SYARAT PERLU DAN CUKUP GRAPH SEBAGAI S-GRAPH

SKRIPSI

DIAN ARIANI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA
2006

SYARAT PERLU DAN CUKUP GRAPH SEBAGAI S-GRAPH

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Airlangga

Oleh :

DIAN ARIANI
NIM. 080212502

Tanggal Lulus : 2 Agustus 2006

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si	**Liliek Susilowati, S.Si, M.Si**
NIP 131 801 397	**NIP. 132 105 900**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Judul : **Syarat Perlu Dan Cukup Graph Sebagai S-Graph**

Penyusun : **Dian Ariani**

NIM : **080212502**

Tanggal Ujian : **2 Agustus 2006**

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si	**Liliek Susilowati, S.Si, M.Si**
NIP 131 801 397	**NIP. 132 105 900**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA Universitas Airlangga

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS AIRLANGGA JURUSAN MATEMATIKA

Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si

NIP 131 801 397

بسم الله الرحمن الرحيم

Terima kasih_Q

1. Teruntai kata syukur kepada Allah SWT atas rampungnya skripsi ini.
   Kuletakkan keningku pada bumiMu ya Allah, atas segala karunia keindahan dan anugrah yang tak henti kusyukuri sepanjang hidupku
2. Sungkem dalem kagem Bapak dan Ibu'
   yang telah membesarkanku dengan penuh kasih dan sayang tiada henti, sokongan moril dan materiil
3. Bapak Imam Utoyo dan Ibu Liliek Susilowati yang dengan sabar telah membimbing dan memberi arahan sehingga terselesaikannya skripsi ini, Ibu Yayuk Wahyuni selaku dosen wali sekaligus penguji3, serta Ibu Inna Kuswandari selaku penguji4
4. My beautiful grandma
   "I miss U so much"
   Dalam usia senja, semoga Allah selalu karuniakan kesehatan. Amin
5. My 'lil sis
   Dekap eratQ slalu
6. Dedd "thxs support dan semangatnya"
7. Achoiy, Nene, Imme
   Thxs buat hari-hari yang penuh dengan senyum ceria dan kebahagiaan
8. Temen2 angkatan 2002
   Lely (innallaha ma'ashshobirin), Dephi' (onengnya kurangin po'o!!), d'Cabi gals (Linda, Dhini, Icha, Putri), Mamad (Bpk sekjend), Wawan (seharusnya ga qSebut☺), adjo (yg smangat ngerjain skripsinya!), Algebra crew (Dyah, Fatus, Happy, Idham, Ni'mah), aslam, Abram, Fauzy, Yanto'ndut, Irka, Ita', Brian, Dewi, Ko2m, Anita (trskan p'juanganQ!), Rini (adjeng), Nora (chinong), Leny, Siska, Indra.
9. Temen2 UKM
   "it's cool 2b fighter, dud"
   Dewi, Firza, mba'Olan, mba'Memey, mba'rahmani, Lily, Mery, ilyas, Agung, mas taufik, Bpk pelatih
10. Temen2 KKN
11. Alman_ITS, thx pinjaman buku-bukunya.
12. mas2 dan mba'2 angkatan 2000-2001.
    Ade'2 angkatan 2003-2004
13. mas Edy, mas Milan, mas Udin
    Makasih atas bantuannya dan semoga Allah membalasnya.
14. Untuk semua saudara2ku, temen2ku dan semua pihak yang selalu membantuku dalam segala hal yang tidak dapat ku sebut satu per satu.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Puji syukur kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'alla dan sholawat serta salam kepada Nabi Muhammad Shollallohu 'Alaihi Wasallam atas limpahan rahmatNya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Skripsi dengan judul "**Syarat Perlu dan Cukup Graph Sebagai S-graph**" bukanlah suatu hal yang baru tapi penulis hanya mengkaji sebagian isi jurnal dari Peter Kys yang berjudul *graph with the same peripherial and center eccentric vertices*, kemudian menuliskan kembali dengan kata-kata sendiri dan melengkapkan bukti yang ada.

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si selaku pembimbing I dan Liliek Susilowati, S.Si, M.Si selaku pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan dan arahan dengan sabar kepada penulis hingga selesainya skripsi ini. Tak lupa, penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua tercinta, rekan-rekan mahasiswa Matematika FMIPA Unair dan pihak yang terkait yang telah memberikan motivasi kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan, untuk itu mohon kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga apa yang kita lakukan senantiasa dirahmati dan diridhoi Allah SWT, amien.

Surabaya, Juli 2006

Penulis

Dian Ariani, 2006. **Syarat perlu dan cukup graph sebagai S – graph.** Skripsi ini dibawah bimbingan Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si dan Liliek Susilowati, S.Si, M.Si.. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Airlangga.

ABSTRAK

Pada graph dikenal istilah $S-graph$ yaitu graph yang himpunan titik eksentris pusatnya sama dengan himpunan titik peripheralnya. Tetapi, untuk menentukan suatu graph yang mempunyai jumlah titik dan garis cukup besar, penentuan apakah graph tersebut $S-graph$ akan memerlukan waktu yang lama. Oleh karena itu, untuk mempermudah menentukan suatu graph merupakan $S-graph$ diperlukan syarat perlu dan cukup agar suatu graph merupakan $S-graph$.

Dengan menganalisa jari-jari, diameter, pusat, titik eksentris pusat dan titik sentral suatu graph, maka dapat ditentukan syarat perlu dan cukup agar graph tersebut merupakan $S-graph$.

Dari analisa diatas, diperoleh bahwa syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S-graph$ tergantung dari jari-jari, diameter dan himpunan titik sentral graph tersebut.

Kata Kunci : Jari-jari, Diameter, Pusat, Titik Eksentris Pusat, Titik Sentral, S – graph.

Dian Ariani, 2006. **The necessary and sufficient conditions for a graph is an $S-$graph**. This *skripsi* is under guidance of Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si and Liliek Susilowati, S.Si, M.Si.. Mathematics Department. Faculty of Mathematics and Natural Science. Airlangga University.

ABSTRACT

An $S-$graph is defined a graph which the sets of its center eccentric vertices are equal with the sets of its peripheral vertices. But, for determining a graph that have a lot of vertices and edges, it will spend many time. Therefore, for determining a graph is an $S-$graph easily, it is needed the necessary and sufficient conditions for a graph is an $S-$graph.

By analyzing the radius, diameter, center, center eccentric vertex, and central vertex of a graph, then we can determine whether a graph is an $S-$graph or not.

From the analysis above, the necessary and sufficient conditions for a graph is an $S-$graph are depend on radius, diameter and sets of its central vertex.

Keyword : Radius, Diameter, Center, Center Eccentric Vertex, Central Vertex, $S-$graph.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Eksentrisitas (*eccentricity*) titik $v \in V(G)$ yang dinotasikan dengan $e(v)$ pada graph G, adalah jarak dari titik v ke titik terjauh dari v. Titik u adalah titik eksentris dari titik v, jika jarak titik u ke v sama dengan eksentrisitas titik v.

Misalkan graph G dengan jari-jari $r(G)$ dan diameter $d(G)$. Titik v adalah titik sentral dari G, jika $e(v) = r(G)$. Pusat graph G, dinotasikan C(G), adalah himpunan semua titik sentral dari G. Titik u disebut titik eksentris pusat graph G, jika u adalah titik eksentris dari titik sentral graph G. Himpunan dari semua titik eksentris pusat dinotasikan $Cep(G)$. Titik v disebut titik peripheral, jika $e(v) = d(G)$. Himpunan dari semua titik peripheral graph G dinamakan *peripherian* G, dinotasikan $Peri(G)$. Graph terhubung nontrivial G dikatakan $S-graph$, jika $Cep(G) = Peri(G)$ **(Kys, 1998)**. Untuk graph yang mempunyai jumlah titik dan garis cukup besar, penentuan apakah graph tersebut $S-graph$ akan memerlukan waktu yang lama. Oleh karena itu, untuk mempermudah menentukan suatu graph merupakan $S-graph$ diperlukan syarat perlu dan cukup agar suatu graph merupakan $S-graph$.

