiran linier dari model matematika penghentian perilaku merokok dengan menggunakan matriks Jacobian. Kemudian dilakukan analisis kestabilan

dari masing-masing titik setimbang. Kestabilan tersebut bersifat lokal karena hanya berlaku di persekitaran titik setimbang. Adapun tujuan dilakukan analisis kestabilan dari titik setimbang adalah untuk memprediksi dinamika yang mungkin terjadi pada sistem.

Berikut diberikan definisi yang berhubungan dengan linierisasi sistem persamaan diferensial dan kestabilan lokal pada titik setimbang.

Definisi 2.4 Matriks Jacobian J dari sistem persamaan diferensial (2.2) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

(Kelley dan Peterson, 2010)

Definisi 2.5 Misalkan A adalah matriks tak nol berukuran $n \times n$ atas bilangan real. Vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x,$$

skalar λ disebut **nilai eigen** dari A dan x dikatakan sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ .

(Anton, 2005)

Teorema 2.6 Misalkan A merupakan matriks dengan ukuran $n \times n$ dengan komponen A merupakan bilangan real. λ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

(Anton, 2005)

Definisi 2.7 Sistem persamaan diferensial linier $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dikatakan **stabil asimtotis** jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

dengan $x(t)$ adalah solusi dari sistem tersebut.

(Zill dan Cullen, 2009)

Teorema 2.8 Sistem persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax$ stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif atau $Re(\lambda_i(A)) < 0$.

(Zill dan Cullen, 2009)

2.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Pada permasalahan tertentu, kestabilan dari titik setimbang tidak dapat diamati karena sulit dilakukan penentuan akar-akar persamaan karakteristik (λ). Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang dapat digunakan untuk menentukan tanda dari koefisien akar-akar persamaan karakteristik. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz. Metode ini dapat menunjukkan kestabilan suatu sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa perlu menghitung akar-akar persamaan karakteristik secara langsung. Berikut diberikan teorema mengenai kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.9 Diberikan persamaan karakteristik dengan derajat n sebagai berikut

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.3)$$

dengan koefisien a_j adalah bilangan real, dan $j = 1, 2, \dots, n$. Dari sini dapat dibentuk matriks Hurwitz (H_n) yang berisi koefisien a_j dari persamaan karakteristik diatas yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$$\text{dengan } a_j = \begin{cases} a_j, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

Teorema 2.10 Akar-akar persamaan karakteristik (2.3) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det (H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

(Merkin, 1997)

Dalam penulisan ini, diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 2$. Untuk $n = 2$, bentuk persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.4) maka dapat dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik (2.4) negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det (H_1) > 0 \text{ dan } \det (H_2) > 0.$$

Dari syarat tersebut diperoleh:

- i. $\det (H_1) = |a_1| > 0$ diperoleh $a_1 > 0$.
- ii. $\det (H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ diperoleh $a_1 a_2 > 0$. Karena $a_1 > 0$, maka didapatkan $a_2 > 0$.

Dari uraian di atas, diperoleh suatu kesimpulan bahwa akar-akar dari persamaan karakteristik (2.6) negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 a_2 > 0$.

2.6 Masalah Kontrol Optimal

Secara umum masalah kontrol optimal merupakan suatu masalah dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang dapat mengoptimalkan (memaksimalkan atau meminimumkan) indeks performansi. Indeks Performansi dirumuskan sebagai berikut:

$$J = L(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.6)$$

dengan kendala

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0, \quad (2.7)$$

dengan t_0 dan t_f secara berturut-turut adalah waktu awal dan akhir, sedangkan L dan V merupakan fungsi skalar.

Kontrol $u^*(t)$ adalah kontrol optimal yang disubstitusikan ke dalam sistem (2.7) akan diperoleh keadaan yang optimal $x^*(t)$ dan dapat mengoptimalkan Indeks Performansi J .

(Naidu, 2002)

2.7 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan suatu metode untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal sesuai dengan tujuan yang diinginkan yaitu memaksimumkan atau meminimumkan Indeks Performansi.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

Misalkan diketahui persamaan *state*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.8)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$. dan $u(t) \in \mathbb{R}^m$ serta dengan Indeks Performansi:

$$J = L(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.9)$$

dengan batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = t_f$ bebas.

Selanjutnya, tahapan penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Membentuk Fungsi Hamiltonian, yaitu mengkombinasikan fungsi dari suatu masalah $V(x(t), u(t), t)$ dan persamaan *state* berbentuk persamaan diferensial $f(x(t), u(t), t)$ dengan pengali Lagrange $\theta(t)$. Adapun fungsi Hamiltonian yang dibentuk adalah sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \theta(t), t) = V(x, t, u(t), t) + \theta^T(t) f(x(t), u(t), t).$$

2. Meminimumkan H terhadap semua vektor $u(t)$ sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) = H(x^*(t), \theta^*(t), t).$$

3. Mensubstitusikan hasil dari Langkah (2) ke dalam Langkah (1) dan menentukan H yang optimal yaitu

$$H(x^*(t), u^*(t), t) = H(x^*(t), \theta^*(t), t).$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan persamaan *co-state*

1. Persamaan *state* yaitu persamaan kendala pada model $x^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \theta}$ dengan diberikan nilai awal $x(t_0) = x_0$.

2. Persamaan *co-state* yaitu berbentuk $\theta^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$ dengan diberikan nilai akhir *co-state* $\theta(t_f) = \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t_f}$.

5. Untuk memperoleh kontrol optimal, substitusikan solusi $x^*(t)$, $\theta^*(t)$ dari Langkah 4 ke dalam kontrol optimal $u^*(t)$ pada Langkah 2.

(Naidu, 2002)