ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR

SKRIPSI

A N I T A W A T I

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

2005

ESTIMASI PARAMETER
DISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Airlangga

Oleh :

A N I T A W A T I
NIM : 080112434

Tanggal Lulus : 16 Agustus 2005

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. ETO WURYANTO, DEA	**RIMULJO HENDRADI, S.Si, M.Si**
NIP 131 933 015	**NIP 132 161 178**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Judul : **ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR**

Penyusun : **A N I T A W A T I**

NIM : **080112434**

Tanggal Ujian : **16 Agustus 2005**

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. ETO WURYANTO, DEA	**RIMULJO HENDRADI, S.Si, M.Si**
NIP 131 933 015	**NIP 132 161 178**

Mengetahui :

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA Universitas Airlangga

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS AIRLANGGA JURUSAN MATEMATIKA

Drs. MOH. IMAM UTOYO, M.Si

NIP 131 801 397

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga. Diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan seijin penulis dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah.

Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

PRAKATA

Puji syukur yang sedalam-dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas karunia dan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Estimasi Parameter Distribusi Pareto Tergeneralisir”. Tak lupa shalawat serta salam senantiasa kami sampaikan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, pemimpin, panutan serta pendorong segala gerak langkah kami untuk menyelesaikan skripsi ini.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini hingga selesai, khususya kepada Drs. Eto Wuryanto, DEA dan Rimuljo Hendradi, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing yang senantiasa memberikan nasehat dan bimbingan kepada penulis selama penyusunan skripsi ini serta rekan-rekan yang telah banyak membantu dan memberikan motivasi.

Akhir kata kami mengharapkan, semoga skripsi ini dapat memberikan sesuatu yang bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan jurusan matematika pada khususnya.

Surabaya, Agustus 2005

Penyusun

Anitawati, 2005. Estimasi Parameter Distribusi Pareto Tergeneralisir. Skripsi ini dibawah bimbingan Drs. Eto Wuryanto, DEA dan Rimuljo Hendradi, S.Si., M.Si. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Airlangga.

ABSTRAK

Skripsi ini bertujuan untuk mengestimasi parameter distribusi Pareto Tergeneralisir. Parameter-parameter distribusi Pareto Tergeneralisir yang diestimasi yaitu parameter skala (σ) dan parameter bentuk (γ). Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter-parameter dari distribusi Pareto Tergeneralisir yaitu *Elemental Percentil Method (EPM)*.

EPM merupakan metode estimasi parameter yang terdiri dari dua tahap yaitu estimasi awal dan estimasi akhir. Estimasi awal digunakan untuk menentukan estimator awal $\hat{\sigma}$ dan $\hat{\gamma}$ untuk semua order statistik yang diamati. Sedangkan estimasi akhir merupakan tahap penggabungan semua estimator awal $\hat{\sigma}$ dan $\hat{\gamma}$ untuk menentukan nilai estimator akhir $\hat{\sigma}$ dan $\hat{\gamma}$. Estimator σ dan γ ditentukan melalui estimator δ. Estimator δ yang didapatkan pada metode ini masih dalam bentuk fungsi implisit, oleh karena itu nilai estimasinya ditentukan dengan prosedur Newton-Raphson.

Implementasi algoritma EPM menggunakan program S-Plus. Data yang digunakan adalah data sekunder dengan n=49 dan data *generate* dengan $\gamma = 1$, $\sigma = 2$, n=100. Nilai estimator untuk data sekunder adalah $\hat{\gamma} = 0.9979187$ dan $\hat{\sigma} = 17912.62$. Sedangkan nilai estimator untuk data *generate* adalah $\hat{\gamma} = 1.013595$ dan $\hat{\sigma} = 1.981651$.

Kata kunci : Distribusi Pareto Tergeneralisir, *Elemental Percentil Method*, Order Statistik, Newton-Raphson.

Anitawati, 2005. Estimation of Parameters of Generalized Pareto Distribution. This *skripsi* is under guidance Drs. Eto Wuryanto, DEA and Rimuljo Hendradi, S.Si., M.Si. Mathematics Departement of Mathematics and Natural Science Faculty, Airlangga University.

ABSTRACT

The purpose of this *Skripsi* is to estimates parameter of the Generalized Pareto distribution . The parameters of Generalized Pareto distribution are scale parameter (σ) and shape parameter (γ). The method which is used to estimate the parameter of Generalized Pareto distribution is Elemental Percentile Method (EPM).

