

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA  
PENYEBARAN TUBERKULOSIS DENGAN *SATURATED  
INCIDENCE RATE* MENGGUNAKAN METODE BEDA  
HINGGA TAK STANDAR**

**SKRIPSI**



**SALSA BILA NOVITA SARI**

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

**2022**

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN  
TUBERKULOSIS DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE*  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA TAK STANDAR**

**SKRIPSI**



**SALSA BILA NOVITA SARI**

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

**2022**

**i**

IR – PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**APROKSIMASI SOLUSI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN  
TUBERKULOSIS DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE*  
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA TAK STANDAR**

**SKRIPSI**

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Bidang  
Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga**

Disetujui oleh :

Pembimbing I,



Dr. Miswanto, M.Si.  
NIP.196802041993031002

Pembimbing II,



Dr. Windarto, S.Si., M.Si.  
NIP. 197711042003121001

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Judul : Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran  
Tuberkulosis dengan *Saturated Incidence Rate*  
Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar

Penyusun : Salsa Bila Novita Sari

NIM : 081811233020

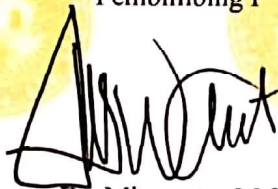
Pembimbing I : Dr. Miswanto, M.Si

Pembimbing II : Dr. Windarto, S.Si., M.Si

Tanggal Sidang : 27 Oktober 2022

Disetujui oleh:

Pembimbing I



Dr. Miswanto, M.Si

NIP. 196802041993031002

Pembimbing II



Dr. Windarto, S.Si., M.Si

NIP. 197711042003121001

Mengetahui,  
Ketua Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga



Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si

NIP. 196804041994031020

### **PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI**

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

## SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

|               |                          |
|---------------|--------------------------|
| Nama          | : Salsa Bila Novita Sari |
| NIM           | : 081811233020           |
| Program Studi | : S-1 Matematika         |
| Fakultas      | : Sains dan Teknologi    |
| Jenjang       | : Sarjana (S1)           |

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

**“Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan *Saturated Incidence Rate* Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar”**

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan. Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 28 Oktober 2022



Salsa Bila Novita Sari

NIM.081811233020

## KATA PENGANTAR

*Bismillaahirrahmanirrahiim.* Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas berkat, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang berjudul “*Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan Saturated Incidence Rate Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar*”.

Keberhasilan penulis dalam menyusun skripsi ini tidak luput dari dukungan dan bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Mohammad Nasih, SE., MT., AK., selaku Rektor Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan belajar penulis di Universitas Airlangga
2. Prof. Dr. Moh Yasin, M. Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan penyediaan sarana dan prasarana dalam menuntut ilmu.
3. Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si., selaku Ketua Departemen Matematika dan juga selaku koordinator Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan bimbingannya selama perkuliahan.
4. Prof. Dr. Fatmawati, M.Si, selaku dosen wali penulis yang selalu memberikan kritik, saran, dan motivasi dalam menjalani perkuliahan.
5. Dr. Miswanto, M.Si selaku dosen pembimbing I dan Dr. Windarto, S.Si., M.Si, selaku dosen pembimbing II yang selalu memberikan arahan dan bimbingan selama perkuliahan.
6. Seluruh dosen di Universitas Airlangga, khususnya di Program Studi Matematika yang telah menyampaikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
7. Keluarga penulis yaitu Bapak Sriyanto dan Ibu Sumarsih selaku orang tua penulis , Adik Dwi Budiyanto dan Adik Salvino Ardyanto, Adik Muhammad Arif Ardyanto yang telah memberikan doa dan semangatnya.

8. Sahabat penulis yaitu Lastri, Tutik, Yasinta, Muflichha dan Feni yang turut membantu dan memberikan semangatnya.
9. Teman-teman perkuliahan yang turut membantu dan memberikan semangat sehingga terselesaikannya penelitian ini. Teman-teman seperjuangan prodi S-1 Matematika 2018 dan kakak tingkat yang memberikan motivasi dan pengalaman yang berharga semasa kuliah.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini belum sempurna. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan adanya kritik dan saran yang membangun untuk memperbaiki skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi banyak pihak, khususnya mahasiswa prodi S-1 Matematika Universitas Airlangga.

