

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL  
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOLERA  
DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

**SKRIPSI**



**LEVI TRIANA KHOIRUN NADHIFAH**

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

**2022**

IR-PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL  
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOLERA  
DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

**SKRIPSI**



**LEVI TRIANA KHOIRUN NADHIFAH**

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

**2022**

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL  
MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN KOLERA  
DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

**SKRIPSI**

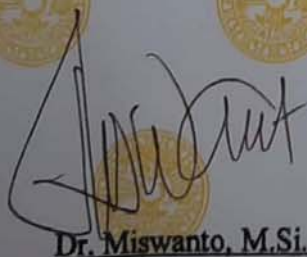
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh  
Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika  
pada Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga

Levi Triana Khoirun Nadhifah

NIM. 081811233028

Disetujui oleh:

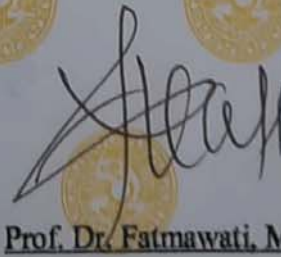
Pembimbing I



Dr. Miswanto, M.Si.

NIP. 196802041993031002

Pembimbing II



Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP. 197307041998022001

**LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI**

Judul : Analisis dan Kontrol Optimal Model Matematika  
Penyebaran Penyakit Kolera dengan *Saturated Incidence Rate*

Penulis : Levi Triana Khoirun Nadhifah

NIM : 081811233028

Pembimbing I : Dr. Miswanto, M.Si.

Pembimbing II : Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

Tanggal Ujian : 13 Desember 2022

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Dr. Miswanto, M.Si.

NIP. 19680241993031002



Prof. Dr. Fatmawati, M.Si.

NIP. 197307041998022001

Mengetahui,

Ketua Departemen dan Koordinator Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Airlangga



Dr. Herry Suprajitno, S.Si, M.Si.

NIP. 196804041994031020

## **PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI**

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penulis, dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

## SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Levi Triana Khoirun Nadhifah  
NIM : 081811233028  
Program Studi : S1-Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiat dalam skripsi saya yang berjudul:

**“Analisis dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit  
Kolera dengan *Saturated Incidence Rate*”**

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2022



Levi Triana Khoirun Nadhifah

NIM 081811233028

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa. Atas rahmat dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***“Analisis dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan Saturated Incidence Rate”***. Dalam skripsi ini penulis membahas mengenai analisis kestabilan, kontrol optimal, simulasi, dan interpretasi pada model matematika penyebaran penyakit kolera dengan laju infeksi jenuh (*Saturated Incidence Rate*).

Keberhasilan penulis dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. Mohammad Nasih, SE., M.T., Ak., CMA. Selaku Rektor Universitas Airlangga.
2. Prof. Dr. Moh Yasin, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas selama menempuh studi S-1 Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.
3. Dr. Herry Suprajitno, S.Si, M.Si selaku Ketua Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga dan selaku Koordinator Program Studi S-1 Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga yang selalu memberikan kesempatan dan fasilitas selama menempuh studi S-1 Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga.
4. Dr. Miswanto, M.Si. selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan serta arahan dengan teliti dan penuh kesabaran.
5. Dr. Fatmawati, M.Si. selaku dosen wali dan dosen pembimbing II yang juga telah memberikan bimbingan serta arahan dengan teliti dan penuh kesabaran.
6. Seluruh dosen di Universitas Airlangga, khususnya di Departemen Matematika yang telah menyampaikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis selama proses perkuliahan.

7. Seluruh keluarga besar penulis, khususnya kedua orang tua yang telah memberikan do'a, dukungan, dan semangat kepada penulis.
8. Seluruh teman penulis di kampus maupun di kost yang telah memberikan motivasi, dukungan, semangat, dan arahan kepada penulis.
9. Teman-teman mahasiswa S-1 Matematika angkatan 2018 yang telah memberikan bantuan, semangat, kritik, dan saran yang membangun.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan moril maupun materil baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk menambah pengetahuan dan wawasan bagi pembaca. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, baik dalam metode penulisan maupun dalam pembahasan materi. Hal tersebut dikarenakan keterbatasan kemampuan penulis. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun demi kesempurnaan skripsi ini.

