

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA INFLUENZA DUA *STRAIN* DAN
DUA VAKSINASI DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

SKRIPSI



MAR'AH NUR SHOLIAH

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

IR-PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA INFLUENZA DUA *STRAIN* DAN
DUA VAKSINASI DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

SKRIPSI



MAR'AH NUR SHOLIAH

**PROGRAM STUDI S-1 MATEMATIKA
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

2022

**ANALISIS KESTABILAN DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL MATEMATIKA INFLUENZA DUA *STRAIN* DAN
DUA VAKSINASI DENGAN *SATURATED INCIDENCE RATE***

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh
Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika
pada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga

Mar'ah Nur Sholihah
NIM. 081811233009

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Cicik Alfiniyah, M.Si., Ph.D.
NIP. 198604122008122003


Dr. Windarto, M.Si.
NIP.197711042003121001

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model
Matematika Influenza Dua *Strain* dan Dua Vaksinasi
dengan *Saturated Incidence Rate*

Penyusun : Mar'ah Nur Sholihah

NIM : 081811233009

Pembimbing I : Cicik Alfiniyah, M.Si., Ph.D.

Pembimbing II : Dr. Windarto, M.Si.

Disetujui oleh:

Pembimbing I,



Cicik Alfiniyah, M.Si., Ph.D.
NIP. 198604122008122003

Pembimbing II,



Dr. Windarto, M.Si.
NIP.197711042003121001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Airlangga



Dr. Hery Suprajitno, S.Si., M.Si.
NIP. 196804041994031020

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, tetapi tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai dengan kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Mar'ah Nur Sholihah
NIM : 081811233009
Program Studi : S-1 Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan tindakan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

**“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika
Influenza Dua *Strain* dan Dua Vaksinasi dengan *Saturated Incidence Rate*”**

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah diterapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 13 Agustus 2022


Mar'ah Nur Sholihah
NIM. 081811233009

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT atas berkat, rahmat dan hidayah yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi Muhammad SAW, yang menuntun kita dari zaman kegelapan hingga zaman terang benderang, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Influenza Dua *Strain* dan Dua Vaksinasi dengan *Saturated Incidence Rate*”**.

Keberhasilan penulis sampai pada tahap penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang turut membantu dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Moh. Nasih, S.E., M.Si., Ak. selaku Rektor Universitas Airlangga.
2. Dr. Herry Suprajitno, S.Si., M.Si. selaku Ketua Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga yang telah memberikan bimbingannya.
3. Dr. Fatmawati, M.Si. selaku dosen wali yang telah membimbing dan memberikan arahan selama perkuliahan.
4. Cicik Alfiniyah, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing 1 yang sudah membimbing dan memberikan arahan dalam mengerjakan skripsi.
5. Dr. Windarto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing 2 yang sudah membimbing dan memberikan arahan dalam mengerjakan skripsi.
6. Seluruh dosen di Universitas Airlangga, khususnya di Departemen Matematika yang telah menyampaikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
7. Kedua orang tua penulis, Bapak Martono dan Almh. Ibu Rukama' yang selalu mendoakan yang terbaik untuk penulis dan sumber kekuatan bagi penulis.
8. Kakak Nuni Rahmawati, Kakak Ani Vera Wati, Kakak Imarotul Khoiriyah, Kakek Nur Kazin yang telah memberikan do'a setiap waktu, kasih sayang dan dukungannya baik secara moral maupun materi yang tidak ternilai bagi penulis.

9. Dita Meylinda Hafsari yang selalu ada untuk penulis, yang selalu memberi saran tentang apapun itu.
 10. Sahabat dan teman-teman penulis Erlyn Narishki, Dinda Mutiara, Khikmatul H, Aniv Farika, Mbak Mila Datul Muharromah, Mbak Annisa Nur Indahsari yang memberikan do'a, dukungan dan memberi ilmunya kepada penulis.
 11. Teman penulis Nana Yuliana, Elfira Elvianti, Sayyidati Mas'ula yang selalu memberikan kebahagiaan bagi penulis.
 12. Teman-teman prodi Matematika angkatan 2018 dan kakak tingkat yang turut membantu dan memberikan saran sehingga terselesaikannya penelitian ini.
- Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat sebagai bahan pustaka dan penambahan informasi khususnya bagi mahasiswa Universitas Airlangga. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih belum sempurna sehingga saran dan kritik yang membangun diperlukan untuk menyempurnakan skripsi ini.

