JORDAN MATRIX

AKAR KE-m DARI MATRIKS KOMPLEKS NON SINGULAR

SKRIPSI

INTANG FEBRIARDHANI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA
2005

AKAR KE-m DARI MATRIKS KOMPLEKS NON SINGULAR

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika Pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Airlangga

Oleh :

INTANG FEBRIARDHANI
NIM. 080012170

Tanggal Lulus : 24 Agustus 2005

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Inna Kuswandari, M.Si.	**Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si.**
NIP. 131 933 022	**NIP. 131 933 017**

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : **Akar Ke-m dari Matriks Kompleks Non Singular**

Penyusun : **Intang Febriardhani**

NIM : **080012170**

Tanggal Ujian : **24 Agustus 2005**

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Inna Kuswandari, M.Si.	**Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si.**
NIP. 131 933 022	**NIP. 131 933 017**

Mengetahui :

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Airlangga

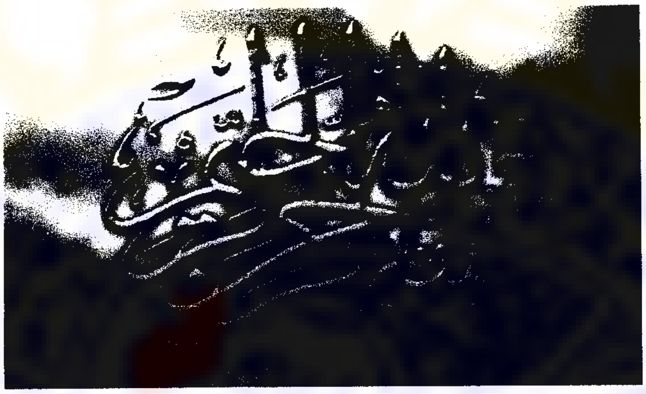
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS AIRLANGGA JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si.
NIP. 131 801 397

Kupersembahkan Skripsi Ini Untuk

Bapak dan Ibuku Tercinta

serta Kakak dan Adikku Tersayang



"Ya Allah ! Sesungguhnya aku memohon yang terbaik dari-Mu melalui ilmu-Mu, maka sampaikanlah shalawat atas Rasulullah Muhammad dan keluarganya, serta tetapkanlah untukku sesuatu yang terbaik, inspirasikanlah kami pengetahuan untuk memilih yang terbaik, dan jadikanlah hal itu sebagai sarana untuk meraih ridha terhadap apa yang telah Engkau tetapkan bagi kami, dan sebagai ketundukan terhadap apa yang telah Engkau putuskan."

(Imam Ali bin Husain Zainal Abidin, Ash Shahifah al Kamilah as Sajjadiyah)

"Kapan pun engkau memutuskan untuk melakukan sesuatu, maka mohonkanlah yang terbaik dari Allah."

(Imam Ali bin Abi Thalib)

"Menuntut ilmu adalah wajib bagi setiap muslim dan muslimah."

(Al - Hadits)

"Tuntutlah ilmu, karena jika anda kaya maka ilmu itu memperkaya anda dan jika anda miskin maka ilmu itu memelihara anda."

(Ali bin Abi Thalib ra.)

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

PRAKATA

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala karunia dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Akar Ke-m dari Matriks Kompleks Non Singular".**

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar kesarjanaan strata 1 pada Fakultas MIPA Universitas Airlangga.

Materi dalam skripsi ini bukanlah sesuatu yang baru, tetapi penulis hanya mengkaji jurnal yang ditulis oleh Psarrakos, P.J. yang berjudul On The m-th Roots of A Complex Matrix kemudian menuliskan kembali dengan kata-kata sendiri dengan melengkapi bukti-bukti yang ada.

Dalam kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada Dra. Inna Kuswandari, M.Si. dan Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si, selaku dosen pembimbing yang senantiasa penuh kesabaran dan ketulusan dalam memberikan bimbingan kepada penulis, serta Ir. Elly Anna, M.Si. selaku dosen wali yang telah mendidik dan menasehati penulis, juga kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan motivasi, sehingga terselesaikannya skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari masih banyak kekurangan yang tentunya tidak disengaja. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun dari semua pihak sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan skripsi ini. Semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, khususnya para pembaca.

Surabaya, Agustus 2005

Penyusun

الحمد لله رب العالمين

Alhamdulillah wa syukurillah bersyukur padamu ya Allah. Dengan rahmat, hidayah dan pertolongan-Nya aku dapat menyelesaikan penyusunan skripsi meskipun sebelumnya banyak kendala, rintangan dan cobaan yang kuhadapi. Dalam menghadapinya aku mendapat bantuan baik spiritual maupun material. Oleh karena itu aku mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

- ♥ *Bapak dan ibu tercinta atas segala kasih sayang, perhatian, pengorbanan, motivasi, nasehat serta do'anya; Mbak Yuli, Mas Aang dan Dik Vivi thanks yach atas segala do'a dan bantuannya, akhirnya aku lulus juga he he he ...*
- ♥ *Dik Candra dan Dik Ica jangan nakal-nakal ayo belajar biar pintar; Mbah Ti'ah, Tante Min, Om Panjul dan keluarga di Kandangan thanks atas bantuan dan do'anya.*
- ♥ *Dra. Inna Kuswandari, M.Si. dan Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si., atas kesabaran dan ketulusan ibu dalam membimbing dan memberikan arahan kepadaku hingga lulus dalam detik-detik terakhir (pembayaran SPP). Tanpa bimbingan ibu saya tak akan bisa menyelesaikan skripsi ini. Saya juga minta maaf jika selama ini saya sering berbuat salah.*

- *Nenik Estuningsih, S.Si., M.Si., dan Liliek Susilowati, S.Si., M.Si. terima kasih ya Bu udah meluangkan waktunya untuk menguji saya, tanpa penguji saya tak akan bisa lulus.*
- *Ir. Elly Anna, M.Si. selaku dosen wali yang selalu memberikan nasehat maupun dukungan dan dosen MIPA khususnya jurusan Matematika yang telah mendidik dan memberi ilmu tak bisa kubalas dengan apapun thanks.*
- *Mas Edi, Mas Budi, Mas Milan, Mbak Wuri, Mbak Yuli, Bu Ninik trims atas segala bantuannya dan telah memberi kelancaran serta kemudahan dalam pengurusan surat-surat maupun administrasi.*
- *Teman-temanku Math'00, Khususnya kakak-kakakku D² log Nbε (mbak Dennik, mbak Elok and mbak Nanik) yang telah memberikan semangat, motivasi, do'a serta nasehat yang banyak dan tak bisa kubalas dengan apapun thanks yach; Tim RG (Indah, Emon, Abraham) yang telah membantu, ayo rek jangan patah semangat and ayo wisuda bareng; Amey, Andri dan Cahyo (jangan lama-lama), Abi and Agung (jangan kuliah terus, ayo skripsi), Christin, Dina (thanks transparansinya), Dita, Eko, Henny, Ipeh, Indi, Indri, Inna, Kamel, Kholifah (thanks atas bukunya), Laily, Lina, Mia, Mila, Mita, Naniek, Nita, Pea, Rizky, Rudy (thanks atas dukungan n motivasinya), Titian,*

Vidi, Wiwin (thanks telah memfotocopikan form proposal; Yuli Palu (thanks atas motivasi n maaf gak bisa wisuda bareng), Yuli R (thanks atas bantuan menemukan rumus, tapi sayang rumusnya tidak digunakan), Kumala, Mirza, Arief n Abraham (ayo wisuda bareng); Trims yach teman atas segala bantuan, dukungan, motivasi dan do'anya. Semoga persahabatan n kekompakan kita tetap terjalin dan utuh.

- ♥ *Dadan, Erie, Ika, Oki dan Sigit (jangan lupa yach ama kita Math'00).*
- ♥ *Untuk kakak-kakakku angkatan 1999, khususnya Mbak Fitri, Mbak Sulis, Mbak Isa (thanks atas bantuan dan do'anya); Mbak Herlina (thanks atas segala bantuan, dukungan, motivasi n do'anya; ayo cepetan lulus n jangan mikir yang menyedihkan ntar aku nangis lho).*
- ♥ *Untuk adik-adikku angkatan 2001, 2002, 2003 ayo jangan malas-malasan belajar biar cepat lulus, manfaatkan waktu luang, and thanks atas do'anya.*
- ♥ *Temen-temenku KKN thanks yach atas segala bantuan, do'a dan motivasinya. Semoga persahabatan kita tetap terjalin indah n Kapan kita ke Benowo, Pakal lagi ?*
- ♥ *Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi dan tak dapat kusebut satu persatu, makacih ya ...*

Intang Febriardhani, 2005. Akar Ke-m dari Matriks Kompleks Non Singular. Skripsi ini dibawah bimbingan Dra. Inna Kuswandari, M.Si. dan Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Airlangga

ABSTRAK

Tujuan dari skripsi ini adalah menentukan akar ke-m (namakan B) dari matriks kompleks non singular A. B dikatakan akar ke-m dari A jika dan hanya jika $B^m = A$. Melalui polinomial matriks $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$, dapat ditunjukkan bahwa rantai Jordan dari A bersesuaian dengan rantai Jordan dari $P(\lambda)$. Dari pembahasan dapat diperoleh akar ke-m dari A, yaitu B berbentuk $B = Y_A J_{P(\lambda)} Y_A^{-1}$ dengan Y_A rantai Jordan dari $P(\lambda)$ dan $J_{P(\lambda)}$ merupakan matriks Jordan dari $P(\lambda)$.

