

**ANALISIS MODEL MATEMATIKA ORDE FRAKSIONAL
PENYEBARAN PENYAKIT KOINFEKSI HCV-TB**

SKRIPSI



ALIFIA INTAN NIRWANA

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS MODEL MATEMATIKA ORDE FRAKSIONAL
PENYEBARAN PENYAKIT KOINFEKSI HCV-TB**

SKRIPSI



ALIFIA INTAN NIRWANA

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

i

SKRIPSI

ANALISIS MODEL MATEMATIKA...

ALIFIA I. N.

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS MODEL MATEMATIKA ORDE FRAKSIONAL
PENYEBARAN PENYAKIT KOINFEKSI HCV-TB**

SKRIPSI

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh
Gelar Sarjana dalam Bidang Matematika
pada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga**

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Dr. Windarto, S.Si, M.Si.


Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP. 19771104 200312 1 001

NIP. 19730704 199802 2 001

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : Analisis Model Matematika Orde Fraksional
Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB

Penyusun : Alifia Intan Nirwana

NIM : 081711233018

Pembimbing I : Dr. Windarto, S.Si, M.Si.

Pembimbing II : Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

Tanggal Seminar : 19 Oktober 2022

Disetujui oleh :

Pembimbing I,

Dr. Windarto, S.Si, M.Si.

NIP. 19771104 200312 1 001

Pembimbing II,

Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP. 19730704 199802 2 001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga

Dr. Herry Suprajitno, M.Si.

NIP. 196804041994031020

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, tetapi tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai dengan kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Alifia Intan Nirwana

NIM : 081711233018

Program Studi : S-1 Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

**Analisis Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi
HCV-TB**

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 19 Oktober 2022



Alifia Intan Nirwana
NIM. 081711233018

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT, karena atas Rahmat dan Karunia-Nya kami dapat menyelesaikan tugas akhir pemodelan fraksional yang berjudul “*Analisis Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB*” dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, pemimpin dan sebaik-baiknya suri tauladan bagi kehidupan umat manusia. Keberhasilan penulis dalam menyusun skripsi tentunya tidak lepas dari dukungan berbagai pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. Mohammad Nasih, SE., MT., Ak. selaku Rektor Universitas Airlangga
2. Prof. Dr. Moh Yasin, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga
3. Dr. Herry Suprajitno, M.Si, Ph.D. selaku koordinator program studi matematika dan ketua departemen matematika yang senantiasa sabar, mengingatkan, dan memberi masukan serta semangat.
4. Dr. Liliek Susilowati, S.Si. M.Si. selaku dosen wali yang senantiasa sabar dan ramah dalam memberikan masukan, arahan, serta motivasi selama menjalani perkuliahan.
5. Alm. Dr. Muhammad Imam Utoyo M.Si. dan Dr. Windarto, S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing I yang senantiasa sabar dan teliti dalam membimbing, mengingatkan, memberi masukan serta semangat.
6. Prof. Dr. Fartmawati, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang senantiasa sabar dan ramah dalam membimbing, mengingatkan, memberi masukan dan semangat.
7. Bapak dan Ibu Dosen yang telah memberikan dukungan dan doa restu, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
8. Kedua orang tua, Ahmad Rudin dan Eka Sari Mulyadi Putri, serta

keluarga besar yang senantiasa mendo'akan, mendukung, memberi semangat dan kasih sayang.

9. Teman-teman seperjuangan, M. Faiz Abror, Agustin Khoirun Nisa, Kuswatin Ulfa, Afifah Dwi Fauziah, Karunia Amalia, Anindya Ramadhani, yang telah membantu, memberikan dukungan baik, mendampingi, dan memberikan masukan serta motivasi selama perkuliahan maupun non perkuliahan.
10. Teman-teman seperjuangan fraksional, Putri, Tuti, Aileen, Izzah yang telah berjuang bersama dan memberi dukungan baik, memberikan masukan serta motivasi.
11. Teman-teman seperjuangan Matematika 2017 yang telah memberikan pengalaman berharga dan dukungan selama ini.
12. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, yang telah mendo'akan dan membantu penulis.

Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat sebagai bahan pustaka dan penambahan informasi. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan, kemungkinan masih terdapat kekurangan sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan.

