

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Aljabar abstrak merupakan cabang dari matematika yang terus mengalami perkembangan. Perkembangan tersebut meliputi berbagai teori di ranah aljabar abstrak yang seringkali disajikan oleh para ilmuwan tanpa penerapan secara riilnya. Selain itu, penerapan aljabar abstrak banyak disajikan pada bidang lain di antaranya adalah penerapan konsep modulo pada kriptografi yang diterapkan untuk pengamanan data di berbagai lembaga yang berhubungan langsung dengan hal tersebut, misalnya pada Lembaga Sandi Negara (LSN). Penerapan yang luas seperti itulah yang menjadikan keilmuan dalam bidang aljabar abstrak ini perlu terus dikembangkan.

Selain aljabar abstrak, cabang matematika yang terus mengalami perkembangan adalah teori graf. Konsep teori graf bermula dari suatu permasalahan mengenai jembatan yang ada di kota *Königsberg* pada tahun 1736. Di sana terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan. Warga setempat memulai dari suatu daratan dan mencoba melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke daratan yang sama namun tak ada satupun yang berhasil. Permasalahan tersebut kemudian diselesaikan oleh matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler yang menyatakan bahwa tidak akan pernah ada orang yang dapat melewati setiap jembatan tepat satu kali untuk sampai pada keempat daratan. Hal ini dibuktikan dengan memodelkan permasalahan tersebut dan memisalkan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi yang menghubungkan titik-titik yang ada. Metode yang diterapkan Euler tersebut melahirkan cara pandang baru dalam bidang ilmu matematika yang dikenal dengan teori graf.

Teori graf kemudian banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang menjadikan masalah beserta solusinya menjadi lebih sederhana. Hingga saat ini teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang banyak dikembangkan karena bentuknya yang menarik. Hal ini terlihat pada

penerapannya yang sangat luas di antaranya dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan riset operasi.

Konsep pada teori graf mengalami perkembangan yang signifikan dengan adanya konsep pada aljabar abstrak yang salah satunya adalah grup. Grup merupakan sebuah himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya mempunyai invers. Karena beragamnya operasi biner yang dapat dibentuk menjadikan konsep grup terus berkembang hingga saat ini. Berbagai jenis grup lahir seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, salah satunya adalah grup abelian, yaitu grup yang bersifat komutatif. Selain itu banyak pula grup yang memiliki sifat-sifat khusus, di antaranya adalah grup siklik, grup klein, grup dihedral, dan grup quaternion. Dengan memandang elemen pada suatu grup sebagai titik dan sifat yang menghubungkan antar elemen sebagai sisi, maka dapat dikonstruksi berbagai graf dari suatu grup. Secara sederhana, proses ini dilakukan dengan menggabungkan konsep grup pada aljabar abstrak dengan teori graf, yang kemudian disebut sebagai teori aljabar graf.

Berbagai penelitian telah dilakukan oleh berbagai matematikawan pada bidang teori aljabar graf. Erfanian, *et al.* (2012) mengembangkan graf konjugasi dari grup berhingga dan pada tahun 2014, Ma, *et al.* mengembangkan graf koprima dari grup. Selanjutnya, Novictor *et al.* (2020) mengembangkan graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_3^n$ dan satu tahun kemudian, Aditya *et al.* mengembangkan graf Jacobson atas ring $\mathbb{Z}_n$.

Di sisi lain, Kelarev & Quinn (2000) mendefinisikan graf pangkat berarah dari grup. Dalam hal ini, sebagai titik adalah elemen dari grup dan sisi yang menghubungkan sebarang dua titik berbeda dengan syarat salah satu titik merupakan hasil perpangkatan dari titik lainnya. Hal ini kemudian dilanjutkan oleh Chakrabarty *et al.* pada tahun 2009 dalam mendefinisikan graf pangkat tak berarah dari semigrup dan grup. Chakrabarty menyatakan bahwa titik pada graf dibentuk dari sebuah elemen semigrup dan grup dengan sebarang dua titik yang berbeda bertetangga jika titik pertama merupakan perpangkatan dari titik kedua atau sebaliknya. Kedua penelitian di atas menghasilkan berbagai sifat graf yang