Surabaya, 20 Desember 2022

Penulis,

Levi Triana Khoirun Nadhifah

Levi Triana Khoirun Nadhifah, 2022, **Analisis dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Kolera dengan *Saturated Incidence Rate***. Skripsi di bawah bimbingan Dr. Miswanto, M.Si. dan Prof. Dr. Fatmawati, M.Si. Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

---

## ABSTRAK

Kolera merupakan penyakit diare akut, yang disebabkan oleh infeksi usus akibat terkena bakteri *Vibrio cholerae*. Kolera merupakan penyakit yang penyebaran dan penularannya sangat cepat. Bakteri kolera dapat ditularkan melalui makanan dan minuman yang terkontaminasi oleh bakteri. Tujuan skripsi ini untuk menganalisis model matematika penyebaran kolera dengan *saturated incidence rate* dan menerapkan strategi kontrol optimal, berupa upaya pengobatan dan upaya sanitasi untuk mengontrol pertumbuhan populasi terinfeksi dan bakteri. Berdasarkan analisis model diperoleh dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Kestabilan lokal titik setimbang dan eksistensi titik setimbang non endemik bergantung pada bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika memenuhi  $R_0 < 1$ , sedangkan titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis jika  $R_0 > 1$ . Pada skripsi ini juga dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang paling berpengaruh pada model. Adapun parameter yang berpengaruh yaitu laju asupan *Vibrio cholerae* dari lingkungan yang tercemar dan kontribusi setiap orang yang terinfeksi terhadap populasi *Vibrio cholerae* di lingkungan yang tercemar. Masalah kontrol optimal pada model matematika penyebaran kolera diselesaikan dengan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Selanjutnya hasil numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol berupa upaya pengobatan dan upaya sanitasi secara bersamaan dapat meminimalkan jumlah manusia terinfeksi dan populasi bakteri *Vibrio cholerae* dengan biaya minimal.

**Kata Kunci:** Model Matematika, Kolera, Titik Setimbang, Analisis Kestabilan, Sensitivitas, Kontrol Optimal, Simulasi Numerik.

Levi Triana Khoirun Nadhifah, 2022, **Analysis and Optimal Control of a Mathematical Model of the Spread of Cholera with a *saturated incidence rate***. This thesis is supervised by Dr. Miswanto, M.Si. and Prof. Dr. Fatmawati, M.Si. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

---

## ABSTRACT

Cholera is an acute diarrheal disease, which is caused by an intestinal infection due to exposure to the *Vibrio cholerae* bacteria. Cholera is a disease whose spread and transmission is very fast. Cholera bacteria can be transmitted through food and drink contaminated with bacteria. The purpose of this thesis is to analyze a mathematical model of the spread of cholera with a saturated incidence rate and apply an optimal control strategy in the form of treatment and sanitation efforts to control the growth of the infected population and bacteria. Based on the model analysis, two equilibrium points were obtained, namely the non-endemic equilibrium point and the endemic equilibrium point. The stability of local equilibrium points and the existence of non endemic equilibrium points depend on the basic reproduction number ( $R_0$ ). The non endemic equilibrium point is asymptotically stable if it satisfies  $R_0 < 1$ , while the endemic equilibrium point tends to be asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . The parameters that influence are the intake rate of *Vibrio cholerae* from polluted environments and the contribution of each infected person to the *Vibrio cholerae* population in polluted environments. The optimal control problem in this model is solved by using the Pontryagin Maximum Principle method. Furthermore, the numerical results show that providing control in the form of treatment efforts and sanitation efforts simultaneously can minimize the number of infected humans and the population of *Vibrio cholerae* bacteria with minimal costs.