Kata kunci : Matriks kompleks, polinomial matriks, matriks Jordan.

Intang Febriardhani, 2005. The m-th Roots of a Nonsingular Complex Matrix. This script is under supervised of Dra. Inna Kuswandari, M.Si. and Dra. Yayuk Wahyuni, M.Si. Departement Mathematics Faculty of Mathematics and Natural Science Airlangga University.

ABSTRACT

This script is purposed to find the m-th roots of a nonsingular complex matrix A. B is said to be m-th roots of A if and only if $B^m = A$. By define a matrix polynomial $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$, we can construct m-th roots of A of the form $B = Y_A J_{P(\lambda)} Y_A^{-1}$ where Y_A is Jordan chain of $P(\lambda)$, and $J_{P(\lambda)}$ is Jordan matrix of $P(\lambda)$.

Key words : Complex matrix, matrix polynomial, Jordan matrix.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Misalkan M_n adalah aljabar dari semua matriks berukuran n x n dengan elemen bilangan kompleks, dan misalkan $A \in M_n$. Untuk bilangan bulat m > 1, matriks $B \in M_n$ disebut akar ke-m dari matriks A jika $B^m = A$.

Jika A matriks non singular, maka A selalu mempunyai akar ke-m, namakan B. Akar ini tidak tunggal, dan struktur Jordannya berhubungan dengan struktur Jordan matriks A. Karena A selalu mempunyai nilai eigen tak nol, maka terdapat matriks yang similar dengan matriks A, namakan matriks Jordan J_A, sehingga $A = X_A J_A X_A^{-1}$.

Pandang polinomial matriks $P(\lambda) = I_n \lambda^m - A$, dengan I_n menyatakan matriks identitas berukuran n x n, dan λ adalah variabel kompleks. Matriks $B \in M_n$ adalah akar ke-m dari matriks A jika dan hanya jika $P(B) = B^m - A = 0$, atau $B^m = A$. Karena $P(\lambda)$ selalu mempunyai nilai eigen tak nol, maka terdapat matriks yang similar dengan $P(\lambda)$, namakan matriks Jordan $J_{P(\lambda)}$. Oleh karena itu matriks Jordan J_A dan $J_{P(\lambda)}$ similar. Dengan demikian rantai Jordan dari $P(\lambda)$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari A.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk menentukan akar ke-m dari matriks kompleks non singular.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana bentuk akar ke-m dari matriks kompleks non singular ?

1.3 Tujuan

Menentukan akar ke-m dari matriks kompleks non singular.

1.4 Manfaat

Menambah wawasan tentang akar ke-m dari matriks kompleks non singular.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai dasar-dasar teori yang akan digunakan untuk mempermudah dalam memahami skripsi.

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1. Ruang vektor V atas lapangan F adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya dinamakan vektor dan elemen lapangannya disebut skalar, dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi sifat sebagai berikut:

1. Untuk setiap $u, v, w \in V$, berlaku
   a. $u + v \in V$
   b. $(u + v) + w = u + (v + w)$
   c. terdapat $0 \in V$ sehingga $u + 0 = u$
   d. Untuk setiap $u \in V$ terdapat $-u \in V$ sehingga $u + (-u) = 0$
   e. $u + v = v + u$
2. Untuk setiap $u, v \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$, berlaku
   a. $\alpha u \in V$
   b. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
   c. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
   d. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
   e. $1 \cdot u = u$

(Jacob, 1990)

Definisi 2.2. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan S himpunan bagian dari V. Himpunan S dikatakan **ruang bagian** *(subspace)* dari V jika S juga merupakan ruang vektor atas lapangan F.

(Jacob, 1990)

Teorema 2.3. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan S himpunan bagian dari V. Himpunan S merupakan ruang bagian dari V jika dan hanya jika untuk setiap $u, v \in S$ dan $\alpha \in F$ berlaku $u + v \in S$ dan $\alpha u \in S$.

(Jacob, 1990)

Definisi 2.4. Misalkan S dan T masing-masing ruang bagian dari V. **Jumlahan dari ruang bagian** S dan T, ditulis S + T, didefinisikan sebagai

$$S + T = \{s + t;\ s \in S \text{ dan } t \in T\}.$$

(Jacob, 1990)

Teorema 2.5. Jika S dan T masing-masing ruang bagian dari V, maka S + T dan $S \cap T$ juga merupakan ruang bagian dari V.

(Jacob, 1990)

Definisi 2.6. Misalkan S dan T masing-masing ruang bagian dari V. Himpunan V dikatakan **hasil tambah langsung** *(direct sum)* dari S dan T, ditulis $V = S \oplus T$, jika $S + T = V$ dan $S \cap T = \{0\}$.

(Cullen, 1966)

Definisi 2.7. Misalkan V ruang vektor atas F. Himpunan V dikatakan **aljabar** atas F jika terhadap perkalian bersifat asosiatif yang memenuhi

$$u(\alpha v) = \alpha(uv) \quad \forall u, v \in V,\ \forall \alpha \in F.$$

(Cullen, 1966)

Contoh 2.8.

Misalkan $M_n(\mathbb{C})$ adalah himpunan semua matriks berukuran n x n yang elemen-elemennya bilangan kompleks. Himpunan $M_n(\mathbb{C})$ merupakan aljabar atas lapangan $\mathbb{C}$.

Definisi 2.9. Misalkan V adalah ruang vektor atas F dan $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ himpunan bagian dari V. **Kombinasi linear** *(linear combination)* dari S adalah jumlahan berhingga yang berbentuk $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ dengan $\alpha_i \in F$ dan $v_i \in S$, i = 1, 2, ..., n.

(Jacob, 1990)

Definisi 2.10. Himpunan semua kombinasi linear dari S disebut **ruang bagian yang dibangun oleh** S dan dinotasikan [S].

(Jacob, 1990)

Definisi 2.11. Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dikatakan **bebas linear** *(linearly independent)* jika kombinasi linear $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ mengakibatkan $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(Jacob, 1990)

Definisi 2.12. Himpunan vektor-vektor $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dikatakan **tak bebas linear** *(linearly dependent)* atau bergantung linear jika terdapat skalar $\alpha_i \neq 0$, i = 1, 2, ..., n, sehingga $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.

(Jacob, 1990)

Teorema 2.13. Misalkan $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ himpunan vektor-vektor bebas linear. Jika $w_i \in [\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}]$ dengan i = 1, 2, ..., n, maka $w_1, w_2, \cdots, w_n$ juga bebas linear.

Definisi 2.14. Misalkan V dan W masing-masing ruang vektor atas lapangan F. Suatu **pemetaan linear** *(linear transformation)* dari V ke W adalah fungsi yang memenuhi

(i) Jika $u, v \in V$ maka $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(ii) Jika $v \in V$ dan $\alpha \in F$ maka $T(\alpha\, v) = \alpha\, T(v)$

Jika V = W, maka pemetaan linear $T : V \rightarrow V$ disebut operator linear pada V.

(Jacob, 1990)

Definisi 2.15. Operator T disebut **nilpoten indeks p** jika memenuhi

(i) $(\forall\, v \in V)\ T^p(v) = 0$

(ii) $(\exists\, w \in V)\ T^{p-1}(w) \neq 0$

(Cullen, 1966)

2.2 Matriks

Definisi 2.16. Matriks persegi A dikatakan **non singular** jika determinannya tidak sama dengan 0 dan dinotasikan dengan $|A| \neq 0$.

(Anton, 1988)

Teorema 2.17. Jika A dan B adalah matriks persegi yang berukuran sama, maka $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(Anton, 1988)

Akibat 2.18. Jika A dan B adalah matriks non singular, maka $A \cdot B$ juga matriks non singular.

(Anton, 1988)

Definisi 2.19. Matriks B disebut **akar ke-m** dari matriks A jika $B^m = A$ dengan m bilangan bulat lebih besar 1.