Surabaya, 28 April 2022

Penyusun

Mar'ah Nur Sholihah

Mar'ah Nur Sholihah, 2022, **Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Influenza Dua *Strain* dan Dua Vaksinasi dengan *Saturated Incidence Rate***. Skripsi ini dibawah bimbingan Cicik alfiniyah, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Dr. Windarto, S.Si., M.Si. Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

ABSTRAK

Influenza atau flu merupakan suatu penyakit menular yang disebabkan oleh virus yang menyerang saluran pernapasan bagian atas yaitu hidung, tenggorokan, bronkus dan paru-paru. Ada berbagai macam tipe *strain* atau variasi jenis virus pada virus influenza. Sel pertahanan tubuh yang terbentuk karena infeksi virus influenza *strain* lama tidak dapat memberikan perlindungan tubuh kembali terhadap *strain* baru. Penyebaran *strain* baru lebih cepat dibandingkan dengan *strain* lama. Model matematika dapat digunakan sebagai pendekatan dalam memprediksi penyebaran virus influenza di masa yang akan datang. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan titik setimbang dari model matematika influenza dua *strain* dan dua vaksinasi dengan *saturated incidence rate*. Selanjutnya pada model tersebut diterapkan kontrol optimal berupa pengobatan. Berdasarkan hasil analisis model tanpa kontrol diperoleh empat titik setimbang yaitu satu titik setimbang non endemik dan tiga titik setimbang endemik. Pada model ini diperoleh dua *Basic Reproduction Number* sesuai dengan *strain*-nya yaitu R_{01} dan R_{02} . Titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis lokal jika $R_{01}, R_{02} < 1$, sedangkan titik setimbang endemik akan stabil asimtotis lokal dengan syarat tertentu. Pada model ini menggunakan dua variabel kontrol, yaitu upaya pengobatan untuk individu terinfeksi *strain* 1 dan pengobatan untuk individu terinfeksi *strain* 2. Selanjutnya, eksistensi dari kedua variabel kontrol optimal ditentukan melalui Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil simulasi menunjukkan bahwa upaya pengobatan yang dilakukan secara bersamaan memberikan efek yang signifikan dalam menurunkan angka kejadian influenza.

Kata Kunci : *Influenza, dua strain, Vaksinasi, Kestabilan, Basic Reproduction Number, Kontrol optimal*

Mar'ah Nur Sholihah, 2022, **Stability Analysis and Optimal Control of Two Strains and Two Vaccinations Influenza Mathematical Models with Saturated Incidence Rate**. This undergraduate thesis is supervised by Cicik alfiniyah, S.Si., M.Sc., Ph.D. and Dr. Windarto, S.Si., M.Sc. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

ABSTRACT

Influenza or flu is an infectious disease caused by a virus that attacks the upper respiratory tract, namely the nose, throat, bronchi and lungs. There are various types of strains or variations of the type of virus in the influenza virus. The body's defense cells formed due to infection with the old strain of the influenza virus cannot provide the body's protection again against the new strain. The spread of new strains is faster than the old strains. Mathematical models can be used as an approach in predicting the spread of the influenza virus in the future. This study aims to analyze the stability of the equilibrium point of the mathematical model of influenza two strains and two vaccinations with a saturated incidence rate. Furthermore, the model is applied to optimal control in the form of treatment. Based on the analysis of the uncontrolled model, four equilibrium points were obtained, namely one non-endemic equilibrium point and three endemic equilibrium points. In this model, two Basic Reproduction Numbers are obtained according to the strain, namely R_{01} and R_{02} . The non-endemic equilibrium point will be locally asymptotically stable if $R_{01}, R_{02} < 1$, while the endemic equilibrium point will be locally asymptotically stable under certain conditions. This model uses two control variables, namely treatment efforts for individuals infected with strain 1 and treatment for individuals infected with strain 2. Furthermore, the existence of the two optimal control variables is determined through the Pontryagin Maximum Principle. The simulation results show that concurrent treatment efforts have a significant effect in reducing the incidence of influenza.

Keywords : *Influenza, Two strain, Vaccinations, Stability Basic Reproduction Number, Optimal Control*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI.....	iii
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI.....	iv
SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
BAB I.....	1
PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	4
BAB II	5
TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Virus Influenza.....	5
2.2 Vaksin Penyakit Influenza.....	6
2.3 <i>Saturated Incidence Rate</i>	7
2.4 Sistem Persamaan Diferensial	7
2.5 Kestabilan Sistem Linier	9
2.6 Bilangan Reproduksi Dasar	11
2.7 Kriteria Routh-Hurwitz	11
2.8 Kontrol Optimal	14
2.9 Prinsip Maksimum Pontryagin	14
BAB III	16
METODOLOGI PENELITIAN	16
BAB IV	18

PEMBAHASAN	18
4.1 Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	18
4.1.1 Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	18
4.1.2 Titik Setimbang Model	24
4.1.3 Analisis Kestabilan Lokal	30
4.2 Penerapan Kontrol Optimal Model Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi ..	41
4.2.1 Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi disertai Variabel Kontrol 41	
4.2.2 Penyelesaian Kontrol Optimal Model Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi	
4.3 Simulasi dan Interpretasi Model Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi disertai Kontrol dan Tanpa Kontrol	46
4.4 Simulasi Numerik dan Interpretasi Model Matematika Penyebaran Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	53
BAB V	62
PENUTUP	62
5.1 Kesimpulan	62
5.2 Saran	63
DAFTAR PUSTAKA	64