**Keywords:** Mathematical Model, Cholera, Equilibrium Point, Stability, Sensitivity, Optimal Control, Numerical Simulation.

## DAFTAR ISI

|                                                                   |      |
|-------------------------------------------------------------------|------|
| HALAMAN JUDUL.....                                                | i    |
| LEMBAR PERNYATAAN.....                                            | ii   |
| LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI.....                             | iii  |
| PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI.....                                   | iv   |
| SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS.....                        | v    |
| KATA PENGANTAR.....                                               | vi   |
| ABSTRAK.....                                                      | viii |
| ABSTRACT.....                                                     | ix   |
| DAFTAR ISI.....                                                   | x    |
| DAFTAR TABEL.....                                                 | xii  |
| DAFTAR GAMBAR.....                                                | xiii |
| DAFTAR LAMPIRAN.....                                              | xiv  |
| BAB I PENDAHULUAN.....                                            | 1    |
| 1.1    Latar Belakang.....                                        | 1    |
| 1.2    Rumusan Masalah.....                                       | 2    |
| 1.3    Tujuan Penelitian.....                                     | 3    |
| 1.4    Manfaat Penelitian.....                                    | 3    |
| 1.5    Batasan Masalah.....                                       | 3    |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....                                      | 4    |
| 2.1    Penyakit Kolera.....                                       | 4    |
| 2.2    Saturated Incidence Rate.....                              | 5    |
| 2.3    Sistem Persamaan Diferensial.....                          | 5    |
| 2.4    Kestabilan Sistem Linier.....                              | 7    |
| 2.5    Basic Reproduction Number ( <b><math>R_0</math></b> )..... | 8    |

|                                     |                                                                                                                                                |    |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.6                                 | Kriteria Routh-Hurwitz .....                                                                                                                   | 9  |
| 2.7                                 | Masalah Kontrol Optimal .....                                                                                                                  | 11 |
| 2.8                                 | Prinsip Maksimum Pontryagin .....                                                                                                              | 11 |
| BAB III METODOLOGI PENELITIAN ..... |                                                                                                                                                | 14 |
| BAB IV PEMBAHASAN .....             |                                                                                                                                                | 16 |
| 4.1                                 | Analisis Model Matematika Penyebaran Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                                                       | 16 |
| 4.1.1                               | Titik Setimbang Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                                       | 21 |
| 4.1.2                               | Analisis Kestabilan Lokal Titik Setimbang .....                                                                                                | 24 |
| 4.1.3                               | Analisis Sensitivitas .....                                                                                                                    | 33 |
| 4.2                                 | Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> .....                                       | 39 |
| 4.2.1                               | Penyelesaian Kontrol Optimal .....                                                                                                             | 42 |
| 4.2.2                               | Simulasi dan Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> dan adanya Variabel Kontrol ..... | 45 |
| BAB V PENUTUP .....                 |                                                                                                                                                | 53 |
| 5.1                                 | Kesimpulan .....                                                                                                                               | 53 |
| 5.2                                 | Saran .....                                                                                                                                    | 53 |
| DAFTAR PUSTAKA .....                |                                                                                                                                                | 54 |

## DAFTAR TABEL

| Nomor | Judul Tabel                                                                                            | Halaman |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 4.1   | Definisi Variabel dalam model Matematika Penyebaran Kolera                                             | 17      |
| 4.2   | Definisi Parameter dalam Model Matematika pada Penyebaran Kolera                                       | 18      |
| 4.3   | Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>              | 31      |
| 4.4   | Nilai Awal Bidang Fase Model Matematika Penyebaran Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>       | 32      |
| 4.5   | Nilai Indeks Sensitivitas Parameter                                                                    | 34      |
| 4.6   | Hubungan antara perubahan pada Nilai Parameter terhadap nilai $R_0$                                    | 35      |
| 4.7   | Notasi Variabel kontrol pada Model Matematika Penyebaran Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | 40      |
| 4.8   | Jumlah Populasi Manusia Terpapar ( $E$ ) selama 100 hari                                               | 47      |
| 4.9   | Jumlah Populasi Manusia Terinfeksi ( $I$ ) selama 100 hari                                             | 48      |
| 4.10  | Jumlah Populasi Bakteri ( $B$ ) selama 100 hari                                                        | 49      |
| 4.11  | Nilai Fungsi Ongkos                                                                                    | 52      |