(Gantmacher, 1959)

Definisi 2.20. Misalkan A matriks berukuran m x n atas lapangan F. $\mathrm{Row}_i(A)$ menyatakan baris ke-i dari A dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan disebut *vektor baris* dari A yang berukuran 1 x n. Himpunan semua kombinasi linear dari vektor baris A disebut **ruang baris** dari A dan dinotasikan dengan

$$RS(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \, \mathrm{Row}_i(A) : x_1, x_2, \cdots, x_m \in F \right\}.$$

(Brown, 1991)

Definisi 2.21. Misalkan A matriks berukuran m x n atas lapangan F. $\mathrm{Col}_j(A)$ menyatakan kolom ke-j dari A dengan j = 1, 2, …, n dan disebut *vektor kolom* dari A yang berukuran m x 1. Himpunan semua kombinasi linear dari vektor kolom A disebut **ruang kolom** dari A dan dinotasikan dengan

$$CS(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j \, \mathrm{Col}_j(A) : x_1, x_2, \cdots, x_n \in F \right\}.$$

(Brown, 1991)

Definisi 2.22. Misalkan A dan B masing-masing adalah matriks berukuran nxn. Jika terdapat matriks invertibel P, sehingga $B = PAP^{-1}$, maka dikatakan A dan B **similar**.

(Jacob, 1990)

Teorema 2.23. Jika matriks A dan B similar, maka polinomial karakteristik matriks A sama dengan polinomial karakteristik matriks B.

(Gantmacher, 1959)

Selanjutnya matriks yang dibicarakan disini terdefinisi atas lapangan bilangan kompleks.

Definisi 2.24. Jika A adalah matriks berukuran nxn, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{C}^n$ dinamakan **vektor eigen** *(eigenvector)* dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan **nilai eigen** *(eigenvalue)* dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

(Anton, 1988)

Definisi 2.25. Himpunan semua nilai eigen dari matriks A, dinotasikan $\sigma(A)$, didefinisikan sebagai $\sigma(A) = \sigma(I_n \lambda - A) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \det(I_n \lambda - A) = 0\}$ dinamakan **spektrum** dari matriks A.

(Psarrakos, 2002)

Definisi 2.16. Misalkan T pemetaan linear. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r$ merupakan nilai eigen yang berlainan dan s_i merupakan **multiplisitas** dari λ_i dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, r$, maka polinomial karakteristik dari T adalah $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r}$.

(Cullen, 1966)

Definisi 2.27. Misalkan $A_1, A_2, \cdots, A_s$ merupakan matriks persegi yang masing-masing berukuran $m_1 \times m_1$, $m_2 \times m_2$, $\cdots$, $m_s \times m_s$. Perluasan

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = \text{diag}\,(A_1, A_2, \cdots, A_s)$$ dari matriks diagonal

disebut **jumlahan langsung** dari A_i dinotasikan dengan

$$\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s.$$

(Ayres, 1985)

Contoh 2.28.

Misalkan $A_1 = (2)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Jumlahan langsung dari $A_1, A_2,$ dan A_3 adalah

$$\text{diag}\,(A_1, A_2, A_3) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definisi 2.29. Matriks **blok Jordan** dari A didefinisikan sebagai matriks segitiga atas yang berukuran n x n berbentuk

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$$

dengan λ_0 adalah nilai eigen dari matriks A.

Selanjutnya matriks

$$J_A = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

disebut **matriks Jordan** dari matriks A, dengan J_0, J_1, $\cdots$, J_k adalah blok Jordan yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_k, dengan k menyatakan banyaknya nilai eigen yang berbeda.

Adapun cara lain menyatakan matriks Jordan adalah sebagai berikut. Misalkan matriks A mempunyai ξ nilai eigen yang berbeda, yaitu $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\xi$ berturut-turut sebanyak $k_1, k_2, \cdots, k_\xi$.

Didefinisikan suatu matriks persegi N_{k_j} yang berukuran k_j x k_j sebagai

$$N_{k_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriks N_{k_j} mempunyai elemen 1 sebanyak k_j - 1 pada superdiagonal dan elemen lainnya nol.

Untuk setiap ω_j, $j = 1, 2, \cdots, \xi$ matriks blok Jordan dari A berbentuk

$$J_{k_j}(\omega_j) = I_{k_j}\omega_j + N_{k_j} = \begin{pmatrix} \omega_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_j \end{pmatrix}.$$

Dalam matriks blok Jordan terdapat angka 1 sebanyak j - 1 pada superdiagonal dan ω_j sebanyak j kali pada diagonal utama, sedangkan elemen yang lain nol.

Matriks Jordan merupakan hasil tambah langsung dari matriks blok Jordan yang berbentuk

$$J_A = \bigoplus_{j=1}^{\xi}\left(I_{k_j}\omega_j + N_{k_j}\right) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\omega_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\omega_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\omega_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{k_\xi}(\omega_\xi) \end{pmatrix}$$

dengan $k_1 + k_2 + \cdots + k_\xi = n$.

(Gohberg, 1982)

Contoh 2.30.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Matriks A non singular karena $|A| = 120 \neq 0$.

Matriks A mempunyai 4 nilai eigen yang berbeda, yaitu 1, 4, 5 dan 6. Jadi $\omega_1 = 1$,

$\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 4$, $\omega_4 = 6$ dengan $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. Karena semua nilai eigen dari matriks A berbeda, maka matriks persegi N_{k_j} berukuran 1 x 1 dengan j = 1, 2, 3, 4, sehingga $N_{k_1} = N_{k_2} = N_{k_3} = N_{k_4} = (0)$. Selanjutnya matriks blok Jordan dari A adalah

$$J_{k_1}(\omega_1) = I_{k_1}\omega_1 + N_{k_1} = (1),$$

$$J_{k_2}(\omega_2) = I_{k_2}\omega_2 + N_{k_2} = (4),$$

$$J_{k_3}(\omega_3) = I_{k_3}\omega_3 + N_{k_3} = (5),$$

$$J_{k_4}(\omega_4) = I_{k_4}\omega_4 + N_{k_4} = (6).$$

Matriks Jordan merupakan hasil tambah langsung dari matriks blok Jordan yang berbentuk

$$J_A = \bigoplus_{j=1}^{4}\left(I_{k_j}\omega_j + N_{k_j}\right) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\omega_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\omega_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{k_4}(\omega_4) \end{pmatrix}$$

Jadi matriks Jordan dari A adalah

$$J_A = \bigoplus_{j=1}^{4}\left(I_{k_j}\omega_j + N_{k_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definisi 2.31. Himpunan semua nilai eigen dari matriks Jordan dari A, dinotasikan $\sigma_J(A)$, didefinisikan sebagai

$$\sigma_J(A) = \{\omega_1 = r_1 e^{i\Phi_1},\ \omega_2 = r_2 e^{i\Phi_2},\ \cdots,\ \omega_\xi = r_\xi e^{i\Phi_\xi}\}$$

dinamakan **J-spektrum**.

(Psarrakos, 2002)

2.3 Polinomial Matriks

Definisi 2.32. Polinomial matriks berderajat t dalam variabel x didefinisikan sebagai $f(x) = \sum_{i=0}^{t} A_i x^i$ dengan $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_t$ matriks kompleks yang berukuran n x n dan $A_t \neq 0$ (matriks nol). Jika $A_t = I$, maka f(x) dikatakan monik.

(Gantmacher, 1959)

Definisi 2.33. Polinomial matriks $f(x) = \sum_{i=0}^{t} A_i x^i$ dikatakan **regular** jika $|A_0| \neq 0$.

(Gantmacher, 1959)

Untuk mencari nilai eigen dari $P(\lambda)$, terlebih dahulu $P(\lambda)$ harus diubah ke dalam bentuk matriks polinomial. Pandang $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$ yang merupakan polinomial matriks dalam variabel λ. Secara umum suatu polinomial matriks $P(\lambda)$ dapat disajikan ke dalam bentuk matriks polinomial. Oleh karena itu nilai eigen dari $P(\lambda)$ dapat dicari.

Definisi 2.34. Himpunan semua nilai eigen dari $P(\lambda)$, dinotasikan $\sigma(P)$, didefinisikan sebagai $\sigma(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det P(\mu) = 0\}$ dinamakan **spektrum** dari $P(\lambda)$.

(Psarrakos, 2002)

Definisi 2.35. Suatu himpunan vektor $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ yang memenuhi persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
P(\omega_0)\,x_0 &= 0 \\
P(\omega_0)\,x_1 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)\,x_0 &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
P(\omega_0)x_k + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)\,x_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k!}P^{(k)}(\omega_0)\,x_0 &= 0
\end{aligned}
$$

dengan $P^{(i)} = \dfrac{d^iP(\lambda)}{d\lambda^i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, disebut **rantai Jordan** dari $P(\lambda)$ dengan panjang $k + 1$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\omega_0 \in \mathbb{C}$ dan vektor eigen $x_0 \in \mathbb{C}^n$ dari $P(\lambda)$.