Surabaya, 19 Oktober 2022

Penyusun,

Alifia Intan Nirwana

Alifia Intan Nirwana, 2022, **Analisis Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB**. Skripsi ini di bawah bimbingan Dr. Windarto, S.Si., M.Si dan Prof. Dr. Fatmawati, M.Si. Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Hepatitis C (HCV) dan Tuberkulosis (TB) merupakan masalah kesehatan masyarakat di dunia, termasuk Indonesia. Hasil penelitian menunjukkan bahwa risiko berkembangnya infeksi penyakit TB secara signifikan lebih tinggi dari pasien dengan infeksi HCV daripada pasien yang tidak terinfeksi HCV, hal ini menunjukkan bahwa epidemiologis infeksi HCV dapat dikaitkan dengan TB atau memiliki kecenderungan koinfeksi HCV-TB. Skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk sistem persamaan diferensial orde fraksional model matematika penyebaran penyakit koinfeksi HCV-TB, menganalisis kestabilan titik setimbang, dan menginterpretasi hasil simulasi dari sistem persamaan diferensial orde fraksional model matematika penyebaran penyakit koinfeksi HCV-TB. Berdasarkan analisis model, diperoleh empat titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit (non-endemik), titik setimbang endemik HCV, titik setimbang endemik TB, dan titik setimbang endemik koinfeksi HCV-TB. Kestabilan lokal dan eksistensi titik setimbang endemik bergantung pada bilangan reproduksi dasar (R_0). Ketika $R_0 < 1$, maka tidak ada penyebaran penyakit koinfeksi HCV-TB dan ketika $R_0 > 1$, maka terjadi penyebaran penyakit koinfeksi HCV-TB. Pada skripsi ini juga dilakukan analisis sensitivitas parameter untuk mengetahui parameter-parameter yang paling berpengaruh dan dapat dikontrol pada model koinfeksi HCV-TB yaitu parameter δ (laju transmisi individu yang rentan menjadi terinfeksi HCV fase akut) dan β (laju transmisi individu rentan menjadi laten TB). Simulasi numerik dilakukan untuk menginterpretasikan dinamika penyebaran penyakit dengan variasi nilai α pada orde fraksional, dengan hasil ketika nilai α semakin besar maka waktu yang dibutuhkan masing-masing populasi menuju titik setimbang akan semakin cepat.

Kata Kunci : *Hepatitis C (HCV), Tuberkulosis (TB), koinfeksi HCV-TB, model matematika orde fraksional, Titik setimbang, kestabilan.*

Alifia Intan Nirwana, 2022, **Analysis of the Fractional Order Mathematical Model of the Spread of HCV-TB Coinfection**. This thesis is under the guidance of Dr. Windarto, S.Si, M.Si. and Prof. Dr. Fatmawati, M.Si. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

Hepatitis C (HCV) and tuberculosis (TB) are public health problems in the world, including Indonesia. The results showed that the risk of developing TB infection was significantly higher from patients with HCV infection than in patients without HCV, this suggests that the epidemiology of HCV infection may be associated with the risk of active TB or a predisposition to HCV-TB coinfection. The purpose of the thesis are to obtain a mathematical fractional equation system for the spread of HCV-TB coinfection, to analyze the stability of the equilibrium point, and to interpret the simulation results from a system of fractional order equations mathematical model for the spread of HCV-TB coinfection. Based on the model analysis, there are four equilibrium points, namely the disease-free (non-endemic) equilibrium point, HCV endemic equilibrium point, TB endemic equilibrium point, coinfection HCV-TB coexistence endemic equilibrium point. The stability of the equilibrium point and the existence of the endemic equilibrium point depend on the basic reproduction number (R_0). The spread coinfection HCV-TB does not occur in the population when $R_0 < 1$ and the spread of coinfection HCV-TB persist in the population when $R_0 > 1$. In this thesis, parameter sensitivity analysis was also carried out to determine the most influential and controllable parameters in the HCV-TB coinfection model, namely parameters δ (transmission rate of susceptible individuals to become infected HCV acute phase) and β (transmission rate of susceptible individuals to latent TB). Numerical simulations were carried out to interpret the dynamics of disease spread with variations in the value of a on the fractional order, with the result that when the value of a is greater, the time it takes for each population to reach the equilibrium point will be faster.