dibentuk dengan menganalisis sifat-sifat elemen dari grup atau semigrup. Pada tahun 2010, Singh dan Manilal memperkenalkan konsep graf pangkat kuat dari grup berhingga yang memiliki definisi serupa dengan definisi Chakrabarty. Dalam penelitiannya dituliskan bahwa titik dari graf adalah elemen dari grup berhingga, sedangkan sebarang dua titik yang berbeda dikatakan bertetangga jika hasil perpangkatan kedua titik tersebut adalah sama dan pangkat merupakan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari order grup. Penelitian ini menghasilkan berbagai sifat dari graf yang dibentuk dengan grup $\mathbb{Z}_n$ menjadi fokus utama dalam pembahasan. Selanjutnya pada tahun 2016, Aalipour *et al.* mendefinisikan tentang graf pangkat yang ditingkatkan dari grup. Dalam penelitiannya, Aalipour mendefinisikan bahwa titik-titik pada graf merupakan elemen dari grup dan pembentukan sisi dihasilkan dari kriteria bahwa dua titik yang bertetangga merupakan hasil perpangkatan dari suatu elemen di grup tersebut. Kemudian pada tahun 2018, Rajkumar *et al.* mendefinisikan tentang graf pangkat tereduksi dari sebuah grup. Didefinisikan bahwa titik dari graf adalah elemen suatu grup, serta sebarang dua titik bertetangga jika himpunan yang dibangun oleh salah satu titik merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan titik lainnya. Penelitian Aalipour lebih fokus kepada temuan terkait keterhubungan antara graf pangkat, graf pangkat yang ditingkatkan, dan graf komutatif, sedangkan penelitian Rajkumar berfokus pada sifat-sifat graf, di antaranya bilangan clique, bilangan kromatik, bilangan independen, konektivitas, dan diameter.

Beberapa penelitian yang mengaitkan konsep graf dan grup menjadi motivasi penulis untuk melakukan penelitian terkait dengan graf yang dibentuk dari sebarang grup. Pada penelitian ini, penulis memodifikasi definisi ketetanggaan titik pada graf pangkat (tak berarah) yang dituliskan oleh Chakrabarty *et al.* (2009) dimana titik dari graf tersebut adalah elemen dari grup berhingga dan sebarang dua titik yang berbeda dihubungkan oleh sebuah sisi jika titik pertama merupakan hasil perpangkatan dari titik kedua atau sebaliknya, dengan pangkatnya merupakan suatu bilangan bulat positif. Penulis mengubah konjungsi ‘atau’ pada definisi tersebut menjadi konjungsi ‘dan’ yang kemudian definisi tersebut menghasilkan graf baru yang selanjutnya disebut sebagai **graf**

pangkat bersama (*mutually power graph*). Pada penelitian ini akan dikaji sifat-sifat graf terkait dengan sifat grup pembentuknya, sedangkan sebagai grup pembentuk graf yang akan dikaji pada penelitian ini adalah grup berhingga yang meliputi grup siklik, grup dihedral, serta perumuman dari grup quaternion.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini, yaitu

1. Bagaimana konstruksi graf pangkat bersama yang dikembangkan dari grup berhingga, khususnya grup siklik, grup dihedral, dan perumuman grup quaternion?
2. Bagaimana sifat-sifat graf pangkat bersama dan kaitannya dengan grup pembentuknya, khususnya grup siklik, grup dihedral, dan perumuman grup quaternion?

1.3. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah

1. Mengonstruksi graf pangkat bersama yang dikembangkan dari grup berhingga, khususnya grup siklik, grup dihedral, dan perumuman grup quaternion.
2. Mengidentifikasi sifat-sifat graf pangkat bersama dan kaitannya dengan grup pembentuknya, khususnya grup siklik, grup dihedral, dan perumuman grup quaternion.

1.4. Manfaat

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan baru dalam hal pengembangan teori graf dengan objek yang dikembangkan dari struktur grup serta dapat menjadi referensi tambahan dalam mengkonstruksi graf dari grup berhingga. Dengan demikian diharapkan akan semakin berkembang topik-topik penelitian dalam bidang teori graf, khususnya yang berkaitan dengan grup sebagai objek yang menjadi penyusun sebuah graf.