Surabaya, 28 Oktober 2022

Penulis

Salsa Bila Novita Sari

Salsa Bila Novita Sari, 2022, **Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan *Saturated Incidence Rate* Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar**. Skripsi ini di bawah bimbingan Dr. Miswanto, M.Si. dan Dr. Windarto, S.Si., M.Si., Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

---

## ABSTRAK

Penyakit menular merupakan infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme yang dapat berpindah dari satu inang ke inang yang lainnya. Tuberkulosis merupakan penyakit menular kronik yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Skripsi ini bertujuan mendapatkan aproksimasi solusi dan solusi analitik dari model matematika penyebaran tuberkulosis dengan *saturated incidence rate*. Hasil analisis model matematika penyebaran tuberkulosis terdapat titik setimbang non endemik ( $E_0$ ) dan titik setimbang endemik ( $E_1$ ). Selain itu, diperoleh *Basic Reproduction Number* ( $R_0$ ) yang digunakan untuk menentukan eksistensi dan kestabilan dari titik setimbang. Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika  $R_0 < 1$ , sedangkan titik setimbang endemik eksis dan cenderung stabil asimtotis jika  $R_0 > 1$ . Aproksimasi solusi model matematika penyebaran tuberkulosis dengan *saturated incidence rate* menggunakan metode beda hingga tak standar untuk mendapatkan hasil numerik yang relatif stabil. Hasil simulasi numerik menunjukkan semakin besar nilai langkah waktu integrasi ( $h$ ) yang digunakan maka grafik semakin cepat menuju titik setimbang. Simulasi numerik menunjukkan pengaruh *saturated incidence rate* terhadap populasi yang terinfeksi ( $I$ ) yaitu semakin besar konstanta kejenuhan ( $\alpha$ ) yang diberikan menyebabkan tingkat penyebaran tuberkulosis semakin menurun.

**Kata Kunci:** Tuberkulosis, Beda Hingga Tak Standar, Model Matematika, Aproksimasi Solusi

Salsa Bila Novita Sari, 2022, **Aproximation Solution Mathematical Model of Transmitted Tuberculosis with Saturated Incidence Rate Using Non-Standard Finite Difference Method**. This skripsi is supervised by Dr. Miswanto, M.Si. and Dr. Windarto, S.Si., M.Si., Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

---

### ABSTRACT

Infectious diseases are infections caused by microorganisms that can move from one host to another. Tuberculosis is a chronic infectious disease caused by the bacterium *Mycobacterium tuberculosis*. This thesis aims to obtain approximate solutions and analytical solutions from the mathematical model of the spread of tuberculosis with a saturated incidence rate. The results of the analysis of the mathematical model of the spread of tuberculosis contained a non-endemic equilibrium point ( $E_0$ ) and an endemic equilibrium point ( $E_1$ ). In addition, the Basic Reproduction Number ( $R_0$ ) is obtained which is used to determine the existence and stability of the equilibrium point. The non-endemic equilibrium point is asymptotically stable if  $R_0 < 1$ , while the endemic equilibrium point tends to be asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . Approximation of the mathematical model of the spread of tuberculosis with the saturated incidence rate using the non-standard finite difference method to obtain relatively stable numerical results. The results of the numerical simulation show the greater the value of the integration time step ( $h$ ) used, the faster the graph will go to the equilibrium point. Numerical simulation shows the effect of the saturated incidence rate on the infected population ( $I$ ), that is, the greater the saturation constant ( $\alpha$ ) given, the lower the spread of tuberculosis.

**Keywords:** Tuberculosis, Non-Standard Finite Difference Method, Mathematical Model, Approximation Solution

## DAFTAR ISI

|                                                                                           |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| LEMBAR JUDUL .....                                                                        | i    |
| LEMBAR PERNYATAAN .....                                                                   | ii   |
| LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI .....                                                           | iii  |
| PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI .....                                                          | iv   |
| SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS .....                                               | v    |
| KATA PENGANTAR .....                                                                      | vi   |
| ABSTRAK .....                                                                             | viii |
| ABSTRACT .....                                                                            | ix   |
| DAFTAR ISI .....                                                                          | x    |
| DAFTAR TABEL .....                                                                        | xii  |
| DAFTAR GAMBAR .....                                                                       | xiii |
| DAFTAR LAMPIRAN .....                                                                     | xiv  |
| BAB I PENDAHULUAN .....                                                                   | 1    |
| 1. 1 Latar Belakang .....                                                                 | 1    |
| 1. 2 Rumusan Masalah .....                                                                | 3    |
| 1. 3 Tujuan .....                                                                         | 3    |
| 1. 4 Manfaat .....                                                                        | 3    |
| 1. 5 Batasan Masalah .....                                                                | 4    |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....                                                             | 5    |
| 2. 1 Tuberkulosis .....                                                                   | 5    |
| 2. 2 Saturated Incidence Rate .....                                                       | 6    |
| 2. 3 Sistem Persamaan Diferensial .....                                                   | 6    |
| 2. 4 Kestabilan Sistem Linier .....                                                       | 8    |
| 2. 5 Kriteria Routh Hurwitz .....                                                         | 10   |
| 2. 6 Bilangan Reproduksi Dasar .....                                                      | 12   |
| 2. 7 Beda Hingga Standar .....                                                            | 12   |
| 2. 8 Beda Hingga Tak Standar .....                                                        | 15   |
| BAB III METODOLOGI PENELITIAN .....                                                       | 16   |
| BAB IV PEMBAHASAN .....                                                                   | 18   |
| 4.1 Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> ..... | 18   |