## DAFTAR GAMBAR

| Nomor | Judul Gambar                                                                                                                   | Halaman |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 4.1   | Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>                           | 19      |
| 4.2   | Grafik Bidang Fase pada Bidang $S - I$ pada model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | 33      |
| 4.3   | Sensitivitas $\epsilon$ terhadap nilai $R_0$ dengan tiga nilai $\beta_1$ yang berbeda                                          | 36      |
| 4.4   | Grafik populasi $I$ dengan tiga nilai parameter $\beta_1$ yang berbeda                                                         | 37      |
| 4.5   | Grafik populasi $I$ dengan tiga nilai parameter $\epsilon$ yang berbeda                                                        | 37      |
| 4.6   | Grafik populasi $B$ dengan tiga nilai parameter $\beta_1$ yang berbeda                                                         | 38      |
| 4.7   | Grafik populasi $B$ dengan tiga nilai parameter $\epsilon$ yang berbeda                                                        | 39      |
| 4.8   | Grafik Simulasi Jumlah Populasi Manusia Terpapar ( $E$ ) selama 100 Hari                                                       | 47      |
| 4.9   | Grafik Simulasi Jumlah Populasi Manusia Terinfeksi ( $I$ ) selama 100 Hari                                                     | 48      |
| 4.10  | Grafik Simulasi Jumlah Populasi Bakteri ( $B$ ) selama 100 Hari                                                                | 49      |
| 4.11  | Grafik Profil Kontrol Upaya Pengobatan ( $u_1$ )                                                                               | 50      |
| 4.12  | Grafik Profil Kontrol Upaya Sanitasi ( $u_2$ )                                                                                 | 51      |
| 4.13  | Grafik Profil Kontrol Upaya Pengobatan ( $u_1$ ) dan Upaya Sanitasi ( $u_2$ )                                                  | 51      |

## DAFTAR LAMPIRAN

| Nomor              | Judul Lampiran                                                                                                            |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Lampiran 1</b>  | Perhitungan Titik Setimbang Non Endemik ( $E_0$ )                                                                         |
| <b>Lampiran 2</b>  | Perhitungan Nilai $R_0$ dengan Metode Next-Genesration Matrix                                                             |
| <b>Lampiran 3</b>  | Perhitungan Titik Setimbang Endemik ( $E_1$ )                                                                             |
| <b>Lampiran 4</b>  | Analisis Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik                                                                           |
| <b>Lampiran 5</b>  | Analisis Kestabilan Titik Setimbang Endemik                                                                               |
| <b>Lampiran 6</b>  | Kode Program untuk Simulasi Program Bidang Fase Model Matematika Penyebaran Kolera dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> |
| <b>Lampiran 7</b>  | Perhitungan Analisis Sensitivitas Parameter                                                                               |
| <b>Lampiran 8</b>  | Kode Program Grafik Sensitivitas $\epsilon$ terhadap $R_0$ dengan tiga nilai $\beta_1$ yang berbeda                       |
| <b>Lampiran 9</b>  | Kode Program Grafik populasi $I$ dengan tiga nilai parameter $\beta_1$ yang berbeda                                       |
| <b>Lampiran 10</b> | Kode Program Grafik populasi $I$ dengan tiga nilai parameter $\epsilon$ yang berbeda                                      |
| <b>Lampiran 11</b> | Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Kolera Tanpa Kontrol                                    |
| <b>Lampiran 12</b> | Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Kolera $u_1$                                            |
| <b>Lampiran 13</b> | Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Kolera $u_2$                                            |
| <b>Lampiran 14</b> | Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Kolera $u_1$ dan $u_2$                                  |