Dari tulisan Kys diatas dalam jurnal yang berjudul *"graph with the same peripherial and center eccentric vertices"*, penulis tertarik untuk mengkaji ulang dan melengkapi bukti sebagian dari isi jurnal tersebut yang berkaitan dengan syarat perlu dan cukup agar suatu graph merupakan $S - graph$.

1.2. Rumusan Masalah

Apakah syarat perlu dan cukup agar suatu graph merupakan $S - graph$?

1.3. Tujuan

Menentukan syarat perlu dan cukup agar suatu graph merupakan $S - graph$.

1.4. Manfaat

Menjadi pengantar untuk meneliti lebih lanjut sifat-sifat suatu graph yang merupakan $S - graph$.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Graph

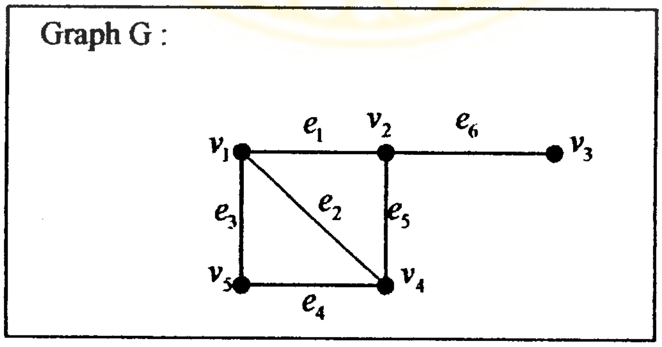
Definisi 2.1 Graph G adalah himpunan tak kosong dan berhingga *V(G)* yang anggotanya disebut titik dan himpunan *E(G)* yang anggotanya adalah himpunan bagian dari *V(G)* yang terdiri atas dua elemen yang berbeda, yang disebut garis.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

$\{v_i, v_j\} \in E(G)$ adalah garis yang menghubungkan titik v_i dan v_j. Untuk selanjutnya $\{v_i, v_j\}$ ditulis sebagai $v_i v_j$ atau e berindeks. Jika $v_i v_j \in E(G)$, maka v_i dikatakan *adjacent* dengan v_j dan $v_i v_j$ *incident* dengan titik v_i dan v_j. Jika $v_i v_j$, $v_j v_k \in E(G)$ maka $v_i v_j$ dan $v_j v_k$ adalah dua garis yang *adjacent*.

$|V(G)|$ adalah jumlah titik pada graph G.

$|E(G)|$ adalah jumlah garis pada graph G.

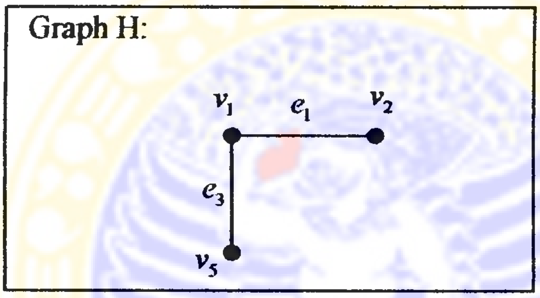


Gambar 2.1

Contoh 2.1 Pada gambar 2.1 diatas, graph G terdiri dari $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, e_1 *incident* dengan v_1, v_1 *adjacent* dengan v_2, e_1 *adjacent* dengan e_6, karena e_1 dan e_6 *incident* pada satu titik yang sama yaitu v_2.

Definisi 2.2. Graph H adalah *subgraph* dari graph G, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)



Gambar 2.2

Contoh 2.2 Pada gambar 2.2, graph H adalah *subgraph* dari graph G pada gambar 2.1.

Definisi 2.3. Misalkan $S \subseteq V(G)$, *induced subgraph* $\langle S \rangle$ adalah *subgraph* maksimal dari graph G dengan himpunan titik S.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Contoh 2.3 Pada gambar 2.2, Graph H adalah *induced subgraph* dari graph G pada gambar 2.1 dengan $S = \{v_1, v_2, v_5\}$.

Definisi 2.4. Perjalanan *(Walk)* dari graph G adalah rangkaian bergantian titik dan garis $(v_0, e_1, v_1, e_2 ..., v_n)$ yang dimulai dan diakhiri dengan titik, dan setiap garis *incident* dengan dua titik terdekat sebelum dan sesudahnya pada rangkaian tersebut.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Walk $(v_0, e_1, v_1, e_2 ..., v_n)$ biasanya ditulis dengan $(v_0, v_1, ..., v_n)$.

Walk dikatakan mempunyai panjang n, jika *walk* tersebut mempunyai n garis. *Walk* dengan panjang 0 disebut *walk* trivial.

Contoh 2.4 Untuk graph G pada gambar 2.1, $(v_2, e_6, v_4, e_2, v_1, e_1, v_2, e_5, v_3)$ adalah *walk* dari v_2 ke v_3, atau disingkat sebagai *walk* $(v_2, v_4, v_1, v_2, v_3)$.

Definisi 2.5. Lintasan *(path)* adalah sebuah perjalanan $(v_0, v_1, ..., v_n)$ dengan titik-titik yang berbeda.

Path dikatakan mempunyai panjang n, jika *path* tersebut mempunyai n garis.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Contoh 2.5 Untuk graph G pada gambar 2.1, (v_1, v_2, v_3) adalah *path* dari v_1 ke v_3 dengan panjang 2.

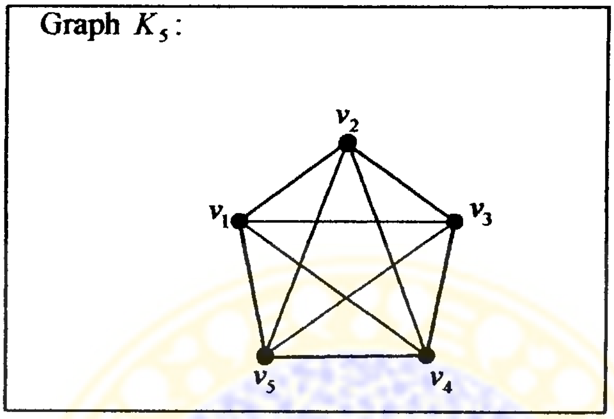
Definisi 2.6. Graph G dikatakan graph terhubung *(connected graph)*, jika untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j dari graph G dihubungkan dengan suatu *path*.

Jika tidak demikian, maka G dikatakan tidak terhubung.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Definisi 2.7. Graph lengkap *(complete graph)* K_p adalah graph dengan jumlah titik p, dan setiap dua titiknya *adjacent*.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)



Gambar 2.3

Contoh 2.6 Pada gambar 2.3 diatas, graph K_5 adalah graph lengkap dengan jumlah titik 5.

Definisi 2.8. Persekitaran *(neighborhood)* titik v, dinotasikan $N_G(v)$, didefinisikan $N_G(v) = \{u \in V(G), uv \in E(G)\}$.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

2.2. Eksentrisitas

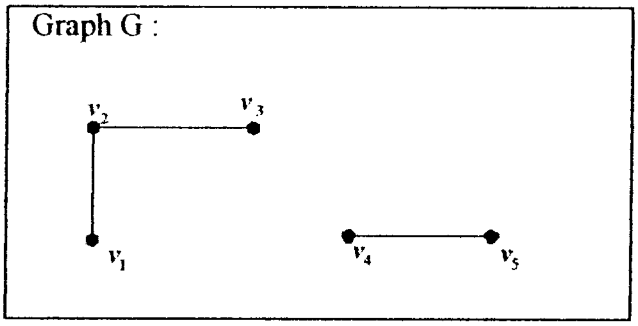
Definisi 2.9. Jarak (*distance*) dari titik u ke titik v pada graph G, dinotasikan $d(u,v)$ adalah panjang *path* terpendek dari u ke v.

Jika G tidak memuat *path* u-v, maka $d(u,v) = \infty$.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Untuk selanjutnya jarak dari titik u ke titik v pada graph G dinotasikan $d_G(u,v)$.