(Psarrakos, 2002)

Vektor-vektor $x_0, x_1, \cdots, x_k$ pada rantai Jordan dapat dijabarkan sebagai berikut. Persamaan pertama dari rantai Jordan adalah

$$
\begin{aligned}
& P(\omega_0)x_0 = 0 \\
& (I_n\omega_0 - A)x_0 = 0 \quad \text{atau} \\
& (A - I_n\omega_0)x_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Persamaan kedua dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_1 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, sehingga

$$
\begin{aligned}
& (I_n\omega_0 - A)x_1 + \frac{1}{1!}1\,x_0 = 0 \\
& (I_n\omega_0 - A)x_1 = -x_0 \quad \text{atau} \\
& (A - I_n\omega_0)x_1 = x_0 \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Persamaan ketiga dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_2 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_1 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, dan $P^{(2)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_2 + \frac{1}{1!}1\ x_1 + \frac{1}{2!}0\ x_0 = 0$$

$(I_n\omega_0 - A)x_2 = -x_1$ atau

$$(A - I_n\omega_0)x_2 = x_1 \qquad (2.2)$$

Persamaan keempat dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_3 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_2 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_1 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, $P^{(2)}(\omega_0) = 0$, dan $P^{(3)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_3 + \frac{1}{1!}1\ x_2 + \frac{1}{2!}0\ x_1 + \frac{1}{3!}0\ x_0 = 0$$

$(I_n\omega_0 - A)x_3 = -x_2$ atau

$$(A - I_n\omega_0)x_3 = x_2 \qquad (2.3)$$

Demikian seterusnya, untuk persamaan ke-k dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_k + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_{k-1} + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_{k-2} + \cdots + \frac{1}{k!}P^{(k)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka

$P^{(1)}(\omega_0) = 1$, $P^{(2)}(\omega_0) = P^{(3)}(\omega_0) = \cdots = P^{(k)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_k + \frac{1}{1!}1\ x_{k-1} + \frac{1}{2!}0\ x_{k-2} + \cdots + \frac{1}{k!}0\ x_0 = 0$$

$(I_n\omega_0 - A)x_k = -x_{k-1}$ atau

$$(A - I_n\omega_0)x_k = x_{k-1} \qquad (2.4)$$

Dari (2.1), (2.2), (2.3), dan (2.4), maka diperoleh $(A - I_n\omega_0)x_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

Contoh 2.36.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Dipilih $m = 3$, sehingga $P(\lambda) = I_4\lambda^3 - A = \begin{pmatrix} \lambda^3 - 4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda^3 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & \lambda^3 - 7 \end{pmatrix}$.

Diperoleh nilai eigen dari $P(\lambda)$ adalah $1^{\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, dan $6^{\frac{1}{3}}$.

Menurut Definisi 2.35., maka $P(\omega_0)\, x_0 = 0$, sehingga

$$P(\omega_0) = \begin{pmatrix} \omega_0^3 - 4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & \omega_0^3 - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^3 - 3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & \omega_0^3 - 7 \end{pmatrix}.$$

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 1^{\frac{1}{3}}$, maka

$$P(\omega_0)x_0 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $1^{\frac{1}{3}}$ adalah

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & -3 \end{pmatrix}^t$.

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 4^{\frac{1}{3}}$, maka

$$P(\omega_0)x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $4^{\frac{1}{3}}$ adalah $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$.

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 5^{\frac{1}{3}}$, maka

$$P(\omega_0)x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $5^{\frac{1}{3}}$ adalah $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}^t$.

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 6^{\frac{1}{3}}$, maka

$$P(\omega_0)x_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sehingga } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $6^{\frac{1}{3}}$ adalah $[-7 \quad 1 \quad -4 \quad -4]^t$.

Jadi rantai Jordan dari $P(\lambda)$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}. \square$$

Teorema 2.37. Misalkan $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ rantai Jordan dari matriks A, maka himpunan vektor $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ bebas linear.

(Gantmacher, 1959)

Bukti : Misalkan A matriks non singular berukuran n x n yang mempunyai nilai eigen, namakan ω_0. Akan ditunjukkan kombinasi linear

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \tag{2.5}$$

mengakibatkan $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Jika persamaan (2.5) dikalikan dengan $(A - I_n \omega_0)$, maka diperoleh

$$\alpha_0(A - I_n\omega_0)x_0 + \alpha_1(A - I_n\omega_0)x_1 + \alpha_2(A - I_n\omega_0)x_2 + \cdots + \alpha_k(A - I_n\omega_0)x_k = 0 \tag{2.6}$$

Karena $(A - I_n\omega_0)x_0 = 0$, $(A - I_n\omega_0)x_1 = x_0$, $(A - I_n\omega_0)x_2 = x_1$, dan $(A - I_n\omega_0)x_k = x_{k-1}$, maka persamaan (2.6) menjadi

$$\alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \cdots + \alpha_k x_{k-1} = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dikalikan dengan $(A - I_n\omega_0)$, maka diperoleh

$$\alpha_1(A - I_n\omega_0)x_0 + \alpha_2(A - I_n\omega_0)x_1 + \alpha_3(A - I_n\omega_0)x_2 + \cdots + \alpha_k(A - I_n\omega_0)x_{k-1} = 0 \tag{2.8}$$

$$\alpha_2 x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 + \cdots + \alpha_k x_{k-2} = 0 \qquad (2.9)$$

Demikian seterusnya, sehingga

$$\alpha_{k-1} x_0 + \alpha_k x_1 = 0 \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dikalikan dengan $(A - I_n\omega_0)$, maka diperoleh

$$\alpha_{k-1}(A - I_n\omega_0)x_0 + \alpha_k(A - I_n\omega_0)x_1 = 0 \qquad (2.11)$$

Karena $(A - I_n\omega_0)x_0 = 0$ dan $(A - I_n\omega_0)x_1 = x_0$, maka persamaan (2.11) menjadi $\alpha_k x_0 = 0$ (2.12)

Karena $x_0 \neq 0$, maka $\alpha_k = 0$. Dengan mensubstitusikan $\alpha_k = 0$ ke persamaan (2.11), maka diperoleh $\alpha_{k-1} = 0$. Demikian seterusnya, sehingga diperoleh $\alpha_{k-2} = \alpha_{k-3} = \cdots = \alpha_0 = 0$. Dengan demikian $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Jadi himpunan vektor $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ pada rantai Jordan bebas linear. □

Definisi 2.38. Polinomial matriks N(x) dikatakan **pembagi kanan** dari M(x) jika M(x) = Q(x)N(x) + R(x), dengan derajat N(x) lebih kecil dari derajat M(x). Selanjutnya Q(x) dan R(x) masing-masing disebut hasil bagi dan sisa pembagian.

(Gantmacher, 1959)

Teorema 2.39. Misalkan $P(\lambda)$ dan $B(\lambda)$ polinomial matriks regular. Jika setiap rantai Jordan dari $P(\lambda)$ merupakan rantai Jordan dari $B(\lambda)$ yang bersesuaian dengan nilai eigen sama, maka $B(\lambda)$ merupakan pembagi kanan dari $P(\lambda)$.

(Gohberg, 1982)

Teorema 2.40. Polinomial $P(\lambda)$ dapat dibagi dari kanan dengan $I_n\lambda$ - B tanpa sisa pembagian jika dan hanya jika P(B) = 0.

(Gantmacher, 1959)

2.4 Bilangan Kompleks

Definisi 2.41. Suatu **bilangan kompleks** merupakan bilangan yang berbentuk x + iy dengan x dan y bilangan real dan i bilangan imajiner dengan sifat $i^2 = -1$. Jika z = x + iy, maka x dinamakan bagian real dari z dan y dinamakan bagian imajiner dari z, dan berturut-turut dinyatakan dengan Re{z} dan Im{z}.

(Murray, 1994)

Definisi 2.42. Modulus bilangan kompleks z = x + i y, dinotasikan oleh |z|, didefinisikan sebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(Anton, 1988)

Definisi 2.43. Jika P(x, y) adalah suatu titik di bidang kompleks yang bersesuaian dengan bilangan kompleks x + iy, maka x dan y dapat ditulis sebagai

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ merupakan modulus dari x + iy, dan θ = arc tan (y/x), $0 \le \theta \le 2\pi$ (radian) disebut **argumen** dari x + iy, dinotasikan arg P. Selanjutnya $r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ dinamakan **bentuk kutub** dari x + iy.

(Murray, 1994)

Contoh 2.44.

Misalkan P(2, 2 $\sqrt{3}$).

Akan ditunjukkan bentuk kutub dari P(2, 2 $\sqrt{3}$).

Modulus dari P(2, 2 $\sqrt{3}$) adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ dan

θ = arg P = arc tan (y/x) = arc tan (2 $\sqrt{3}$ /2) = arc tan ($\sqrt{3}$) = 60° = π /3 (radian).