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul Tabel	Halaman
4.1	Pendefinisian Variabel Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	19
4.2	Pendefinisian Parameter Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	20
4.3	Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Influenza dua <i>Strain</i> dan dua Vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	34
4.4	Nilai Awal Simulasi Numerik Titik Setimbang Endemik <i>Strain</i> 1	35
4.5	Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Influenza dua <i>Strain</i> dan dua Vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	36
4.6	Nilai Awal Simulasi Numerik Titik Setimbang Endemik <i>Strain</i> 2	37
4.7	Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Influenza dua <i>Strain</i> dan dua Vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	39
4.8	Nilai Awal Simulasi Numerik Titik Setimbang Endemik <i>Strain</i> 1 dan 2	40
4.9	Notasi dan Parameter Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi dengan Menggunakan Variabel Kontrol	41
4.10	Perbandingan Jumlah I_1 dan I_2 pada Hari ke-20	50
4.11	Fungsi Ongkos atas Kontrol yang Diberikan	52
4.12	Nilai Parameter untuk Simulasi saat Kondisi Non Endemik Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	54

4.13	Nilai Parameter untuk Simulasi saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	56
4.14	Nilai Parameter untuk Simulasi saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 2 Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	58
4.15	Nilai Parameter untuk Simulasi saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 1 dan 2 Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	60

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Tabel	Halaman
4.1	Diagram Transmisi Model Matematika Influenza Dua <i>Strain</i> dan Dua Vaksinasi dengan <i>Saturated Incidence Rate</i>	21
4.2	Grafik Bidang Fase Endemik <i>Strain</i> 1 Populasi I_1 dan I_2 pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	35
4.3	Grafik Bidang Fase Endemik <i>Strain</i> 2 Populasi I_1 dan I_2 pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	38
4.4	Grafik Bidang Fase Endemik <i>Strain</i> 1 dan 2 Populasi I_1 dan I_2 pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Influenza	40
4.5	Simulasi Perbandingan Populasi Manusia yang Terinfeksi <i>Strain</i> 1 (I_1) Sebelum dan Sesudah diberi Kontrol	48
4.6	Simulasi Perbandingan Populasi Manusia yang Terinfeksi <i>Strain</i> 2 (I_2) Sebelum dan Sesudah diberi Kontrol	49
4.7	Grafik Kontrol u_1	50
4.8	Grafik Kontrol u_2	51
4.9	Grafik Kontrol u_1 dan u_2	52
4.10	Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Non Endemik	55
4.11	Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 1	57
4.12	Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 2	59
4.13	Grafik Simulasi Numerik saat Kondisi Endemik <i>Strain</i> 1 dan <i>strain</i> 2	61

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran
Lampiran 1	Perhitungan Titik Setimbang Non-Endemik
Lampiran 2	Perhitungan <i>Basic Reproduction Number</i> (R_0)
Lampiran 3	Pengujian Kestabilan Titik Setimbang Non-Endemik
Lampiran 4	Perhitungan Titik Setimbang Endemik <i>Strain 1</i>
Lampiran 5	Perhitungan Titik Setimbang Endemik <i>Strain 2</i>
Lampiran 6	Perhitungan Titik Setimbang Endemik <i>Strain 1</i> dan <i>Strain 2</i>
Lampiran 7	Pengujian Kestabilan Titik Setimbang Endemik <i>Strain 1</i>
Lampiran 8	Pengujian Kestabilan Titik Setimbang Endemik <i>Strain 2</i>
Lampiran 9	Kode Program Simulasi Numerik Bidang Fase Endemik <i>Strain 1</i>
Lampiran 10	Kode Program Simulasi Numerik Bidang Fase Endemik <i>Strain 2</i>
Lampiran 11	Kode Program Simulasi Numerik Bidang Fase Endemik <i>Strain 1 & 2</i>
Lampiran 12	Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Influenza dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> Tanpa Kontrol
Lampiran 13	Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Influenza dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> dengan Kontrol u_1
Lampiran 14	Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Influenza dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> dengan Kontrol u_2
Lampiran 15	Kode Program DOTcyp pada MATLAB untuk Model Matematika Penyebaran Influenza dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> dengan Kontrol u_1 dan u_2

Lampiran 16	Kode Program Simulasi Numerik Kondisi Non Endemik
Lampiran 17	Kode Program Simulasi Numerik Kondisi Endemik <i>Strain 1</i>
Lampiran 18	Kode Program Simulasi Numerik Kondisi Endemik <i>Strain 2</i>
Lampiran 19	Kode Program Simulasi Numerik Kondisi Endemik <i>Strain 1 & 2</i>