The EPM has two steps estimation, they are initial estimate and final estimate. Initial estimate is used to calculate initial estimator parameters for all observed order statistics. These initial estimator parameters are combined in the final estimate to give overall estimator of the parameters. The γ and σ estimators are determined follow the δ estimator. In fact, the function of δ estimator is an implicit function, so the estimator value is determined by Newton-Raphson procedure.

Implementation of EPM algorithm use S-Plus program. We use secunder data and generate data to apply EPM algorithm. After applied secunder data, the estimator value is obtained, that is $\hat{\gamma} = 0.9979187$ and $\hat{\sigma} = 17912.62$. For generate data estimator value is $\hat{\gamma} = 1.013595$ and $\hat{\sigma} = 1.981651$.

Keyword : Generalized Pareto distribution, Elemental Percentile Method, Order Statistics, Newton-Raphson.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

B A B I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistika mempunyai peranan yang penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Hampir setiap bidang ilmu memakai statistika, karena statistika merupakan ilmu yang berhubungan dengan analisa data yang selanjutnya akan diambil kesimpulan dari data yang diperoleh. Perkembangan statistika dewasa ini cukup pesat. Hal ini dapat dilihat dari makin banyaknya program statistika yang diaplikasikan ke dalam komputer untuk memenuhi kebutuhan para pemakai statistika.

Distribusi data merupakan salah satu bagian dari statistika. Distribusi yang ada diantaranya adalah distribusi Pareto yang dikenalkan oleh seorang ahli ekonomi Italia **Vilfredo Pareto** (1848-1923). Menurut **Trehin**, contoh data berdistribusi Pareto antara lain PABX (telepon) yang dikaitkan dengan jumlah eksistensinya, hubungan komputer dengan ukuran memory (MIPS atau terminal yang terinstalansi).

Seperti pada distribusi lain, distribusi Pareto juga dapat digeneralisasi. Distribusi Pareto tergeneralisir (DPT) merupakan generalisasi dari distribusi Pareto (DP). DPT mempunyai parameter skala dan parameter bentuk yang keduanya dapat diestimasi. Beberapa metode estimasi yang biasanya digunakan diantaranya metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), metode momen dan metode kuadrat terkecil (*Least Square Method*). Selain itu ada metode estimasi yang baru yaitu *Elemental Percentile Method* (EPM). EPM merupakan metode estimasi yang terdiri dari dua tahap yaitu tahap estimasi awal dan estimasi akhir. Pada tahap estimasi awal didapatkan beberapa estimator awal, sedangkan estimasi akhir merupakan tahap penggabungan estimator-estimator awal untuk mendapatkan estimator akhir secara keseluruhan.

Metode estimasi EPM digunakan dalam pembahasan ini karena menurut **Castillo dan Hadi (1997)** nilai estimator parameter yang dihasilkan bersifat konsisten. Hal yang menjadi permasalahan adalah bagaimana mengestimasi parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan EPM dan menerapkannya pada data sekunder dan data bangkitan.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah diuraikan , dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

Bagaimana mengestimasi parameter–parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan EPM ?

1.3 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah:

1. Menentukan estimasi parameter-parameter dari distribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan metode EPM.
2. Menentukan nilai estimator parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan program S-Plus.

1.4 Manfaat

Skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Menambah wawasan tentang distribusi Pareto tergeneralisir .
2. Mendapatkan estimator dari parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir.

1.5 Batasan Masalah

Pembahasan ini hanya untuk estimasi titik parameter distribusi Pareto tergeneralisir.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Pareto

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Pareto adalah sebagai berikut:

$$F(x) = 1 - \left[\frac{x}{.} \right]^{-\alpha} , x \geq \sigma, \alpha > 0 \; dan \; \sigma > 0 \tag{2.1}$$

dengan σ adalah parameter skala dan α merupakan indeks Pareto.

(Tajvidi , 1996)

2.2 Distribusi Pareto Tergeneralisir

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Pareto tergeneralisir adalah sebagai berikut :

$$F(x;\gamma,\sigma) = 1 - \left(1 - \gamma \frac{x}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad , \gamma \neq 0, \;\; \sigma > 0 , \mathrm{x} > 0 \tag{2.2}$$

dengan $\sigma > 0$ adalah parameter skala dan γ adalah parameter bentuk.

Misal $\delta = \dfrac{\sigma}{\gamma}$ maka fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Pareto tergeneralisir menjadi :

$$F(x;\gamma,\sigma) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad , \gamma \neq 0, \;\; \delta \, \gamma > 0 \tag{2.3}$$

(Castillo and Hadi , 1997)

2.3 Pembangkit Variabel Acak

Preposisi 2.1 : Misalkan U variabel acak yang berdistribusi uniform (0, 1). Untuk suatu fungsi distribusi kontinu F jika didefinisikan variabel acak X dengan $X = F^{-1}(U)$, maka variabel acak X mempunyai fungsi distribusi F [$F^{-1}(u)$ didefinisikan sama untuk setiap nilai x dengan F(x)=u].