Dengan demikian $x = r \cos \theta = 4 \cos (\pi/3)$ dan

$y = r \sin \theta = 4 \sin (\pi/3)$,

sehingga bentuk kutub dari $2 + 2\sqrt{3}\,i$ dapat ditulis sebagai

$$2 + 2\sqrt{3}\,i = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$= 4(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 4e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Jadi bentuk kutub dari P(2, 2 $\sqrt{3}$) adalah $4(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Definisi 2.45. Suatu bilangan w dinamakan **akar ke-m** dari bilangan kompleks z jika $w^m = z$, biasanya ditulis $w = z^{\frac{1}{m}}$. Jika $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, maka $z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}} [\cos((\theta + 2k\pi)/m) + i \sin((\theta + 2k\pi)/m)]$ dengan $k = 0, 1, 2, \cdots, m-1$.

(Murray, 1994)

BAB III

METODE PENULISAN

Skripsi ini merupakan hasil studi literatur. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan dalam penulisan skripsi adalah sebagai berikut :

1. Menyajikan definisi, lemma dan teorema yang berkaitan dengan rantai Jordan.
2. Membuktikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan rantai Jordan.
3. Menyajikan definisi, lemma dan teorema yang berkaitan dengan matriks Jordan.
4. Membuktikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan matriks Jordan.
5. Menyajikan definisi, lemma dan teorema yang berkaitan dengan akar ke–m dari matriks kompleks non singular.
6. Membuktikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan akar ke–m dari matriks kompleks non singular.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas akar ke–m dari matriks kompleks non singular.

Lemma 4.1 berikut menunjukkan bahwa rantai Jordan dari $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari matriks A.

Lemma 4.1. Misalkan $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ adalah rantai Jordan dari $A \in M_n$ dengan suku-sukunya bebas linier yang bersesuaian dengan nilai eigen dari A yang tidak nol, yaitu $\omega_0 = r_0 \cdot e^{i\Phi_0} \in \sigma(A)$ dengan $r_0 > 0, \Phi_0 \in [0, 2\pi)$. Misalkan $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$, maka untuk setiap nilai eigen

$$r_0^{\frac{1}{m}} \cdot e^{i\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}} \in \sigma(P(\lambda)); \quad t = 1, 2, \cdots, m$$

polinomial matriks $P(\lambda)$ memiliki rantai Jordan dengan bentuk

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \\ y_1 &= a_{1,1}x_1 \\ y_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_k &= a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,k}x_k, \end{aligned}$$

dengan koefisien $a_{i,i}(1 \le j \le i \le k)$ bergantung pada t dan untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$, $a_{i,i} = \left(m\, r_0^{\frac{m-1}{m}} e^{i(m-1)\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}} \right)^i \neq 0$. Lebih lanjut vektor-vektor $y_1, y_2, \cdots, y_k$ bebas linier.

Bukti : Diketahui $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ adalah rantai Jordan dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\omega_0 \neq 0$ dan vektor eigen $x_0 \neq 0$. Akan ditunjukkan $y_1, y_2, \cdots, y_k$ bebas linier. Persamaan pertama dari Definisi 2.35. adalah

$$P(\omega_0)x_0 = 0$$
$$(I_n\omega_0 - A)x_0 = 0 \quad \text{atau}$$
$$(A - I_n\omega_0)x_0 = 0.$$

Persamaan kedua dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_1 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_1 + \frac{1}{1!}1\ x_0 = 0$$
$$(I_n\omega_0 - A)x_1 = -x_0 \quad \text{atau}$$
$$(A - I_n\omega_0)x_1 = x_0 \tag{4.1}$$

Persamaan ketiga dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_2 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_1 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, dan $P^{(2)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_2 + \frac{1}{1!}1\ x_1 + \frac{1}{2!}0\ x_0 = 0$$
$$(I_n\omega_0 - A)x_2 = -x_1 \quad \text{atau}$$
$$(A - I_n\omega_0)x_2 = x_1 \tag{4.2}$$

Persamaan keempat dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_3 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_2 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_1 + \frac{1}{3!}P^{(3)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka $P^{(1)}(\omega_0) = 1$, $P^{(2)}(\omega_0) = 0$, dan $P^{(3)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_3 + \frac{1}{1!}1\ x_2 + \frac{1}{2!}0\ x_1 + \frac{1}{3!}0\ x_0 = 0$$
$$(I_n\omega_0 - A)x_3 = -x_2 \quad \text{atau}$$
$$(A - I_n\omega_0)x_3 = x_2 \tag{4.3}$$

Demikian seterusnya, untuk persamaan ke-k dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_k + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_{k-1} + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_{k-2} + \cdots + \frac{1}{k!}P^{(k)}(\omega_0)x_0 = 0$$

karena $P(\omega_0) = (I_n\omega_0 - A)$, maka

$P^{(1)}(\omega_0) = 1$, $P^{(2)}(\omega_0) = P^{(3)}(\omega_0) = \cdots = P^{(k)}(\omega_0) = 0$, sehingga

$$(I_n\omega_0 - A)x_k + \frac{1}{1!}\,1\,x_{k-1} + \frac{1}{2!}\,0\,x_{k-2} + \cdots + \frac{1}{k!}\,0\,x_0 = 0$$

$(I_n\omega_0 - A)x_k = -x_{k-1}$ atau

$$(A - I_n\omega_0)x_k = x_{k-1} \qquad (4.4)$$

Dari (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4), maka diperoleh $(A - I_n\omega_0)x_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

Karena x_0 vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen ω_0, maka $P(\omega_0)x_0 = 0$, sehingga $(I_n\omega_0 - A)x_0 = 0$ (4.5)

Misalkan μ_0 nilai eigen dari $P(\lambda)$, maka $\mu_0^m = \omega_0$. Karena y_0 vektor eigen dari $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan nilai eigen μ_0^m, maka

$$P(\mu_0)y_0 = 0, \text{ sehingga } (I_n\mu_0^m - A)y_0 = 0$$

Karena $\mu_0^m = \omega_0$, maka $(I_n\omega_0 - A)y_0 = 0$ (4.6)

Dari (4.5) dan (4.6), diperoleh bahwa $y_0 = x_0$ merupakan vektor eigen dari $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan $\mu_0 \in \sigma(P(\lambda))$.

Misalkan terdapat vektor $y_1 \in \mathbb{C}^n$, sehingga memenuhi

$$P(\mu_0)y_1 + \frac{P^{(1)}(\mu_0)}{1!}y_0 = 0, \text{ maka}$$

$$(I_n\mu_0^m - A)y_1 + m\mu_0^{m-1}y_0 = 0$$

$$(I_n\mu_0^m - A)y_1 = - m\mu_0^{m-1}y_0 \tag{4.7}$$

Karena $y_0 = x_0$ dengan $x_0 = (A - I_n\omega_0)x_1$, maka $y_0 = (A - I_n\omega_0)x_1$. Oleh karena $\mu_0^m = \omega_0$, maka persamaan (4.7) menjadi

$$\begin{aligned}(I_n\omega_0 - A)y_1 &= - m\mu_0^{m-1}(A - I_n\omega_0)x_1\\ &= m\mu_0^{m-1}(I_n\omega_0 - A)x_1\\ y_1 &= m\mu_0^{m-1}x_1 \end{aligned}\tag{4.8}$$

Oleh karena itu, dapat dipilih $y_1 = a_{1,1}\, x_1$ dengan $a_{1,1} = m\mu_0^{m-1} \neq 0$.

Misalkan terdapat vektor $y_2 \in \mathbb{C}^n$, sehingga

$$P(\mu_0)y_2 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\mu_0)y_1 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\mu_0)y_0 = 0 \tag{4.9}$$

Karena $P(\mu_0) = (I_n\mu_0^m - A)$, maka $P^{(1)}(\mu_0) = m\mu_0^{m-1}$, sehingga $P^{(2)}(\mu_0) = m(m-1)\mu_0^{m-2}$. Dengan demikian persamaan (4.9) menjadi

$$(I_n\mu_0^m - A)y_2 + \frac{1}{1!}(m\mu_0^{m-1})y_1 + \frac{1}{2!}m(m-1)(\mu_0^{m-2})y_0 = 0$$

$$(I_n\mu_0^m - A)y_2 = - \frac{1}{1!}(m\mu_0^{m-1})y_1 - \frac{1}{2!}m(m-1)(\mu_0^{m-2})y_0 \tag{4.10}$$

Karena $y_0 = x_0$ dengan $x_0 = (A - I_n\omega_0)x_1$ dan $y_1 = m\mu_0^{m-1}x_1$ dengan $x_1 = (A - I_n\omega_0)x_2$, maka $y_0 = (A - I_n\omega_0)x_1$ dan $y_1 = m\mu_0^{m-1}(A - I_n\omega_0)x_2$, sehingga persamaan (4.10) menjadi

$$(I_n\mu_0^m - A)y_2 = -m\mu_0^{m-1}(m\mu_0^{m-1})(A - I_n\omega_0)x_2 - \frac{m(m-1)}{2!}\mu_0^{m-2}(A - I_n\omega_0)x_1$$

$$= (m\mu_0^{m-1})^2(I_n\omega_0 - A)x_2 + \frac{m(m-1)}{2!}\mu_0^{m-2}(I_n\omega_0 - A)x_1 \quad (4.11)$$