Keywords : *Hepatitis C (HCV), Tuberculosis (TB), HCV-TB coinfection, fractional-order mathematical model, Equilibrium points, stability.*

DAFTAR ISI

LEMBAR JUDUL	i
LEMBAR PERNYATAAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI	iii
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI	iv
SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK	viii
<i>ABSTRACT</i>	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan	4
1.4 Manfaat	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Hepatitis C Virus (HCV)	6
2.2 Tuberkulosis (TB)	9
2.3 Koinfeksi HCV-TB	10
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	11
2.5 Turunan Fraksional Caputo	12
2.6 Sistem Persamaan Differential Fraksional Linier (SPDFL)	13
2.7 Sistem Persamaan Differential Fraksional Non Linier (SPDFNL)	14
2.8 Bilangan Metode Reproduksi Dasar	15
2.9 Kriteria Routh Hurwitz	16
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	19
BAB IV PEMBAHASAN	20

4.1	Analisis Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	20
4.2	Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	25
4.2.1	Titik Setimbang dan Bilangan Reproduksi Dasar Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	25
4.2.2	Analisis Kestabilan Lokal Titik Setimbang Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	32
4.2.3	Analisis Sensitivitas	48
4.3	Simulasi Numerik Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	52
4.3.1	Simulasi Numerik Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB Non-endemik	53
4.3.2	Simulasi Numerik Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB Kondisi Endemik	55
Bab V.	PENUTUP	58
5.1	Kesimpulan	58
5.2	Saran	59
	Daftar Pustaka	60
	Lampiran	64

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul Tabel	Halaman
4.1	Deskripsi Variabel Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	21
4.2	Deskripsi Parameter Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	21
4.3a	Nilai Awal untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik HCV	38
4.3b	Nilai Parameter untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik HCV	38
4.4a	Nilai Awal untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik TB	42
4.4b	Nilai Parameter untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik TB	43
4.5a	Nilai Awal untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik Koinfeksi	45
4.5b	Nilai Parameter untuk Simulasi Bidang Fase Titik Setimbang Endemik Koinfeksi	46
4.6a	Nilai Indeks Parameter Penyebaran Penyakit HCV	48
4.6b	Nilai Indeks Parameter Penyebaran Penyakit TB	49
4.7a	Hubungan Antara Perubahan pada Nilai Parameter HCV Terhadap R_0	49
4.7b	Hubungan Antara Perubahan pada Nilai Parameter TB Terhadap R_0	49

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Gambar	Halaman
4.1	Diagram Transmisi Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB	23
4.2a	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan I_h untuk Kondisi Keseimbangan HCV	39
4.2b	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan C untuk Kondisi Keseimbangan HCV	40
4.3a	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan E_t untuk Kondisi Keseimbangan TB	43
4.3b	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan I_t untuk Kondisi Keseimbangan TB	44
4.4a	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan I_{ht} untuk Kondisi Keseimbangan Koinfeksi dengan $\alpha = 0.9$	47
4.4b	Grafik Bidang Fase pada Bidang S dan I_{ht} untuk Kondisi Keseimbangan Koinfeksi dengan $\alpha = 1$	47
4.5a	Sensitivitas p Terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai δ yang Berbeda	51
4.5b	Sensitivitas β Terhadap Nilai R_0 dengan Tiga Nilai k yang Berbeda	52
4.6a	Grafik Simulasi Numerik Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB Kondisi Non-Endemik	53
4.6b	Grafik Simulasi Numerik Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB pada Kondisi Endemik	55

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran
1.	Perhitungan Titik Setimbang Bebas Penyakit Koinfeksi HCV-TB (Non-Endemik)
2.	Perhitungan R_0 dengan Model Next Generation Matrix pada Model Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB
3.	Perhitungan Titik Setimbang Endemik HCV pada Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB
4.	Perhitungan Titik Setimbang Endemik TB pada Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB
5.	Analisa Kestabilan Titik Setimbang Non-endemik pada Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB
6.	Kode Program untuk Simulasi Bidang Fase pada Titik Setimbang Endemik HCV (E_1)
7.	Kode Program untuk Simulasi Bidang Fase pada Titik Setimbang Endemik TB (E_2)
8.	Kode Program untuk Simulasi Bidang Fase pada Titik Setimbang Endemik Koinfeksi (E_3)
9.	Kode Program Simulasi Analisis Sensitivitas Parameter
10	Kode Program M-File Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Penyakit Koinfeksi HCV-TB pada Kondisi Endemik Dan Non-Endemik