(Ross, 1997)

2.4 Estimasi Titik

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan probabilitas f(x), dengan f(x) diketahui dan tergantung pada parameter θ yang tidak diketahui maka sampel acak tersebut dikatakan berdistribusi parametrik.

(Hogg and Craig , 1995)

Definisi 2.1 : Jika terdapat nilai dari beberapa statistik $t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang mewakili atau mengestimasi parameter θ yang tidak diketahui, maka setiap statistik $t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ disebut estimator titik.

(Mood et.al. , 1974)

2.5 Order Statistik

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n, maka sampel acak terurut yang berukuran n disebut dengan order statistik yang dinotasikan dengan $x_{1:n}, x_{2:n}, \ldots, x_{n:n}$. **(Bain , 1992)**

2.6 Elemental Percentile Method (EPM)

Metode EPM adalah metode estimasi yang menggunakan secara maksimal informasi yang terkandung dalam order statistik dengan menyamakan persamaan fungsi distribusi kumulatif yang dievaluasi pada order statistik teramati dengan nilai persentil yang berkaitan. Sehingga diperoleh suatu persamaan yang digunakan sebagai dasar untuk mendapatkan estimator awal. Estimator awal ini kemudian digabungkan untuk mendapatkan estimator akhir.

(Castillo and Hadi , 1997)

Estimator parameter distribusi Pareto tergeneralisir dapat diperoleh dalam dua tahap. Tahap pertama beberapa estimator awal didapatkan dengan menyelesaikan persamaan fungsi distribusi kumulatif yang disamadengankan dengan nilai persentil masing-masing order statistik. Tahap kedua, estimator awal yang telah diperoleh digunakan untuk mendapatkan estimator akhir.

(Castillo and Hadi , 1995a)

2.7 Estimasi Awal

Misalkan $x_{i:n}$ dan $x_{j:n}$ dua order statistik yang berbeda pada sampel acak berukuran n dari $F(x;\gamma,\sigma)$.

Langkah-langkah dalam menentukan estimasi awal menurut **Castillo dan Hadi (1997)** adalah sebagai berikut :

1. Persamaan distribusi kumulatif DPT yang dievaluasi pada order statistik yang diamati disamadengankan dengan nilai persentil yang berkaitan.

$$F(x_{i:n};\gamma,\sigma) = p_{i:n}$$

$$F(x_{j:n};\gamma,\sigma) = p_{j:n} \tag{2.4}$$

dengan $$p_{i:n} = \frac{i-\theta}{n+\beta} \quad , i = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.5}$$

Jika $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ akan didapatkan hasil estimasi yang baik.

2. Persamaan (2.3) dan (2.5) disubtitusikan pada persamaan (2.4) kemudian me-log-kan persamaan hasil subtitusinya sehingga diperoleh :

$$\ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right) = \gamma C_i$$

$$\ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) = \gamma C_j \tag{2.6}$$

dengan $C_i = \ln(1 - p_{i:n}) < 0$ (2.7)

3. Parameter γ pada persamaan (2.6) dieliminasi sehingga didapatkan

$$C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) = C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right) \tag{2.8}$$

4. Persamaan (2.8) diselesaikan menggunakan metode Newton-Raphson sehingga didapatkan estimator dari δ yaitu $\hat{\delta}(i,j)$.

5. Estimator parameter γ dan σ didapatkan dengan menggunakan $\hat{\delta}(i,j)$ sehingga diperoleh :

$$\hat{\gamma}(i,j) = \frac{\ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\hat{\delta}(i,j)}\right)}{C_i} \tag{2.9}$$

$$\hat{\sigma}(i,j) = \hat{\gamma}(i,j)\hat{\delta}(i,j) \tag{2.10}$$

Teorema 2.1 : Persamaan $C_i \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right)=C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)$ mempunyai solusi berhingga pada interval $(\delta_0,0)$ jika $x_{i:n} < \frac{C_i\, x_{j:n}}{C_j}$ atau pada interval $(x_{j:n},\delta_0)$ jika $x_{i:n} > \frac{C_i\, x_{j:n}}{C_j}$, dengan

$$\delta_0 = \frac{x_{i:n}x_{j:n}(C_j - C_i)}{C_j x_{i:n} - C_i x_{j:n}} \tag{2.11}$$