Karena $\mu_0^m = \omega_0$, maka persamaan (4.11) menjadi

$$(I_n\omega_0 - A)y_2 = (I_n\omega_0 - A)\left((m\mu_0^{m-1})^2 x_2 + \frac{m(m-1)}{2!}\mu_0^{m-2} x_1\right), \text{sehingga}$$

$$y_2 = (m\mu_0^{m-1})^2 x_2 + \frac{m(m-1)}{2!}\mu_0^{m-2} x_1 \quad (4.12)$$

Dengan demikian dapat dipilih $y_2 = a_{2,2}x_2 + a_{2,1}x_1$ dengan $a_{2,2} = (m\mu_0^{m-1})^2$ dan

$a_{2,1} = \frac{m(m-1)}{2}\mu_0^{m-2} \neq 0.$

Dengan cara serupa, terdapat $y_k \in \mathbb{C}^n$, sehingga

$$P(\mu_0)y_k + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\mu_0)y_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k!}P^{(k)}(\mu_0)y_0 = 0$$

Oleh karena itu dapat dipilih $y_k = a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,k}x_k$ dengan $a_{k,k} = \frac{1}{1!}(m\mu_0^{m-1})^k$. Dengan demikian polinomial matriks $P(\lambda)$ memiliki rantai Jordan yang berbentuk

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \\ y_1 &= a_{1,1}x_1 \\ y_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_k &= a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,k}x_k, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dari uraian di atas, diperoleh rumus umum untuk mencari $a_{i,i}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$, yaitu $a_{i,i} = \frac{1}{1!}(m\mu_0^{m-1})^i$.

Karena $\mu_0^m = \omega_0$ dengan $\omega_0^{\frac{1}{m}} = r_0^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}}$, maka $a_{i,i} = \frac{1}{i!}(m\mu_0^{m-1})^i$ dapat ditulis

$$a_{i,i} = \left(\frac{1}{1!} m r_0^{\frac{m-1}{m}} e^{i(m-1)\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}} \right)^i \quad \text{atau} \quad a_{i,i} = \left(m r_0^{\frac{m-1}{m}} e^{i(m-1)\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}} \right)^i .$$

Karena vektor-vektor $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}^n$ bebas linier, maka menurut persamaan (4.13) dan Teorema 2.13. diperoleh bahwa vektor-vektor $y_0, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{C}^n$ juga bebas linier. □

Contoh 4.2.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Rantai Jordan dari A dan rantai Jordan dari $P(\lambda)$ untuk m = 3 dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut..

Berikut ini merupakan cara untuk mencari rantai Jordan dari matriks A.

Polinomial karakteristik dari A adalah $(\lambda - 5)(\lambda - 2)^3$, sehingga A mempunyai 4 nilai eigen, yaitu 5 dan tiga nilai eigen lainnya adalah 2.

Menurut Definisi 2.35., maka $P(\omega_0)x_0 = 0$, sehingga

$$P(\omega_0) = \begin{pmatrix} \omega_0 - 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \omega_0 - 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \omega_0 - 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \omega_0 - 5 \end{pmatrix}, \quad P^{(1)}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{dan } P^{(2)}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 5$, persamaan pertama dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)\, x_0 = 0, \text{maka } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dengan } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Dengan sifat perkalian pada matriks, maka

$3a + b - 2c = 0$, sehingga $3a = 2c - b$ (4.14)

$2b + c = 0$, sehingga $b = ½\, c$ (4.15)

$-b + 4c = 0$, sehingga $b = 4c$ (4.16)

$-b + 3c = 0$, sehingga $b = 3c$ (4.17)

Dari persamaan (4.15), (4.16), dan (4.17), maka $b = c = 0$, sehingga $a = 0$.

Misalkan $d = 1$, maka $x_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t$.

Untuk nilai eigen $\omega_0 = 2$, persamaan pertama dari rantai Jordan adalah

$$P(\omega_0)\, x_0 = 0, \text{maka } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{dengan } x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Dengan sifat perkalian pada matriks, maka

$b - 2c = 0$, maka $b = 2c$ (4.18)

$-b + c = 0$, maka $b = c$ (4.19)

$-b + c = 0$, maka $b = c$ (4.20)

$-b + 3c - 3d = 0$, maka $d = \frac{3c - b}{3}$ (4.21)

Dari persamaan (4.18), (4.19), dan (4.20), maka $b = c = 0$, sehingga $d = 0$.

Misalkan $a = 1$, maka $x_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t$.

Persamaan ke 2 dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_1 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh bahwa $b = c = 1$, sehingga $d = \frac{2}{3}$.

Misalkan $a = 1$, maka $x_1 = \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{2}{3}\right)^t$.

Persamaan ketiga dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega_0)x_2 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega_0)x_1 + \frac{1}{2!}P^{(2)}(\omega_0)x_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh bahwa $c = -2$ dan $b = -5$, sehingga $d = -\frac{1}{9}$. Misalkan $a = 1$, maka $x_2 = \left(1 \quad -5 \quad -2 \quad -\frac{1}{9}\right)^t$.

Jadi rantai Jordan dari matriks A adalah

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\\-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\right\}.$$

Berikut ini merupakan cara untuk mencari rantai Jordan dari $P(\lambda)$.

Untuk m = 3, maka $P(\lambda)=I_4\lambda^3 - A = \begin{pmatrix}\lambda^3-2 & 1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda^3-3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda^3-1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & \lambda^3-5\end{pmatrix}$. Polinomial karakteristik dari $P(\lambda)$ adalah $(\lambda-5^{\frac{1}{3}})(\lambda-2^{\frac{1}{3}})^3$, sehingga $P(\lambda)$ mempunyai 4 nilai eigen, yaitu $5^{\frac{1}{3}}$ dan tiga nilai eigen lainnya adalah $2^{\frac{1}{3}}$.

Dari persamaan (4.5) dan (4.6) diperoleh bahwa $y_0 = x_0$. Untuk nilai eigen $\omega_0 = 5^{\frac{1}{3}}$, maka vektor eigen $y_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t$. Untuk nilai eigen $\omega_0 = 2^{\frac{1}{3}}$, maka vektor eigen $y_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^t$.

Dari persamaan (4.8) diperoleh bahwa $y_1 = a_{1,1}\, x_1$ dengan $a_{1,1} = m\mu_0^{m-1}$ dan $x_1 = \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{2}{3}\right)^t$. Karena m = 3 dan $\mu_0 = 2^{\frac{1}{3}}$, maka $a_{1,1} = 3(2^{\frac{1}{3}})^{3-1} = 3(2^{\frac{2}{3}})$. Dengan demikian diperoleh bahwa

$$y_1 = 3.2^{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 2.(2^{\frac{2}{3}}) \end{pmatrix}.$$

Dari persamaan (4.12) diperoleh bahwa $y_2 = a_{2,2}x_2 + a_{2,1}x_1$ dengan $a_{2,2} = (m\,\mu_0^{m-1})^2$, $a_{2,1} = \frac{m(m-1)}{2}\mu_0^{m-2}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^t$, dan $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}^t$.

Karena m = 3 dan $\mu_0 = 2^{\frac{1}{3}}$, maka $a_{2,2} = (3.2^{\frac{2}{3}})^2$ dan $a_{2,1} = 3(2^{\frac{1}{3}})$.

Dengan demikian diperoleh bahwa

$$y_2 = 9.(2^{\frac{2}{3}})^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} + 3(2^{\frac{1}{3}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,46 \\ -109,61 \\ -41,58 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jadi rantai Jordan dari $P(\lambda)$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 3.(2^{\frac{2}{3}}) \\ 2.(2^{\frac{2}{3}}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26,46 \\ -109,61 \\ -41,58 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \square$$

Rantai Jordan dari polinomial matriks $P(\lambda)$ pada persamaan 4.13 dapat diubah ke dalam bentuk matriks, yaitu

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{k,1} \\ 0 & 0 & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{k,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{k,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Misalkan $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$ dan

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{k,1} \\ 0 & 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix},$$

maka persamaan 4.13 dapat ditulis dalam bentuk $Y_0 = X_0 T_0$.

Misalkan A matriks non singular berukuran n x n yang mempunyai ξ nilai eigen yang berbeda ($\xi \le n$), namakan $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\xi$ berturut-turut sebanyak $k_1, k_2, \cdots, k_\xi$. Nilai eigen-nilai eigen tersebut dapat ditulis sebagai $\omega_t = r_t e^{i\Phi_t} \in \sigma(A)$ dengan $t = 1, 2, \cdots, \xi$ dan $r_t > 0, \Phi_t \in [0, 2\pi)$. Begitu juga dengan nilai eigen dari $P(\lambda)$ bersesuaian dengan nilai eigen matriks A, sehingga $P(\lambda)$ juga mempunyai ξ nilai eigen yang berbeda, namakan $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\xi$ dengan $\mu_t = \omega_t^{\frac{1}{m}} = r_t^{\frac{1}{m}} . e^{i\frac{\Phi_t + 2(s_j - 1)\pi}{m}}$, dengan $j = 1, 2, \cdots, \xi$.