Contoh 2.7 Untuk graph G pada gambar 2.1 , $d(v_1, v_3) = 2$.



Gambar 2.4

Contoh 2.8 Graph G pada gambar 2.4 adalah graph tak terhubung. Graph G tidak memuat *path* dari v_1 ke v_4, sehingga d(v_1 , v_4) = ∞.

Definisi 2.10. Eksentrisitas (*eccentricity*) titik $v \in V(G)$ yang dinotasikan dengan $e(v)$ pada graph G adalah jarak dari titik v ke titik terjauh dari v.

$$e(v) = \max\{d(u,v), u \in V(G)\}$$

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Untuk selanjutnya eksentrisitas titik v pada graph G dinotasikan $e_G(v)$.

Contoh 2.9 Untuk graph G pada gambar 2.1, $e(v_1) = 2$, $e(v_2) = 2$, $e(v_3) = 3$, $e(v_4) = 2$, $e(v_5) = 3$.

Definisi 2.11. Titik u adalah titik eksentris dari titik v, jika $d(u,v) = e(v)$.

(Kys, 1998)

Contoh 2.10 Untuk graph G pada gambar 2.1, titik eksentris dari v_1 adalah v_3, titik eksentris dari v_2 adalah v_5, titik eksentris dari v_3 adalah v_5, titik eksentris dari v_4 adalah v_3, titik eksentris dari v_5 adalah v_3.

Definisi 2.12. Jari-jari *(radius)* dari graph terhubung G, dinotasikan $r(G)$, didefinisikan: $r(G) = \min\{e(v), v \in V(G)\}$.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Definisi 2.13. Diameter dari graph terhubung G, dinotasikan $d(G)$, didefinisikan: $d(G) = \max\{e(v), v \in V(G)\}$.

(Chartrand dan Ollermann, 1993)

Contoh 2.11 Untuk graph G pada gambar 2.1, $r(G) = 2$ dan $d(G) = 3$.

Definisi 2.14. Titik sentral graph G adalah titik pada graph G dengan eksentrisitas terkecil.

Himpunan semua titik sentral disebut pusat dari graph G, dinotasikan C(G).

(Kys, 1998)

Contoh 2.12 Pada gambar 2.1, titik sentral graph G adalah v_1, v_2, v_4, sehingga $C(G) = \{v_1, v_2, v_4\}$.

Definisi 2.15. Titik u disebut titik eksentris pusat graph G, jika u adalah titik eksentris dari titik sentral graph G.

Himpunan semua titik eksentris pusat, dinotasikan $Cep(G)$.

(Kys, 1998)

Contoh 2.13 Pada gambar 2.1, titik sentral graph G adalah v_1, v_2, v_4. Titik eksentris dari v_1 adalah v_3, titik eksentris dari v_2 adalah v_5, titik eksentris dari v_4 adalah v_3, sehingga $Cep(G) = \{v_3, v_5\}$.

Definisi 2.16. Titik v disebut titik peripheral, jika $e(v) = d(G)$.

Himpunan semua titik peripheral graph G dinamakan *peripherian* G, dinotasikan $Peri(G)$.

(Kys, 1998)

Contoh 2.14 Untuk graph G pada gambar 2.1, $d(G) = 3$, $e(v_3) = 3$, $e(v_5) = 3$, maka v_3, v_5 disebut titik peripheral, sehingga $Peri(G) = \{v_3, v_5\}$.

Definisi 2.17. Graph terhubung nontrivial G dikatakan $S - graph$, jika $Cep(G) = Peri(G)$.

(Kys, 1998)

Contoh 2.15 Untuk graph G pada gambar 2.1, $Cep(G) = \{v_3, v_5\}$ dan $Peri(G) = \{v_3, v_5\}$, maka $Cep(G) = Peri(G)$, atau dengan kata lain G merupakan $S - graph$.

BAB III

METODE PENULISAN

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan dalam skripsi adalah sebagai berikut :

1. Menyajikan definisi-definisi yang berkaitan dengan definisi graph dan eksentrisitasnya.
2. Menyajikan teorema-teorema yang berkaitan dengan syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S - graph$.
3. Mengkonstruksikan suatu graph yang berkaitan dengan teorema-teorema yang terkait dengan syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S - graph$.
4. Membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S - graph$.

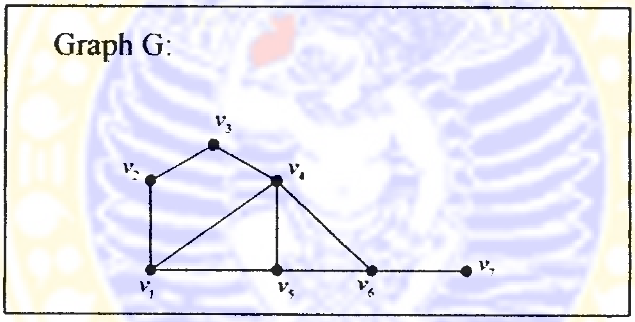
BAB IV

PEMBAHASAN

Graph G merupakan $S-graph$, jika $Cep(G)=Peri(G)$. *Peripherian* G, yang dinotasikan $Peri(G)$ adalah himpunan semua titik peripheral, sedangkan $Cep(G)$ adalah himpunan semua titik eksentris pusat.

Contoh 4.1

Dibawah ini diberikan contoh graph yang bukan $S-graph$.



Gambar 4.1

$e(v_1)=3$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2)=4$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_2

$e(v_3)=3$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_3

$e(v_4)=2$, dengan v_2 dan v_7 adalah titik eksentris v_4

$e(v_5)=2$, dengan v_2, v_3 dan v_7 adalah titik eksentris v_5

$e(v_6)=3$, dengan v_2 adalah titik eksentris v_6

$e(v_7)=4$, dengan v_2 adalah titik eksentris v_7

$r(G)=2$ dan $d(G)=4$.

Karena $e(v_4)=e(v_5)=r(G)$, maka v_4 dan v_5 adalah titik sentral graph G, sehingga $C(G)=\{v_4,v_5\}$.

Titik eksentris v_4 adalah v_2 dan v_7, sedangkan titik eksentris v_5 adalah v_3 dan v_7 maka v_2,v_3,v_7 adalah titik eksentris pusat graph G, sehingga $Cep(G)=\{v_2,v_3,v_7\}$.

Karena $e(v_2)=e(v_7)=d(G)$, maka v_2 dan v_7 adalah titik peripheral graph G, sehingga $Peri(G)=\{v_2,v_7\}$.

Karena ada elemen dari *Cep(G)* yang bukan elemen *Peri(G)*, maka $Cep(G)\neq Peri(G)$. Dengan kata lain, graph G bukan $S-graph$.

Selanjutnya akan dibuktikan syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S-graph$.

Teorema 4.1 Misalkan graph G dengan $r(G)=1$ dan $d(G)=2$.

Graph G adalah $S-graph$ jika hanya jika $|C(G)|=1$.

Bukti: Misalkan graph G dengan $r(G)=1$ dan $d(G)=2$. Misalkan $|C(G)|=1$ dan $C(G)=\{c\}$. Karena $r(G)=1$ dan $d(G)=2$, maka $e(c)=1$ dan untuk setiap $v_i\in V(G)-\{c\}$, $e(v_i)=2$. Karena $e(c)=r(G)=1$, maka jarak c ke setiap titik $v_i\in V(G)-\{c\}$ sama dengan 1, sehingga setiap $v_i\in V(G)-\{c\}$ merupakan titik eksentris dari titik c. Dengan kata lain, untuk setiap $v_i\in V(G)-\{c\}$, $v_i\in Cep(G)$, sehingga $V(G)-\{c\}\subseteq Cep(G)$. Diambil sebarang $v_j\in Cep(G)$.