|                      |                                                                                                                                                   |    |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2                  | Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                                             | 23 |
| 4.3                  | Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                         | 25 |
| 4.4                  | Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar .....                                      | 30 |
| 4.5                  | Simulasi Numerik dan Interpretasi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                           | 33 |
| 4.5.1                | Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar ..... | 33 |
| 4.5.2                | Simulasi Numerik Pengaruh <i>Saturated Incidence Rate</i> terhadap Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis .....                                 | 38 |
| BAB V PENUTUP .....  |                                                                                                                                                   | 39 |
| 5.1                  | Kesimpulan .....                                                                                                                                  | 39 |
| 5.2                  | Saran .....                                                                                                                                       | 40 |
| DAFTAR PUSTAKA ..... |                                                                                                                                                   | 41 |
| LAMPIRAN             |                                                                                                                                                   |    |

## DAFTAR TABEL

| Nomor | Judul Tabel                                                                                                                       | Halaman |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 4.1   | Definisi dan keterangan variabel pada model matematika tuberkulosis setelah dimodifikasi.                                         | 20      |
| 4.2   | Definisi dan keterangan parameter pada model matematika tuberkulosis setelah dimodifikasi.                                        | 20      |
| 4.3   | Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Non Endemik               | 28      |
| 4.4   | Nilai Awal untuk Diagram Fase Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Non Endemik | 29      |
| 4.5   | Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Endemik                   | 34      |

## DAFTAR GAMBAR

| No  | Judul Gambar                                                                                                                                                | Halaman |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 4.1 | Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran tuberkulosis                                                                                                  | 21      |
| 4.2 | Grafik Bidang Fase Non Endemik Populasi $S, E$ dan $I$ pada Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Endemik | 30      |
| 4.3 | Grafik Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Non Endemik dengan $h = 0.01$               | 34      |
| 4.4 | Grafik Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Non Endemik dengan $h = 0.001$ .            | 35      |
| 4.5 | Grafik Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Endemik dengan $h = 0.01$ .               | 36      |
| 4.6 | Grafik Simulasi Numerik Model Matematika Penyebaran Tuberkulosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Kondisi Endemik dengan $h = 0.001$                  | 37      |
| 4.7 | Pengaruh <i>saturated incidence rate</i> terhadap populasi $I$                                                                                              | 38      |

## DAFTAR LAMPIRAN

| No | Judul Lampiran                                                                                                                                                                            |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Perhitungan Titik Setimbang Bebas Penyakit (Non Endemik $E_0$ )                                                                                                                           |
| 2  | Perhitungan nilai $R_0$ dengan Metode <i>Next-Generation Matrix</i>                                                                                                                       |
| 3  | Perhitungan Titik Setimbang Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> (Endemik $E_1$ )                                                                      |
| 4  | Analisis Kestabilan titik Non-Endemik                                                                                                                                                     |
| 5  | Analisis Kestabilan titik Endemik                                                                                                                                                         |
| 6  | Aproksimasi Solusi Model Matematika Tuberculosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar                                                        |
| 7  | Tetapan Fungsi denominator untuk menentukan Aproksimasi Solusi Model Matematika Penyebaran Tuberculosis dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar |
| 8  | Kode Program Diagram Fase Kondisi Endemik                                                                                                                                                 |
| 9  | Kode Program Simulasi Numerik Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar dengan Kondisi Endemik                                                                                           |
| 10 | Kode Program Simulasi Numerik Menggunakan Metode Beda Hingga Tak Standar dengan Kondisi Non Endemik                                                                                       |
| 11 | Kode Program Pengaruh <i>Saturated Incidence Rate</i> terhadap Model Matematika Penyebaran Tuberculosis                                                                                   |