Misalkan untuk ω_1, maka rantai Jordan dari matriks A yang bersesuaian dengan ω_1, namakan X_1 dengan $X_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k_1} \end{pmatrix}$ (4.22)

Karena rantai Jordan dari $P(\lambda)$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari A, maka menurut Lemma 4.1 diperoleh

$$Y_1(s_1) = \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,k_1} \end{pmatrix} \text{ dengan } s_1 \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{4.23}$$

dan T_1, sehingga $Y_1(s_1) = Y_1 = X_1 T_1$ (4.24)

Untuk ω_2, maka rantai Jordan dari matriks A yang bersesuaian dengan ω_2, adalah X_2 dengan $X_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k_2} \end{pmatrix}$ (4.25)

Karena rantai Jordan dari $P(\lambda)$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari A, maka menurut Lemma 4.1 diperoleh

$$Y_2(s_2) = \begin{pmatrix} y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,k_2} \end{pmatrix} \text{ dengan } s_2 \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{4.26}$$

dan T_2, sehingga $Y_2(s_2) = Y_2 = X_2 T_2$ (4.27)

Secara sama untuk $\omega_3, \omega_4, \cdots, \omega_\xi$.

Demikian seterusnya untuk ω_ξ, maka rantai Jordan dari matriks A yang bersesuaian dengan ω_ξ, adalah X_ξ dengan $X_\xi = \begin{pmatrix} x_{\xi,1} & x_{\xi,2} & \cdots & x_{\xi,k_\xi} \end{pmatrix}$(4.28)

Karena rantai Jordan dari $P(\lambda)$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari A, maka menurut Lemma 4.1 diperoleh

$$Y_\xi(s_\xi) = \begin{pmatrix} y_{\xi,1} & y_{\xi,2} & \cdots & y_{\xi,k_\xi} \end{pmatrix} \text{ dengan } s_\xi \in \{1, 2, \cdots, m\} \tag{4.29}$$

Dari persamaan 4.13 dapat ditulis dalam bentuk $Y_\xi(s_\xi) = Y_\xi = X_\xi T_\xi$ (4.30)

Dari persamaan 4.22, 4.25, dan 4.28 diperoleh bahwa

$$X_A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_\xi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,k_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,k_2} & \cdots & x_{\xi,1} & \cdots & x_{\xi,k_\xi} \end{pmatrix}$$

Dari persamaan 4.23, 4.26, dan 4.29 diperoleh bahwa

$$Y_A(s_1, s_2, \cdots, s_\xi) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_\xi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,k_1} & y_{2,1} & \cdots & y_{2,k_2} & \cdots & y_{\xi,1} & \cdots & y_{\xi,k_\xi} \end{pmatrix}$$

Dari persamaan 4.24, 4.27 dan 4.30 diperoleh bahwa

$$Y_A(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi) = X_A\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right).$$

Karena X_A non singular dan $\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)$ matriks segitiga atas, maka menurut Lemma 4.1 semua elemen diagonal dari $\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)$ tidak nol. Dalam hal ini elemen-elemen diagonalnya dapat ditulis dalam bentuk

$$a_{i,i} = \left(m\, r_0^{\frac{m-1}{m}}\, e^{i(m-1)\frac{\Phi_0 + 2(t-1)\pi}{m}}\right)^i \neq 0.$$

Oleh karena itu $\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)$ non singular. Menurut Akibat 2.18., maka matriks $Y_A(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi)$ non singular.

Teorema 4.3. berikut merupakan akibat dari Lemma 4.1.

Teorema 4.3. Untuk setiap $(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi)$, $s_j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $(j = 1, 2, \cdots, \xi)$, maka matriks $Y_A(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi)$ non singular.

Teorema 4.4. berikut menunjukkan eksistensi akar ke-m dari matriks kompleks non singular.

Teorema 4.4. Misalkan $A \in M_n$ matriks kompleks non singular dengan matriks Jordan $J_A = \bigoplus_{j=1}^{\xi}\left(I_{k_j}\omega_j + N_{k_j}\right)$ dan J – spektrum

$$\sigma_J(A) = \{\omega_1 = r_1 e^{i\Phi_1},\ \omega_2 = r_2 e^{i\Phi_2},\ \cdots,\ \omega_\xi = r_\xi e^{i\Phi_\xi}\}.$$

Misalkan $m > 1$, matriks non singular $X_A \in M_n$ dengan

$$X_A = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,k_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,k_2} & \cdots & x_{\xi,1} & \cdots & x_{\xi,k_\xi} \end{pmatrix},$$

sehingga $A = X_A J_A X_A^{-1}$. Untuk setiap $(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi)$, $s_j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, dengan $(j = 1, 2, \cdots, \xi)$ dan matriks $Y_A(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\xi)$, maka matriks

$$B = Y_A(s_1, s_2, \cdots, s_\xi)\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi}\left(I_{k_j} r_j^{\frac{1}{m}} . e^{i\frac{\Phi_j + 2(s_j - 1)\pi}{m}} + N_{k_j}\right)\right)(Y_A(s_1, s_2, \cdots, s_\xi))^{-1}$$

adalah akar ke-m dari A.

Bukti : Misalkan $B(\lambda) = I_n\lambda - B$. Dari bentuk diatas dapat diperoleh $B = Y_A J_{P(\lambda)} Y_A^{-1}$ dengan $J_{P(\lambda)} = \left(\bigoplus_{j=1}^{\xi}\left(I_{k_j} r_j^{\frac{1}{m}} . e^{i\frac{\Phi_j + 2(s_j - 1)\pi}{m}} + N_{k_j}\right)\right)$. Ini menunjukkan B similar dengan $J_{P(\lambda)}$, sehingga nilai eigen B dan nilai eigen $J_{P(\lambda)}$ sama. Karena $J_{P(\lambda)}$ adalah matriks Jordan dari $P(\lambda)$, maka nilai eigen $J_{P(\lambda)}$ adalah nilai eigen $P(\lambda)$. Sedangkan nilai eigen B dengan nilai eigen $B(\lambda)$ sama. Diperoleh nilai eigen $B(\lambda)$ sama dengan nilai eigen $P(\lambda)$. Misalkan ω sebarang nilai eigen $B(\lambda)$. Misalkan pula $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ adalah rantai Jordan dari $B(\lambda)$ berarti berlaku

$$\begin{aligned} B(\omega)\,x_0 &= 0 \\ B(\omega)\,x_1 + \frac{1}{1!}B^{(1)}(\omega)\,x_0 &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ B(\omega)x_k + \frac{1}{1!}B^{(1)}(\omega)\,x_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k!}B^{(k)}(\omega)\,x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena $B = Y_A J_{P(\lambda)} Y_A^{-1}$, sedangkan $Y_A = X_A\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} B &= \left(X_A\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)\right) J_{P(\lambda)} \left(\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)^{-1} X_A^{-1}\right) \\ &= X_A\left(\left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right) J_{P(\lambda)} \left(\bigoplus_{j=1}^{\xi} T_j\right)^{-1}\right) X_A^{-1} \\ &= X_A\left(\omega^{1-\frac{1}{m}} J_A\right) X_A^{-1} \\ &= \omega^{1-\frac{1}{m}}\left(X_A J_A X_A^{-1}\right) \\ &= \omega^{1-\frac{1}{m}} A. \end{aligned}$$

Untuk persamaan pertama dari rantai Jordan $B(\lambda)$ adalah $(I_n\omega - B)x_0 = 0$, maka

$$(I_n\omega - B) = I_n\omega - \omega^{1-\frac{1}{m}} A$$
$$= \omega^{1-\frac{1}{m}} (I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A).$$

Karena $\omega^{1-\frac{1}{m}} \neq 0$, maka $I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A = 0$. Ini berarti $(I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A)x_0 = 0$. Jadi x_0 adalah rantai Jordan dari $P(\lambda)$.

Persamaan kedua dari rantai Jordan adalah sebagai berikut.

$$P(\omega)x_1 + \frac{1}{1!}P^{(1)}(\omega)x_0 = 0$$

karena $P(\omega) = (I_n\omega - A)$, maka $P^{(1)}(\omega) = 1$, sehingga

$$(I_n\omega - B)x_1 + \frac{1}{1!} 1\, x_0 = 0$$
$$(I_n\omega - B)x_1 = -x_0$$
$$\omega^{1-\frac{1}{m}} (I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A)x_1 = -x_0$$
$$(I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A)x_1 = -\omega^{\frac{1}{m}-1} x_0$$
$$m\Big(\frac{1}{m}(I_n\omega^{\frac{1}{m}} - A)x_1 + \frac{1}{m}\omega^{\frac{1}{m}-1} x_0\Big) = 0$$
$$\frac{1}{m}P(\omega)x_1 + P^{(1)}(\omega)x_0 = 0$$

Oleh karena itu $x_0, \frac{1}{m}x_1$ merupakan rantai Jordan dari $P(\lambda)$.