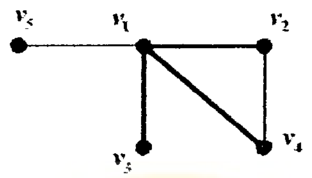
Karena $r(G)=1$ dan $C(G)=\{c\}$, maka untuk setiap titik eksentris pusat graph G adalah anggota $V(G)-\{c\}$, sehingga $v_j \in V(G)-\{c\}$. Oleh karena itu, $Cep(G)\subseteq V(G)-\{c\}$. Karena $V(G)-\{c\}\subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G)\subseteq V(G)-\{c\}$, maka $Cep(G)=V(G)-\{c\}$. Karena untuk setiap $v_i \in V(G)-\{c\}$, $e(v_i)=2=d(G)$, maka $v_i \in Peri(G)$, sehingga $V(G)-\{c\}\subseteq Peri(G)$. Diambil sebarang $v_k \in Peri(G)$, maka $e(v_k)=d(G)=2$. Karena $r(G)=1$ dan $C(G)=\{c\}$, maka $v_k \in V(G)-\{c\}$, sehingga $Peri(G)\subseteq V(G)-\{c\}$. Karena $V(G)-\{c\}\subseteq Peri(G)$ dan $Peri(G)\subseteq V(G)-\{c\}$, maka $Peri(G)=V(G)-\{c\}$. Karena $Peri(G)=Cep(G)=V(G)-\{c\}$, maka graph G adalah $S-graph$.

Sebaliknya, misalkan $|C(G)|\geq 2$. Tanpa mengurangi kelakuan umum, misalkan $|C(G)|=2$, yaitu x dan y, dengan $x \neq y$. Karena $r(G)=1$ maka $e(x)=e(y)=1$. Jika x adalah titik sentral graph G, maka jarak x ke setiap titik $v_j \in V(G)-\{x\}$ sama dengan 1. Oleh karena itu, untuk setiap $v_j \in V(G)-\{x\}$, maka $v_j \in Cep(G)$. Karena $y \in V(G)-\{x\}$, maka $y \in Cep(G)$. Karena $r(G)=1$ dan $d(G)=2$, maka $e(y)\neq d(G)$. Dengan kata lain, $y \notin Peri(G)$. Oleh karena itu, $Peri(G)\neq Cep(G)$. Dengan demikian, G bukan $S-graph$.

Contoh 4.2

Dibawah ini diberikan contoh graph dengan satu titik sentral, mempunyai jari-jari 1 dan diameter 2 yang merupakan $S-graph$.

Graph G_1:



Gambar 4.2

$e(v_1)=1$, dengan v_2, v_3, v_4, v_5 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2)=2$, dengan v_3 dan v_5 adalah titik eksentris v_2

$e(v_3)=2$, dengan v_2, v_4 dan v_5 adalah titik eksentris v_3

$e(v_4)=2$, dengan v_3, dan v_5 adalah titik eksentris v_4

$e(v_5)=2$, dengan v_2, v_3, dan v_4 adalah titik eksentris v_5

$r(G_1)=1$ dan $d(G_1)=2$.

Karena $e(v_1)=r(G_1)$, maka v_1 adalah titik sentral graph G_1, sehingga $C(G_1)=\{v_1\}$. Sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5 adalah titik eksentris pusat graph G_1, karena v_2, v_3, v_4, v_5 merupakan titik eksentris v_1, sehingga $Cep(G_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}=V(G_1)-\{v_1\}$.

Karena $e(v_2)=e(v_3)=e(v_4)=e(v_5)=d(G_1)$, maka v_2, v_3, v_4, v_5 adalah titik peripheral graph G_1, sehingga $Peri(G_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}=V(G_1)-\{v_1\}$.

Karena $Cep(G_1) = Peri(G_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\} = V(G) - \{v_1\}$, maka G_1 merupakan $S - graph$.

Akibat 4.2 Graph G dengan $r(G) = 1$ adalah $S - graph$ jika hanya jika G adalah graph lengkap K_p, $p \geq 2$ atau mempunyai satu titik sentral.

Bukti: Misalkan graph G dengan $r(G) = 1$ adalah $S - graph$, G bukan graph lengkap K_p, $p \geq 2$, maka akan dibuktikan G mempunyai satu titik sentral.

Misalkan graph G dengan $r(G) = 1$ adalah $S - graph$, maka $Cep(G) = Peri(G)$. Graph G bukan graph lengkap, sehingga $r(G) \neq d(G)$, $d(G) \geq 2$.

Kasus pertama, $d(G) = 2$, maka dengan teorema 4.1 diperoleh bahwa, G mempunyai 1 titik sentral. **Kasus kedua**, $d(G) > 2$. Andaikan G mempunyai titik sentral lebih dari satu, misalkan $x, y \in C(G)$, dengan $x \neq y$, maka $e(x) = e(y) = 1$. Jika x adalah titik sentral graph G, maka jarak x ke setiap titik $v_j \in V(G) - \{x\}$ sama dengan 1. Oleh karena itu, untuk setiap $v_j \in V(G) - \{x\}$, v_j merupakan titik eksentris x. Karena $y \in V(G) - \{x\}$, maka y titik eksentris x, sehingga $y \in Cep(G)$. Karena $e(y) = 1 \neq d(G)$, maka $y \notin Peri(G)$. Oleh karena itu, $Peri(G) \neq Cep(G)$. Hal itu bertentangan dengan graph G adalah $S - graph$, sehingga G mempunyai satu titik sentral.

Selanjutnya, misalkan graph G dengan $r(G)=1$ adalah $S-graph$, graph G mempunyai titik sentral lebih dari satu, maka akan dibuktikan G merupakan graph lengkap.

Tanpa mengurangi kelakuan umum, misalkan $|C(G)|=2$, yaitu x dan y, dengan $x \neq y$. Karena $r(G)=1$, maka $e(x)=e(y)=1$. Jika x adalah titik sentral graph G, maka untuk setiap $v_i \in V(G)-\{x\}$, $v_i \in Cep(G)$. Karena $y \in V(G)-\{x\}$, maka $y \in Cep(G)$. Jika y adalah titik sentral graph G, maka untuk setiap $v_j \in V(G)-\{y\}$, $v_j \in Cep(G)$. Karena $x \in V(G)-\{y\}$, maka $x \in Cep(G)$. Dengan kata lain, setiap anggota *V(G)* merupakan titik eksentris pusat, atau $V(G) \subseteq Cep(G)$. Diambil sebarang $w \in Cep(G)$. Sesuai dengan definisi titik eksentris pusat, maka $w \in V(G)$, sehingga $Cep(G) \subseteq V(G)$. Karena $V(G) \subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G) \subseteq V(G)$, maka $Cep(G)=V(G)$. Karena G merupakan $S-graph$, maka $Peri(G)=V(G)$. Karena $e(x)=e(y)=1$, maka untuk setiap $v \in V(G)$, $e(v)=1$, sehingga $r(G)=d(G)=1$. Dengan kata lain, untuk setiap dua titik yang berbeda mempunyai jarak sama dengan satu, sehingga graph G merupakan graph lengkap K_p, $p \geq 2$.

Sebaliknya, misalkan G adalah graph lengkap K_p, $p \geq 2$ dengan $r(G)=1$, maka akan dibuktikan G adalah $S-graph$.

Graph G adalah graph lengkap, maka jarak setiap dua titik yang berbeda pada G sama dengan 1. Sehingga untuk setiap $x \in V(G)$, $e(x)=r(G)=d(G)=1$.

Oleh karena itu, $Cep(G) = Peri(G) = V(G)$ atau dengan kata lain G adalah $S-graph$.

Selanjutnya, misalkan G mempunyai satu titik sentral. Misalkan $C(G) = \{c\}$. Karena $r(G) = 1$, maka $e(c) = 1$, sehingga jarak c ke setiap titik $v_i \in V(G) - \{c\}$ sama dengan 1. Oleh karena itu, untuk setiap $v_i \in V(G) - \{c\}$ merupakan titik eksentris c. Dengan kata lain, untuk setiap $v_i \in V(G) - \{c\}$ adalah titik eksentris pusat graph G, atau $V(G) - \{c\} \subseteq Cep(G)$. Diambil sebarang $v_j \in Cep(G)$. Karena $r(G) = 1$ dan $C(G) = \{c\}$, maka untuk setiap titik eksentris pusat graph G adalah anggota $V(G) - \{c\}$, sehingga $v_j \in V(G) - \{c\}$. Oleh karena itu, $Cep(G) \subseteq V(G) - \{c\}$. Karena $V(G) - \{c\} \subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G) \subseteq V(G) - \{c\}$, maka $Cep(G) = V(G) - \{c\}$.