Bukti :

Diasumsikan bahwa i < j maka

$$\Leftrightarrow \frac{i}{n+1} < \frac{j}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-i}{n+1} > \frac{-j}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{-i}{n+1} > 1+\frac{-j}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{-i}{n+1}\right) > \ln\left(1+\frac{-j}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{i}{n+1}\right) > \ln\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1-p_{i:n}\right) > \ln\left(1-p_{j:n}\right)$$

$$\Leftrightarrow C_i > C_j$$

Misal $$f(\delta) = C_i \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right) - C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right) \tag{2.12}$$

Dimana $f(\delta)$ didefinisikan pada $\{(-\infty,0)\cup(x_{j:n},\infty)\}$.

$$\lim_{\delta \to -\infty} f(\delta) = \lim_{\delta \to -\infty}\left(C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right)\right)$$

$$\lim_{\delta \to -\infty} f(\delta) = 0$$

Sehingga $f(-\infty) = 0$ (2.13)

$$\lim_{\delta \to \infty} f(\delta) = \lim_{\delta \to \infty}\left(C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right)\right)$$

$$\lim_{\delta \to \infty} f(\delta) = 0$$

Sehingga $f(\infty) = 0$ (2.14)

Maka persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(\delta) = 0 \tag{2.15}$$

Dari persamaan (2.13) dan (2.14) diperoleh bahwa $\delta = -\infty$ atau $\delta = \infty$ merupakan solusi dari $f(\delta)$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa terdapat solusi berhingga untuk persamaan (2.15).

$$f(\delta) = C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right)$$

$$f(-0) = C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{-0}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{-0}\right)$$

$$f(-0) = C_i \ln\left(1 + \frac{x_{j:n}}{0}\right) - C_j \ln\left(1 + \frac{x_{i:n}}{0}\right)$$

$$f(-0) = C_i \ln(1 + \infty) - C_j \ln(1 + \infty)$$

$$f(-0) = C_i \ln(\infty) - C_j \ln(\infty)$$

$$f(-0) = C_i(\infty) - C_j(\infty)$$

$$f(-0)=\infty \tag{2.16}$$

$$f(\delta)=C_i \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right)-C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)$$

$$f(x_{j:n})=C_i \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{x_{j:n}}\right)-C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{x_{j:n}}\right)$$

$$f(x_{j:n})=C_i \ln(1-1)-C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{x_{j:n}}\right)$$

$$f(x_{j:n})=C_i \ln(0)-C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{x_{j:n}}\right)$$

$$f(x_{j:n})=\infty \tag{2.17}$$

Sehingga fungsi $f(\delta)$ mempunyai sifat-sifat berikut :

$f(-\infty)=0$; $f(-0)=\infty$; $f(x_{j:n})=\infty$; $f(\infty)=0$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.15) akan dicari turunan pertama $f(\delta)$ yaitu :

$$\frac{df(\delta)}{d\delta}=\frac{1}{\delta}\left[\frac{C_i x_{j:n}}{\delta - x_{j:n}}-\frac{C_j x_{i:n}}{\delta - x_{i:n}}\right]=0 \tag{2.18}$$

Solusi dari persamaan (2.15) adalah $\delta_0=-\infty$ atau $\delta_0=\infty$ dan

$$\delta_0=\frac{x_{i:n}x_{j:n}(C_j-C_i)}{C_j x_{i:n}-C_i x_{j:n}} \tag{2.19}$$

Sehingga didapatkan :

$\delta_0=x_{j:n}$ jika $x_{i:n}=x_{j:n}$

$\delta_0>0$ jika $x_{i:n}>\dfrac{C_i x_{j:n}}{C_j}$

$\delta_0\to\pm\infty$ jika $x_{i:n}\to C_i x_{j:n}/C_j$

$$\delta_0 < 0 \qquad \text{jika } x_{i:n} < \frac{C_i\, x_{j:n}}{C_j}$$

Fungsi $f(\delta)$ merupakan fungsi yang kontinu dan berdasarkan persamaan (2.19) maka $f(\delta)$ mempunyai satu solusi berhingga jika $C_i x_{j:n} \neq C_j x_{i:n}$. Solusi tersebut terletak pada interval $(x_{j:n}, \delta_0)$ jika $x_{i:n} > \frac{C_i\, x_{j:n}}{C_j}$ atau pada interval $(\delta_0, 0)$ jika $x_{i:n} < \frac{C_i\, x_{j:n}}{C_j}$. Dengan demikian teorema 2.1 telah terbukti.