Dengan cara serupa diperoleh bahwa $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ adalah rantai Jordan dari $P(\lambda)$. Oleh karena nilai eigen dan rantai Jordan dari $B(\lambda)$ dan $P(\lambda)$ sama, menurut Teorema 2.39, maka $I_n\lambda$ - B adalah pembagi kanan dari $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$, sehingga terdapat polinomial matriks $Q(\lambda)$ yang berukuran n x n dengan derajat m-1 yang memenuhi

$$P(\lambda) = Q(\lambda)\,(I_n\lambda - B).$$

Menurut Teorema 2.40, maka $P(B) = B^m - A = 0$, sehingga $B^m = A$. Oleh

Contoh 4.5.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Berikut ini merupakan cara untuk mencari akar ke-3 dari A. Matriks A mempunyai empat nilai eigen yang berbeda yaitu 1, 4, 5 dan 6. Menurut Contoh 2.30, maka matriks Jordan dari A adalah

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Didefinisikan matriks non singular X_A yang berukuran 4 x 4 dengan $X_A = (x_{1,1} \quad x_{2,1} \quad x_{3,1} \quad x_{4,1})$, untuk setiap j = 1, 2, 3, 4, sehingga $\{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}\}$ merupakan rantai Jordan dari matriks A. Dari Contoh 2.36, maka rantai Jordan dari matriks A adalah

$$X_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad X_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Dengan Lemma 4.1 diperoleh matriks segitiga atas T_1 yang bersesuaian dengan nilai eigen α, T_2 yang bersesuaian dengan nilai eigen β, T_3 yang bersesuaian dengan nilai eigen γ dan T_4 yang bersesuaian dengan nilai eigen δ. Karena semua nilai eigennya berbeda, maka matriks segitiga atas $T_0 = (1)$. Selanjutnya T_1, T_2, T_3 dan T_4 dapat ditulis sebagai $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = (1)$.

Oleh karena itu $Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4) = X_A((1) \oplus (1) \oplus (1) \oplus (1))$, sehingga

$$Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4) = X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian $(Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4))^{-1}$ adalah

$$(Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

Menurut Teorema 4.4, akar ke-3 dari matriks A adalah matriks B dengan

$$B = Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} (Y_A(s_1, s_2, s_3, s_4))^{-1}$$

$$= X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Akar ke-3 dari matriks A tidak tunggal dan tergantung pada pemilihan s_1, s_2, s_3, dan s_4. Dalam hal ini akar ke-3 dari matriks A berjumlah $3^4 = 81$. Beberapa akar ke-3 dari matriks A adalah sebagai berikut.

Misalkan $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$, maka

$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = 1$ $\qquad$ $\beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$

$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $\delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}$, sehingga

$$B_1 = Y_A(1,1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(1,1,1,1))^{-1}$$

$$= X_A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5874 & 0.1511 & 0.0070 & 0.4328 \\ 0 & 1.2197 & -0.1916 & 0.0422 \\ 0 & -0.1688 & 1.4113 & 0.3636 \\ 0 & 0.5411 & 0.0563 & 1.8961 \end{pmatrix}$$

Misalkan $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$, maka

$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad$ $\beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\qquad$ $\delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$, sehingga

$$B_2 = Y_A(2,2,2,2)\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(2,2,2,2))^{-1}$$

$$= X_A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.7937+1.3747i & -0.0755+0.1308i & -0.0035+0.0060i & -0.2164+0.3748i \\ 0 & -0.6099+1.0563i & 0.0958-0.1659i & -0.0211+0.0366i \\ 0 & 0.0844-0.1462i & -0.7056+1.2222i & -0.1818+0.3149i \\ 0 & -0.2706+0.4686i & -0.0281+0.0487i & -0.9481+1.6421i \end{pmatrix}$$

Misalkan $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$, maka

$$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \qquad \beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \qquad \delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}}, \text{sehingga}$$

$$B_3 = Y_A(3,3,3,3)\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(3,3,3,3))^{-1}$$

$$= X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.7937-1.3747i & -0.0755-0.1308i & -0.0035-0.0060i & -0.2164-0.3748i \\ 0 & -0.6099-1.0563i & 0.0958+0.1659i & -0.0211-0.0366i \\ 0 & 0.0844+0.1462i & -0.7056-1.2222i & -0.1818-0.3149i \\ 0 & -0.2706-0.4686i & -0.0281-0.0487i & -0.9481-1.6421i \end{pmatrix}$$

Misalkan $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $s_4 = 1$, maka

$$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = 1 \qquad \beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \qquad \delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}, \text{ sehingga}$$

$$B_4 = Y_A(1,2,3,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(1,2,3,1))^{-1}$$

$$= X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.7937+1.3747i & 11.5723+11.1765i & -3.7194-6.7339i & 11.1815+7.1222i \\ 0 & -1.3453-1.4809i & 1.0909+0.7404i & -1.8815-1.1107i \\ 0 & 7.5261+4.4426i & -2,4362-2.2213i & 6.1348+3.3320i \\ 0 & 5.6711+2.9618i & -2.5087-1.4809i & 5.7436+2.2213i \end{pmatrix}$$

Misalkan $s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 3$, maka

$$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$, sehingga

$$B_5 = Y_A(2,1,2,3)\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(2,1,2,3))^{-1}$$

$$= X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5874 & 3.8930-15.3793i & -3.9720+6.7035i & 0.5773-13.3023i \\ 0 & -0.6099+2.9447i & 0.0958-0.7954i & -0.0211+1.9250i \\ 0 & 0.0844-7.6998i & -0.7056+3.7401i & -0.1818-7.2387i \\ 0 & -0.2706-7.0850i & -0.0281+2.5666i & -0.9481-5.9115i \end{pmatrix}$$

Misalkan $s_1 = s_2 = 3, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 2,$ maka

$$\alpha = 1^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_1-1)\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \qquad \beta = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_2-1)\pi}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\gamma = 5^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_3-1)\pi}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \delta = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2(s_4-1)\pi}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$, sehingga

$$B_6 = Y_A(3,3,1,2)\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}(Y_A(3,3,1,2))^{-1}$$

$$= X_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -4 \\ -3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.7937-1.3747i & -15.4653+4.2027i & 7.6914+0.0303i & -11.7587+6.1800i \\ 0 & 1.9551-1.4638i & -1.1867+0.0549i & 1.9026-0.8143i \\ 0 & -7.6105+3.2572i & 3.1418-1.5187i & -5.9530+3.9067i \\ 0 & -5.4005+4.1232i & 2.5368-1.0857i & -4.7955+3.6902i \end{pmatrix}$$

Dengan cara memilih pasangan terurut s_1, s_2, s_3, s_4 dapat ditentukan akar ke-3 dari matriks A yang lainnya. □

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tentang Akar Ke-m Dari Matriks Kompleks Non Singular diperoleh :

1. Rantai Jordan dari $P(\lambda) = I_n\lambda^m - A$ bersesuaian dengan rantai Jordan dari matriks A.
2. Matriks kompleks non singular A mempunyai akar ke-m, yaitu $B = Y_A J_{P(\lambda)} Y_A^{-1}$ dengan Y_A adalah rantai Jordan dari $P(\lambda)$ dan $J_{P(\lambda)} = \left(\oplus_{j=1}^{\xi} \left(I_{k_j} r_j^{\frac{1}{m}} . e^{i\frac{\Phi_j + 2(s_j - 1)\pi}{m}} + N_{k_j} \right) \right)$ merupakan matriks Jordan dari $P(\lambda)$.

5.2 Saran

Dalam skripsi ini penulis hanya menentukan bentuk akar ke-m dari matriks kompleks non singular secara analitik, masih banyak lagi bagian dari topik ini yang perlu dibahas, misalnya eksistensi akar ke-m dari matriks kompleks singular.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, 1988, *Aljabar Linear Elementer,* Erlangga, Jakarta.

Ayres, Frank, J.R., Ph.D, 1985, *Matriks*, Erlangga, Jakarta.

Brown, William C., 1991, *Matrices and vector space,* Marcel Dekker, Inc., New York.

Cullen, C.G., 1966, *Matrices and Linear Transformations*, Addison-Wesley Publishing Company, Pennsylvania.

Gantmacher, 1959, *The Theory of Matrices, Vol. I,* Chelsea Publishing Company, New York.

Gohberg, et al, 1982, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York.

Jacob, Bill, 1990, *Linear Algebra*, WH Freman and Company, New York.