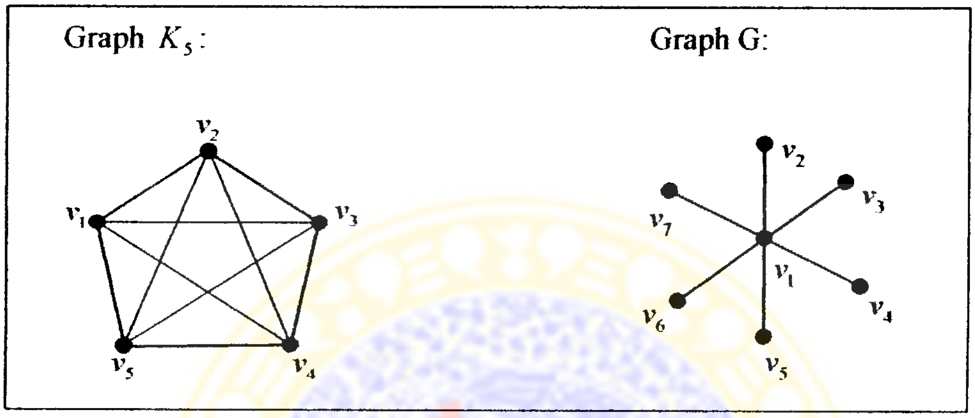
Untuk $d(G) = 1$, maka G adalah graph lengkap, sehingga graph G adalah $S-graph$.

Untuk $d(G) = 2$, dengan teorema 4.1, diperoleh bahwa graph G adalah $S-graph$.

Untuk $d(G) = k, k > 2$. Karena $r(G) = 1$, maka untuk setiap $v_i, v_j \in V(G) - C(G)$, dengan $c \in C(G)$, dan $v_i, v_j \in N_G(c)$, sehingga $d(v_i, v_j) \leq 2$. Hal tersebut bertentangan dengan $d(G) = k, k > 2$, sehingga graph G tidak mungkin.

Contoh 4.3

Dibawah ini diberikan contoh graph berjari-jari satu yang merupakan $S-graph$ adalah graph yang mempunyai satu titik sentral dan jika mempunyai titik sentral lebih dari satu merupakan graph lengkap.



Gambar 4.3

Pada graph K_5. Sesuai definisi graph lengkap, bahwa setiap dua titik yang berbeda *adjacent*, maka $e(v_1)=e(v_2)=e(v_3)=e(v_4)=e(v_5)=1$. Oleh karena itu, $r(K_5)=d(K_5)=1$.

Karena $e(v_1)=e(v_2)=e(v_3)=e(v_4)=e(v_5)=r(K_5)$, maka v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 adalah titik sentral K_5, sehingga $C(K_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$.

Karena v_2,v_3,v_4,v_5 adalah titik eksentris v_1, dan v_1,v_3,v_4,v_5 adalah titik eksentris v_2, dan seterusnya, maka v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 adalah titik eksentris pusat K_5, sehingga $Cep(K_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}=V(K_5)$.

Karena $e(v_1)=e(v_2)=e(v_3)=e(v_4)=e(v_5)=d(K_5)$, maka v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 adalah titik peripheral K_5, sehingga $Peri(K_5)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}=V(K_5)$. Karena $Cep(K_5)=Peri(K_5)=V(K_5)$, maka K_5 merupakan $S-graph$.

Sedangkan graph G pada gambar 4.3. $e(v_1)=1$, dengan v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2)=2$, dengan v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 adalah titik eksentris v_2

$e(v_3)=2$, dengan v_2, v_4, v_5, v_6, v_7 adalah titik eksentris v_3

$e(v_4)=2$, dengan v_2, v_3, v_5, v_6, v_7 adalah titik eksentris v_4

$e(v_5)=2$, dengan v_2, v_3, v_4, v_6, v_7 adalah titik eksentris v_5

$e(v_6)=2$, dengan v_2, v_3, v_4, v_5, v_7 adalah titik eksentris v_6

$e(v_7)=2$, dengan v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 adalah titik eksentris v_7

$r(G)=1$ dan $d(G)=2$.

Karena $e(v_1)=r(G)$, maka v_1 adalah titik sentral graph G, sehingga $C(G)=\{v_1\}$. Sedangkan v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 adalah titik eksentris pusat graph G, karena v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 merupakan titik eksentris v_1, sehingga $Cep(G)=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}=V(G)-\{v_1\}$.

Karena $e(v_2)=e(v_3)=e(v_4)=e(v_5)=e(v_6)=e(v_7)=d(G)$, maka v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 adalah titik peripheral graph G, sehingga $Peri(G)=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}=V(G)-\{v_1\}$.

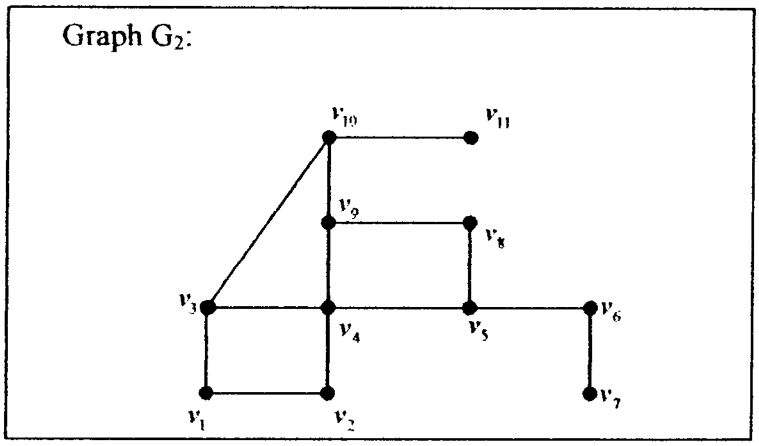
Karena $Cep(G)=Peri(G)=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}=V(G)-\{v_1\}$, maka G merupakan $S-graph$.

Teorema 4.3 Misalkan G adalah $S-graph$, jika $r(G)\neq d(G)$, $d(G)\geq 3$ dan $|C(G)|=1$ maka $r(G)<d(G)-1$.

Bukti: Misalkan G adalah $S-graph$ dengan $r(G)\neq d(G)$, $d(G)\geq 3$ dan $|C(G)|=1$. Misalkan $C(G)=\{c\}$. Andaikan $r(G)\geq d(G)-1$. Untuk $r(G)>d(G)-1$. Karena $r(G)\neq d(G)$ dan sesuai dengan definisi jari-jari dan diameter, maka graph G tidak mungkin. Untuk $r(G)=d(G)-1$. Karena titik sentral graph G hanya c, maka untuk setiap $t\in N_G(c)$, $e(t)>r(G)=e(c)$ dan $e(t)\leq d(G)$. Karena $r(G)=d(G)-1$, maka $d(G)=r(G)+1$, sehingga $e(t)\leq r(G)+1$. Karena $e(t)>r(G)$ dan $e(t)\leq d(G)$, dengan $d(G)=r(G)+1$, maka $e(t)=d(G)$, sehingga $t\in Peri(G)$. Karena graph G adalah $S-graph$, maka $Peri(G)=Cep(G)$, sehingga $t\in Cep(G)$. Karena $t\in Cep(G)$, maka t adalah titik eksentris pusat graph G atau t adalah titik eksentris c, sehingga $d(t,c)=r(G)$. Karena $r(G)=d(G)-1$ dan $d(G)\geq 3$, maka $d(t,c)\geq 2$. Hal tersebut kontradiksi dengan $t\in N_G(c)$, sehingga $d(t,c)=1$. Dengan demikian, $r(G)<d(G)-1$.