Algoritma untuk estimasi awal menurut **Castillo dan Hadi (1997)** adalah sebagai berikut :

1. Pilih dua order statistik yang berbeda yaitu $x_{i:n} < x_{j:n}$, kemudian dihitung C_i dan C_j. Misalkan $d = C_j\, x_{i:n} - C_i\, x_{j:n}$
2. Jika d = 0, maka $\hat{\delta}(i,j) = -\infty$ atau $\hat{\delta}(i,j) = \infty$ dan $\hat{\gamma}(i,j) = 0$, kemudian dilanjutkan ke langkah 5. Jika tidak demikian dilanjutkan ke langkah 3.
3. Hitung $\delta_0 = \frac{x_{i:n} x_{j:n} (C_j - C_i)}{d}$. Jika $\delta_0 > 0$ maka $\delta_0 > x_{j:n}$. Kemudian gunakan metode Newton-Raphson dengan nilai awal pada interval $(x_{j:n}, \delta_0)$ untuk mendapatkan nilai $\hat{\delta}(i,j)$ dari persamaan (2.8) dan dilanjutkan ke langkah 5, untuk yang lain dilanjutkan ke langkah 4.
4. Gunakan metode Newton-Raphson dengan nilai awal pada interval $(\delta_0, 0)$ untuk menyelesaikan persamaan (2.8) dan mendapatkan nilai $\hat{\delta}(i,j)$.

5. Nilai $\hat{\delta}(i,j)$ digunakan untuk menghitung nilai $\hat{\gamma}(i,j)$ dan $\hat{\sigma}(i,j)$ pada persamaan (2.9) dan (2.10).

(Castillo and Hadi , 1997)

2.8 Median

Median dari suatu himpunan bilangan yang disusun menurut urutan besarnya adalah nilai pertengahan atau nilai tengah hitung dari pertengahan.

(Murray, 1988)

Kalau ada sekelompok nilai sebanyak n kemudian diurutkan mulai dari yang terkecil x_1 sampai dengan yang terbesar x_n, maka nilai yang ada di tengah-tengah disebut median.

(Supranoto, 1987)

2.9 Estimasi Akhir

Estimator yang didapatkan dari estimasi awal hanya berdasarkan dua order statistik $\{x_{i:n}, x_{j:n}\}$. Estimator secara keseluruhan akan didapatkan dari tahap estimasi akhir.

Langkah-langkah dalam menentukan estimasi akhir menurut **Castillo dan Hadi (1997)** adalah sebagai berikut :

1. Estimator dari γ dan σ yaitu $\hat{\gamma}(i,j)$ dan $\hat{\sigma}(i,j)$ dihitung untuk semua $x_{i:n} < x_{j:n}$ yang berbeda.

2. Tentukan nilai median dari setiap himpunan estimator awal yang telah diperoleh sebelumnya untuk mendapatkan estimator akhir secara keseluruhan sehingga diperoleh :

$$\hat{\gamma}_{EPM} = median(\hat{\gamma}(1,2), \hat{\gamma}(1,3), \cdots, \hat{\gamma}(n-1,n)) \quad (2.20)$$

$$\hat{\sigma}_{EPM} = median(\hat{\sigma}(1,2), \hat{\sigma}(1,3), \cdots, \hat{\sigma}(n-1,n)) \quad (2.21)$$

Jika jumlah data (n) besar maka jumlah kemungkinan pasangan order statistik juga banyak yaitu kombinasi dua dari n data. Hal ini menyebabkan jumlah estimator awal parameter menjadi besar dan membutuhkan waktu yang cukup lama dalam penghitungan estimatornya. Oleh karena itu digunakan metode lain untuk mendapatkan kemungkinan pasangan order statistik yaitu dengan memilih j=n sebagai order statistik kedua dan i=1, 2, ..., n-1 sebagai order statistik pertama. Dengan demikian persamaan (2.20) dan (2.21) menjadi :

$$\hat{\gamma}_{EPM} = median(\hat{\gamma}(1,n), \hat{\gamma}(1,n), \cdots, \hat{\gamma}(n-1,n)) \quad (2.22)$$

$$\hat{\sigma}_{EPM} = median(\hat{\sigma}(1,n), \hat{\sigma}(1,n), \cdots, \hat{\sigma}(n-1,n)) \quad (2.23)$$

(Castillo and Hadi , 1997)