Contoh 4.4

Dibawah ini diberikan contoh graph yang jari-jarinya tidak sama dengan diameternya, dengan diameter paling sedikit 3 dan mempunyai satu titik sentral yang merupakan $S-graph$ sehingga diameternya lebih besar satu dari jari-jarinya.



Gambar 4.4

$e(v_1) = 5$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2) = 4$, dengan v_{11} adalah titik eksentris v_2

$e(v_3) = 4$, dengan v_7 dan v_{11} adalah titik eksentris v_3

$e(v_4) = 3$, dengan v_7 dan v_{11} adalah titik eksentris v_4

$e(v_5) = 4$, dengan v_{11} adalah titik eksentris v_5

$e(v_6) = 5$, dengan v_{11} adalah titik eksentris v_6

$e(v_7) = 6$, dengan v_{11} adalah titik eksentris v_7

$e(v_8) = 4$, dengan v_1 adalah titik eksentris v_8

$e(v_9) = 4$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_9

$e(v_{10}) = 5$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_{10}

$e(v_{11}) = 6$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_{11}

$r(G_2) = 3$ dan $d(G_2) = 6$, maka $d(G_2) > r(G_2) + 1$.

Karena $e(v_4) = r(G_2)$, maka v_4 adalah titik sentral graph G_2, sehingga $C(G_2) = \{v_4\}$. Sedangkan v_7 dan v_{11} adalah titik eksentris pusat graph G_2, karena v_7 dan v_{11} merupakan titik eksentris v_1, sehingga $Cep(G_2) = \{v_7, v_{11}\}$.

Karena $e(v_7) = e(v_{11}) = d(G_2)$, maka v_7 dan v_{11} adalah titik peripheral graph G_2, sehingga $Peri(G_2) = \{v_7, v_{11}\}$.

Karena $Cep(G_2) = Peri(G_2) = \{v_7, v_{11}\}$, maka G_2 merupakan $S - graph$.

Lemma 4.4 Misalkan graph G adalah $S - graph$. Jika $r(G) \geq 2$ dan $r(G) \neq d(G)$, maka jarak dari sebarang dua titik dari $C(G)$ pada G kurang dari $r(G)$ dan $d(\langle V(G) - C(G)\rangle) \geq d(G)$.

Bukti: Misalkan graph G adalah $S - graph$, $r(G) \geq 2$ dan $r(G) \neq d(G)$. Misalkan $r(G) = k, k \geq 2$. Misalkan $x, y \in C(G)$, maka $e(x) = e(y) = k$. Jika x adalah titik sentral graph G, maka setiap $v_i \in V(G) - \{x\}$, $d(x, v_i) \leq k$. Karena $y \in V(G) - \{x\}$, maka $d(x, y) \leq k$. Untuk $d(x, y) = k$, maka $y \in Cep(G)$. Karena G adalah $S - graph$, maka $Peri(G) = Cep(G)$. Dengan kata lain, $y \in Peri(G)$, sehingga $e(y) = d(G)$. Sedangkan y adalah titik sentral graph G, sehingga $e(y) = r(G)$. Karena $r(G) \neq d(G)$, maka $d(x, y) = k$ tidak berlaku. Dengan demikian, $d(x, y) < k$, dengan $r(G) = k, k \geq 2$ atau jarak dari sebarang dua titik dari $C(G)$ kurang dari $r(G)$.

Selanjutnya, untuk setiap $v \in V(G) - C(G)$, maka terdapat dua kasus. **Kasus pertama**, jika $e(v)$ didapat dari panjang path yang tidak melalui titik sentral, maka $e_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(v)=e_G(v)$. **Kasus kedua**, jika $e(v)$ didapat dari panjang *path* yang melalui titik sentral. Hal tersebut terdapat dua kemungkinan. Kemungkinan pertama, misalkan terdapat *path* *u-v* yang tidak melalui titik sentral, dengan $d(u,v)=e(v)$, maka $e_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(v)=e_G(v)$. Kemungkinan kedua, $e(v)$ hanya didapat dari panjang *path* yang melalui titik sentral saja. Misalkan u merupakan titik eksentris *v*, dengan $u\in V(G)-C(G)$. Maksimum panjang *path* terpendek $u-v$ pada graph G lebih kecil dari maksimum panjang *path* terpendek pada graph $\langle V(G)-C(G)\rangle$, atau $d_G(u,v)<d_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(u,v)$, sehingga $e_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(v)>e_G(v)$. Karena untuk setiap $v\in V(G)-C(G)$ dengan $e_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(v)=e_G(v)$ dan $e_{\langle V(G)-C(G)\rangle}(v)>e_G(v)$, maka $d(\langle V(G)-C(G)\rangle)\geq d(G)$.

Teorema 4.5 Misalkan G adalah graph dengan $d(G)=r(G)+1$ dan $r(G)\geq 2$.

Graph G adalah $S-graph$ jika hanya jika sebarang titik dari $V(G)-C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G.

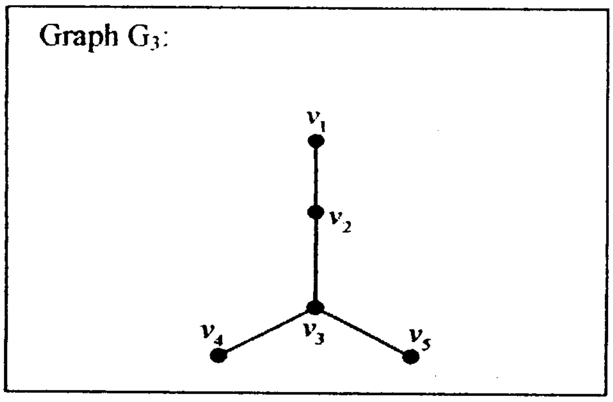
Bukti: Misalkan G adalah $S-graph$ dengan $d(G)=r(G)+1$ dan $r(G)\geq 2$. Diambil sebarang $v_i\in V(G)-C(G)$. Karena $d(G)=r(G)+1$, maka $e(v_i)=d(G)$, sehingga $v_i\in Peri(G)$. Oleh karena itu, $V(G)-C(G)\subseteq Peri(G)$. Diambil sebarang $v_j\in Peri(G)$, maka $e(v_j)=d(G)$. Karena $d(G)=r(G)+1$, maka $v_j\in V(G)-C(G)$, sehingga $Peri(G)\subseteq V(G)-C(G)$. Karena $V(G)-C(G)\subseteq Peri(G)$ dan $Peri(G)\subseteq V(G)-C(G)$, maka $Peri(G)=V(G)-C(G)$. Karena graph G adalah $S-graph$, maka

$Cep(G) = V(G) - C(G)$. Dengan kata lain, sebarang titik dari $V(G) - C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G.

Sebaliknya, misalkan sebarang titik dari $V(G) - C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G, maka untuk setiap $v_i \in V(G) - C(G)$, $v_i \in Cep(G)$. Dengan kata lain, $V(G) - C(G) \subseteq Cep(G)$. Diambil sebarang $v_j \in Cep(G)$, maka $r(G) < e(v_j) \leq d(G)$. Karena $d(G) = r(G) + 1$, maka $v_j \in V(G) - C(G)$, sehingga $Cep(G) \subseteq V(G) - C(G)$. Karena $V(G) - C(G) \subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G) \subseteq V(G) - C(G)$, maka $Cep(G) = V(G) - C(G)$. Karena $d(G) = r(G) + 1$, maka $Peri(G) = V(G) - C(G)$. Karena $Cep(G) = Peri(G) = V(G) - C(G)$, maka graph G adalah $S - graph$.

Contoh 4.5

Dibawah ini diberikan contoh graph dengan jari-jari paling sedikit 2 dan diameter lebih besar satu dari jari-jarinya, mempunyai titik sentral lebih dari 1 merupakan $S - graph$, sehingga sebarang titik selain titik sentral merupakan titik eksentris pusat.



Gambar 4.5

$e(v_1) = 3$, dengan v_4 dan v_5 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2) = 2$, dengan v_4 dan v_5 adalah titik eksentris v_2

$e(v_3) = 2$, dengan v_1 adalah titik eksentris v_3

$e(v_4) = 3$, dengan v_1 adalah titik eksentris v_4

$e(v_5) = 3$, dengan v_1 adalah titik eksentris v_5

$r(G_3) = 2$ dan $d(G_3) = 3$.

Karena $e(v_2) = e(v_3) = r(G_3)$, maka v_2 dan v_3 adalah titik sentral graph G_3, sehingga $C(G_3) = \{v_2, v_3\}$. Sedangkan v_1, v_4 dan v_5 adalah titik eksentris pusat graph G_3, karena v_4 dan v_5 merupakan titik eksentris v_2, sedangkan v_1 adalah titik eksentris v_3, sehingga $Cep(G_3) = \{v_1, v_3, v_4\} = V(G_3) - C(G_3)$. Dengan kata lain, sebarang titik dari $V(G_3) - C(G_3)$ merupakan titik eksentris pusat graph G_3. Karena $d(G_3) = r(G_3) + 1$, maka sebarang titik dari $V(G_3) - C(G_3)$ mempunyai eksentrisitas sama dengan diameternya, sehingga v_1, v_4 dan v_5 adalah titik peripheral graph G_3, atau $Peri(G_3) = \{v_1, v_4, v_5\}$.

Karena $Cep(G_3) = Peri(G_3) = \{v_1, v_4, v_5\}$, maka G_3 merupakan $S - graph$.

Akibat 4.6 Misalkan graph G dengan $d(G)=3$ dan $r(G)=2$.

Graph G adalah $S-graph$ jika hanya jika tidak ada titik dari $V(G)-C(G)$ yang terhubung dengan semua titik sentral graph G.

Bukti: Misalkan G adalah $S-graph$ dengan $d(G)=3$ dan $r(G)=2$. Andaikan ada $v_i \in V(G)-C(G)$ yang terhubung dengan semua titik sentral graph G, sehingga untuk setiap $x \in C(G)$, $d(x,v_i)=1$. Karena $r(G)=2$ dan $d(G)=r(G)+1$, maka dengan teorema 4.5 diperoleh bahwa sebarang titik dari $V(G)-C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G. Oleh karena itu, ada $x \in C(G)$, sehingga $d(x,v_i)=2$. Kontradiksi dengan $d(x,v_i)=1$, sehingga tidak ada titik dari $V(G)-C(G)$ yang terhubung dengan semua titik sentral graph G.

Sebaliknya, misalkan tidak ada titik dari $V(G)-C(G)$ yang terhubung dengan semua titik sentral graph G. Tanpa mengurangi kelakuan umum, misalkan $|C(G)|=2$, yaitu x dan y, dengan $x \neq y$. Karena $r(G)=2$, maka $e(x)=e(y)=2$. Diambil sebarang $v_j \in V(G)-C(G)$, dengan $v_j \in N_G(x)$ dan $v_k \in V(G)-C(G)$, dengan $v_k \in N_G(y)$. Jika x adalah titik sentral graph G, maka $d(x,v) \leq 2$, untuk setiap $v \in V(G)-\{x\}$. Karena $v_j \in N_G(x)$, maka $d(x,v_j)=1$. Karena $r(G)=2$, maka $d(x,v_k)=2$, sehingga $v_k \in Cep(G)$. Jika y adalah titik sentral graph G, maka $d(y,u) \leq 2$, untuk setiap $u \in V(G)-\{y\}$. Karena $v_k \in N_G(y)$, maka $d(y,v_k)=1$. Karena $r(G)=2$, maka $d(y,v_j)=2$ sehingga $v_j \in Cep(G)$. Karena $v_j,v_k \in V(G)-C(G)$ dan $v_j,v_k \in Cep(G)$, maka $V(G)-C(G) \subseteq Cep(G)$.

Diambil sebarang $w \in Cep(G)$. Karena $d(G) = 3 = r(G) + 1$ dan $r(G) = 2$, maka setiap titik eksentris pusat graph G merupakan anggota $V(G) - C(G)$, atau $w \in V(G) - C(G)$, sehingga $Cep(G) \subseteq V(G) - C(G)$. Karena $V(G) - C(G) \subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G) \subseteq V(G) - C(G)$, maka $Cep(G) = V(G) - C(G)$. Dengan kata lain, sebarang titik dari $V(G) - C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G. Sesuai dengan teorema 4.5, diperoleh bahwa graph G adalah $S - graph$.

Teorema 4.7 Misalkan G adalah graph dengan diameter 4 dan jari-jari 2. Misalkan $Q = \langle V(G) - C(G) \rangle$, dengan $C(G)$ adalah pusat graph G. Graph G adalah $S - graph$ jika hanya jika

1) $\langle C(G) \rangle$ adalah graph lengkap, dan
2) kardinalitas dari himpunan $T = \{x \in V(Q); N_G(x) \cap C(G) = \phi\}$ paling sedikit dua, dan untuk setiap titik $x \in T$ paling sedikit terdapat $y \in V(Q)$ dengan $d_Q(x, y) \geq 4$ yang menjadi anggota T.

Bukti: Misalkan G adalah $S - graph$ dengan diameter 4 dan jari-jari 2. Diambil sebarang $x, y \in C(G)$, dari lemma 4.4 diperoleh bahwa $d(x, y) < r(G)$. Karena $r(G) = 2$ dan G graph terhubung, maka $d(x, y) = 1$. Oleh karena itu, $\langle C(G) \rangle$ adalah graph lengkap.

Selanjutnya, misalkan $Q = \langle V(G) - C(G) \rangle$, maka dari lemma 4.4 diperoleh bahwa $d(Q) \geq d(G)$, sehingga $d(Q) \geq 4$. Misalkan himpunan

$T = \{x \in V(Q); N_G(x) \cap C(G) = \phi\}$. Misalkan $c \in C(G)$. Karena $r(G) = 2$, maka ada $v_i \in V(Q)$, sehingga $d(c, v_i) = 2$. Karena $r(G) = 2$ dan $d(G) = 4$, maka ada $v_j \in V(Q)$, dengan $d(v_i, v_j) = 4$. Oleh karena itu, $e(v_i) = e(v_j) = 4$, sehingga $v_i, v_j \in Peri(G)$. Karena $r(G) = 2$ dan $d(G) = 4$, maka setiap anggota *Peri(G)* tidak *adjacent* dengan titik sentral. Dengan kata lain, $Peri(G) \subseteq T$. Karena G adalah $S - graph$, maka $Peri(G) = Cep(G)$, sehingga $Cep(G) \subseteq T$. Andaikan $|Cep(G)| = 1$. Misalkan $x \in Cep(G)$, maka $d(x, c) = 2$. Karena $r(G) = 2$, maka $e(c) = 2$ dengan titik eksentris hanya x. Oleh karena itu, ada $y \in V(Q)$ dengan $d(y, c) = 1$. Hal itu kontradiksi dengan $d(G) = 4$. Jadi, $|Cep(G)| \geq 2$. Karena $Cep(G) \subseteq T$, maka $|T| \geq 2$.

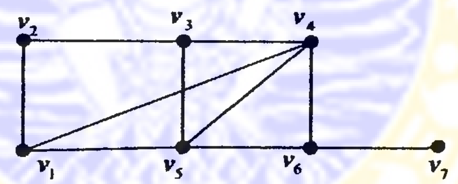
Diambil sebarang $v_i \in T$, maka $d(c, v_i) \geq 2$. Karena $r(G) = 2$, maka $d(c, v_i) = 2$, sehingga $v_i \in Cep(G)$, maka $T \subseteq Cep(G)$. Karena graph G adalah $S - graph$, maka $T \subseteq Peri(G)$. Karena $Peri(G) \subseteq T$ dan $T \subseteq Peri(G)$, maka $Peri(G) = T$. Diambil sebarang $x \in T$. Andaikan tidak ada titik $y \in V(Q)$ dengan $d_Q(x, y) \geq 4$ yang menjadi anggota T, maka $e_G(x) \leq 3$, sehingga $x \notin Peri(G)$. Hal tersebut bertentangan dengan $Peri(G) = T$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in T$ paling sedikit terdapat $y \in V(Q)$ dengan $d_Q(x, y) \geq 4$ yang menjadi anggota T.