2.10 Metode Newton – Raphson

Metode Newton-Raphson bisa juga dikembangkan dari perluasan deret Taylor. Adapun perluasan deret Taylor disekitar $x_{n+1} = x_n$ dapat dinyatakan sebagai :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(x_{n+1} - x_n) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_n)}{(n-1)!}(x_{n+1} - x_n)^{(n-1)} + R_n(x)$$

dimana : $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

Dengan memotong deret setelah suku turunan pertama, diperoleh sebuah pendekatan sebagai berikut:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Jika x_{n+1} merupakan akar dari $f(x_{n+1})$, maka $f(x_{n+1})$ akan sama dengan nol atau:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Sehingga diperoleh metode Newton-Raphson adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.24}$$

Metode Newton-Raphson mempunyai langkah-langkah sebagai berikut :

1. Masukkan nilai awal x_0
2. Tentukan persamaan fungsi f(x) dan turunan pertamanya
3. Masukkan persamaan fungsi f(x) dan turunan pertamanya ke dalam rumus Newton Raphson hingga error < ε, sehingga diperoleh nilai akar fungsi.

(Ayres, 1964)

2.11 S-PLUS

Dalam **(Everitt, 1994)** disebutkan bahwa S-Plus adalah suatu paket program yang memungkinkan membuat program sendiri walaupun didalamnya sudah tersedia banyak program internal yang siap digunakan. Kelebihan dari paket program ini adalah baik program internal maupun program yang pernah dibuat digunakan sebagai sub program dari program yang akan dibuat.

Beberapa perintah internal yang digunakan dalam S – PLUS

a. function(...)

function(...) digunakan untuk menunjukkan fungsi yang akan digunakan dalam program

Bentuknya adalah : function(...)

b. length(...)

length(...) merupakan perintah untukmenunjukkan banyaknya data

Bentuknya adalah : length(...)

c. sort(...)

Untuk mengurutkan data dari terkecil sampai ke yang terbesar.

Bentuknya adalah : sort (...)

d. matrix(a, b, c)

Untuk membentuk sebuah matrik yang anggotanya a dengan jumlah baris sebanyak b dan jumlah kolom sebanyak c.

Bentuknya adalah : matrix (..., ..., ...)

e. rep(a,b)

Untuk membentuk sebuah vektor yang anggotanya a sebanyak b

Bentuknya adalah : rep(..., ...)

f. for (i in 1:n)

Untuk melakukan perulangan sebanyak n kali.

Bentuknya adalah : for (… in …:…)

g. abs(…)

Untuk membuat harga mutlak dari suatu bilangan

Bentuknya adalah : abs(…)

(Everitt , 1994)

BAB III

METODE PENULISAN

Dalam penulisan skripsi ini, langkah -langkah yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Penelusuran pustaka yang berkaitan dengan estimasi parameter, distribusi Pareto, distribusi Pareto tergeneralisir, EPM , metode Newton-Raphson dan order statistik.
2. Mengestimasi parameter distribusi Pareto tergeneralisir menggunakan EPM dengan langkah-langkah sebagai berikut :

   A. Menentukan estimasi awal dengan langkah-langkah :

      a. Menentukan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Pareto tergeneralisir.

      b. Memilih dua order statistik yang berbeda .

      c. Mensubtitusi order statistik ke dalam persamaan fungsi distribusi kumulatif.

      d. Me-log-kan persamaan hasil subtitusi tersebut.

      e. Menyelesaikan persamaan yang telah di-log-kan dengan menggunakan metode Newton Raphson.

      f. Mendapatkan estimator awal dari parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir.

B. Menentukan estimasi akhir :

a. Mendapatkan estimator awal parameter distribusi Pareto tergeneralisir untuk semua pasang order statistik yang berbeda.

b. Menentukan nilai median dari semua estimator awal untuk memperoleh estimator akhir.

3. Menyusun algoritma untuk estimasi parameter distribusi Pareto tergeneralisir.
4. Membuat program berdasarkan algoritma yang telah dibuat dengan menggunakan program S-Plus.
5. Menerapkan program pada data sekunder.