Sebaliknya, misalkan 1) dan 2) dipenuhi. Misalkan $c \in C(G)$. Karena $r(G) = 2$, maka $d(c, v_i) \leq 2$, dengan $v_i \in V(G) - C(G)$. Jika $d(c, v_i) = 1$, maka $c \in N_G(v_i) \cap C(G)$, sehingga $v_i \notin T$. Jika $d(c, v_i) = 2$, maka $N_G(v_i) \cap C(G) = \phi$, sehingga $v_i \in T$. Untuk setiap $v_i \in T$, dengan $d(c,v_i) = 2 = r(G)$, maka $v_i \in Cep(G)$, sehingga $T \subseteq Cep(G)$. Karena $r(G) = 2$, maka ada $v_i \in V(G) - C(G)$ dengan $d(c,v_i) = 2$, sehingga $v_i \in Cep(G)$ dan v_i tidak *adjacent* dengan $c \in C(G)$ atau dengan kata lain, $v_i \in T$. Dengan demikian, $Cep(G) \subseteq T$. Karena $T \subseteq Cep(G)$ dan $Cep(G) \subseteq T$, maka $Cep(G) = T$. Karena $Peri(G) = T$ dan $Cep(G) = T$, maka $Cep(G) = Peri(G) = T$, sehingga G adalah $S-graph$.

Contoh 4.6

Dibawah ini diberikan contoh graph dengan titik sentral tidak sama dengan satu, mempunyai jari-jari 2 dan diameter 4 yang merupakan $S-graph$.

Graph G_4:



Gambar 4.6

$e(v_1) = 3$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_1

$e(v_2) = 4$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_2

$e(v_3) = 3$, dengan v_7 adalah titik eksentris v_3

$e(v_4) = 2$, dengan v_2 dan v_7 adalah titik eksentris v_4

$e(v_5) = 2$, dengan v_2 dan v_7 adalah titik eksentris v_5

$e(v_6) = 3$, dengan v_2 adalah titik eksentris v_6

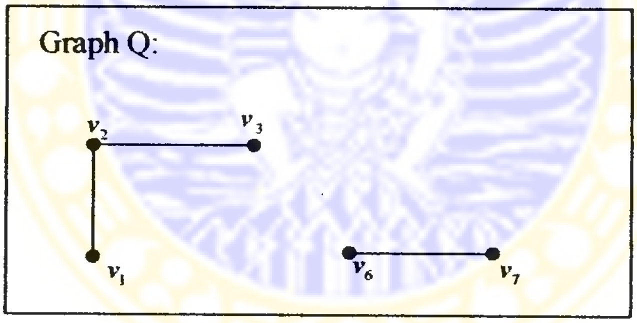
$e(v_7) = 4$, dengan v_2 adalah titik eksentris v_7.

$r(G_4) = 2$ dan $d(G_4) = 4$.

Karena $e(v_4) = e(v_5) = r(G_4)$, maka v_4 dan v_5 adalah titik sentral graph G_4, sehingga $C(G_4) = \{v_4, v_5\}$. Sedangkan v_2 dan v_7 adalah titik eksentris pusat graph G_4, karena v_2 dan v_7 merupakan titik eksentris v_4 maupun v_5, sehingga $Cep(G_4) = \{v_2, v_7\}$. Karena $e(v_2) = e(v_7) = d(G_4)$, maka v_2 dan v_7 adalah titik peripheral graph G_4, sehingga $Peri(G_4) = \{v_2, v_7\}$.

Karena $Cep(G_4) = Peri(G_4) = \{v_2, v_7\}$, maka G_4 merupakan $S - graph$.

Misalkan $Q = \langle V(G_4) - C(G_4) \rangle$



Gambar 4.7

Misalkan himpunan $T = \{x \in V(Q), N_{G_4}(x) \cap C(G_4) = \phi\}$.

$V(G_4) - C(G_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7\}$, dengan $C(G_4) = \{v_4, v_5\}$, maka:

Untuk v_1, $N_{G_4}(v_1) \cap C(G_4) = \{v_2, v_4, v_5\} \cap \{v_4, v_5\} = \{v_4, v_5\}$.

Untuk v_2, $N_{G_4}(v_2) \cap C(G_4) = \{v_1, v_3\} \cap \{v_4, v_5\} = \phi$.

Untuk v_3, $N_{G_4}(v_3) \cap C(G_4) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\} \cap \{v_4, v_5\} = \{v_4, v_5\}$.

Untuk v_6, $N_{G_4}(v_6) \cap C(G_4) = \{v_2, v_4, v_5, v_7\} \cap \{v_4, v_5\} = \{v_4, v_5\}$.

Untuk v_7, $N_{G_4}(v_7) \cap C(G_4) = \{v_6\} \cap \{v_4, v_5\} = \phi$.

Sesuai dengan definisi T diatas, maka $T = \{v_2, v_7\}$. Graph G_4 pada gambar 2.6 diatas, $e(v_2) = e(v_7) = d(G_4)$, maka v_2 dan v_7 adalah titik peripheral graph G_4, sehingga $Peri(G_4) = \{v_2, v_7\}$. Karena $T = \{v_2, v_7\}$ dan $Peri(G_4) = \{v_2, v_7\}$, maka $Peri(G_4) = T$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu graph merupakan $S-graph$ adalah sebagai berikut :

1. Graph G dengan $r(G)=1$ dan $d(G)=2$ adalah $S-graph$ jika hanya jika $|C(G)|=1$.
2. Graph G dengan $r(G)=1$ adalah $S-graph$ jika hanya jika G adalah graph lengkap K_p, $p\geq 2$ atau mempunyai satu titik sentral.
3. Graph G adalah $S-graph$, jika $r(G)\neq d(G)$, $d(G)\geq 3$ dan $|C(G)|=1$ maka $r(G)<d(G)-1$.
4. Misalkan G adalah $S-graph$. Jika $r(G)\geq 2$ dan $r(G)\neq d(G)$, maka jarak dari sebarang dua titik dari $C(G)$ pada G kurang dari $r(G)$ dan $d(\langle V(G)-C(G)\rangle)\geq d(G)$.
5. Graph G dengan $d(G)=r(G)+1$ dan $r(G)\geq 2$ adalah $S-graph$ jika hanya jika sebarang titik dari $V(G)-C(G)$ adalah titik eksentris pusat graph G.
6. Graph G dengan $d(G)=3$ dan $r(G)=2$ adalah $S-graph$ jika hanya jika tidak ada titik dari $V(G)-C(G)$ yang terhubung dengan semua titik sentral graph G.

7. Graph G dengan diameter 4 dan jari-jari 2. Misalkan $Q = \langle V(G) - C(G) \rangle$, dengan $C(G)$ adalah pusat graph G. G adalah $S - graph$ jika hanya jika
   1) $\langle C(G) \rangle$ adalah graph lengkap, dan
   2) Kardinalitas dari himpunan $T = \{x \in V(Q); N_G(x) \cap C(G) = \phi\}$ paling sedikit dua, dan untuk setiap titik $x \in T$ paling sedikit terdapat $y \in V(Q)$ dengan $d_Q(x, y) \geq 4$ yang menjadi anggota T.

5.2 Saran

Skripsi ini dapat dikembangkan untuk meneliti lebih lanjut yang terkait dengan :

1. Penentuan sifat-sifat suatu graph yang merupakan $S - graph$.
2. Penyusunan algoritma dan program komputer untuk mempermudah menentukan graph dengan jumlah titik cukup besar merupakan $S - graph$.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G. and Oellermann, O. R. ,1993, *Applied and Algorithmic Graph Theory* ., Mc.graw-Hill Inc, Canada.

Kys, P. ,1998, *Graph with the same peripheral and center eccentric vertices.*, http://www.emis.de/journals/MB/125.3/mb125-3-6.pdf, 9 Mei 2006.