BAB IV

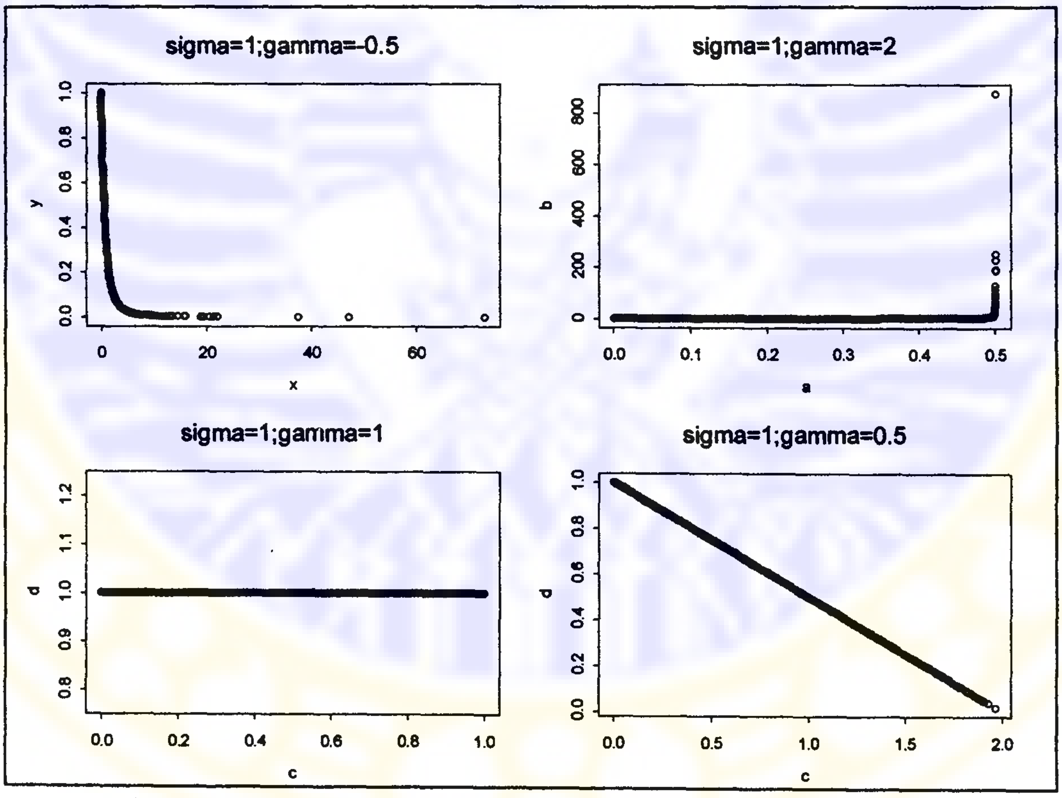
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Distribusi Pareto Tergeneralisir

Berdasarkan fungsi distribusi kumulatif pada persamaan (2.2), maka fungsi kepadatan peluang (fkp) dari distribusi Pareto tergeneralisir adalah :

$$f(x;\sigma,\gamma)=\frac{dF(x;\sigma,\gamma)}{dx}=\frac{1}{\sigma}\left(1-\gamma\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \text{ untuk } x>0 \text{ dan } \gamma\neq 0\ ,\sigma>0.$$

dengan σ adalah parameter skala dan γ adalah parameter bentuk. Macam-macam bentuk dari distribusi Pareto tergeneralisir dapat dilihat pada gambar 4.1 berikut :



Gambar 4.1. Plot fkp distribusi Pareto tergeneralisir

4.2 *Generate* Distribusi Pareto Tergeneralisir

Untuk dapat men*generate* (membangkitkan) data berdistribusi Pareto tergeneralisir, terlebih dulu harus membangkitkan data berdistribusi Uniform dan hasilnya ditransformasi ke distribusi Pareto tergeneralisir. Misalkan U_i adalah variabel acak distribusi Uniform (0,1), maka transformasi distribusi Uniform ke distribusi Pareto tergeneralisir menggunakan metode transformasi invers yaitu :

$$F(x_i) = U_i$$

Dari persamaan (4.1) didapatkan :

$$1 - (1 - \gamma \frac{x_i}{\sigma})^{\frac{1}{\gamma}} = U_i$$

Akan sama artinya dengan :

$$(1 - \gamma \frac{x_i}{\sigma})^{\frac{1}{\gamma}} = 1 - U_i$$

Jika kedua ruas dipangkatkan γ :

$$1 - \gamma \frac{x_i}{\sigma} = (1 - U_i)^{\gamma}$$

Akan sama artinya dengan :

$$\gamma \frac{x_i}{\sigma} = 1 - (1 - U_i)^{\gamma}$$

Jika kedua ruas dikalikan $\frac{\sigma}{\gamma}$, maka didapatkan variabel acak distribusi Pareto tergeneralisir :

$$x_i = \frac{\sigma}{\gamma}(1 - (1 - U_i)^{\gamma})$$

4.3 Estimasi Parameter Distribusi Pareto Tergeneralisir

Dalam mengestimasi parameter-parameter pada distribusi Pareto tergeneralisir digunakan metode estimasi EPM (*Elemental Percentile Method*). EPM terdiri dari dua tahap yaitu tahap estimasi awal dan tahap estimasi akhir. Tahap pertama merupakan tahap penghitungan estimator awal parameter γ dan σ setiap pasang order statistik. Sedangkan tahap kedua merupakan tahap penggabungan semua estimator awal yang telah didapatkan. Selain itu tahap kedua merupakan tahap penentuan estimator akhir parameter γ dan σ.

Parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir yang diestimasi antara lain γ (parameter bentuk) dan σ (parameter skala). Menurut **Castillo dan Hadi (1997)** untuk memudahkan pengestimasian parameter γ dan σ, digunakan bentuk lain dari persaman fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yaitu dengan memisalkan $\delta = \frac{\sigma}{\gamma}$. Dengan demikian persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir pada persamaan (2.2) berubah menjadi :

$$F(x;\gamma,\sigma) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{dengan } \gamma \neq 0, \delta\gamma > 0 \qquad (4.1)$$

Berikut ini pengestimasian parameter-parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan EPM.

4.3.1 Tahap Estimasi Awal

Pada tahap ini, langkah awal yang harus dilakukan adalah memilih dua order statistik dari semua order statistik yang diamati. Misal order statistik yang pertama adalah $x_{i:n}$ dan $x_{j:n}$ merupakan order statistik kedua dengan asumsi $x_{i:n}$ < $x_{j:n}$. Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.9, pemilihan pasangan order statistik tidak digunakan kombinasi karena menyebabkan jumlah pasangan order statistik terlalu besar jika n besar. Oleh karena itu digunakan alternative lain dalam pemilihan pasangan order statistik. **Menurut Castillo dan Hadi(1997)** dipilih j=n sebagai order statistik kedua dan i=1, 2, ..., n-1 sebagai order statistik pertama. Selanjutnya kedua order statistik tersebut disubtitusikan pada persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yang diberikan oleh persamaan (4.1). Kemudian persamaan hasil subtitusi tersebut disamadengankan dengan nilai persentil masing-masing order statistik.

Adapun langkah-langkah pada tahap estimasi awal adalah sebagai berikut :

a. **Penentuan persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yang telah disubtitusi dengan order statistik**

Dua order statistik $x_{i:n}$ dan $x_{j:n}$ disubtitusikan pada persamaan (4.1) sehingga didapatkan persamaan berikut :

$$F(x_{i:n};\gamma,\sigma) = 1-\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{dan} \quad F(x_{j:n};\gamma,\sigma) = 1-\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) merupakan persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yang telah disubtitusi dengan order statistik.

b. Penentuan nilai persentil

Masing-masing order statistik yang diamati dihitung nilai persentilnya. Menurut **Castillo dan Hadi(1997)** nilai persentil dihitung menggunakan persamaan (2.5) yaitu $p_{i:n}$ untuk nilai persentil order statistik pertama dan $p_{j:n}$ untuk nilai persentil order statistik kedua.

$$p_{i:n} = \frac{i-\theta}{n+\beta} \quad \text{dan} \quad p_{j:n} = \frac{j-\theta}{n+\beta} \quad \text{dengan i=1,2,...,n-1 dan j=n.}$$

Menurut **Castillo dan Hadi(1997)** dipilih nilai $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ untuk mendapatkan hasil estimasi yang baik.

c. Penentuan nilai C_i dan C_j

Setelah didapatkan nilai persentil dari masing-masing order statistik, maka langkah selanjutnya adalah menentukan nilai C_i dan C_j. Menurut **Castillo dan Hadi(1997)** nilai C_i dan C_j ditentukan menggunakan persamaan (2.7) yaitu :

$$C_i = \ln\left(1 - p_{i:n}\right) \quad \text{dan} \quad C_j = \ln\left(1 - p_{j:n}\right)$$

Dengan $p_{i:n}$ dan $p_{j:n}$ diberikan oleh persamaan (2.5).

d. Penentuan persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yang disamadengankan dengan nilai persentil masing-masing order statistik

Persamaan fungsi distribusi kumulatif distribusi Pareto tergeneralisir yang telah disubtitusi dengan order statistik pada persamaan (4.2) disamadengankan dengan nilai persentil pada persamaan (2.5) sehingga diperoleh :

$$1-\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = p_{i:n} \quad \text{dan} \quad 1-\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = p_{j:n}$$

Kemudian dilogkan maka akan didapatkan persamaan berikut :

$$\ln\left(1-p_{i:n}\right) = \frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right) \quad \text{dan} \quad \ln\left(1-p_{j:n}\right) = \frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right)$$

Karena $C_i = \ln\left(1-p_{i:n}\right)$ dan $C_j = \ln\left(1-p_{j:n}\right)$ sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$\gamma C_i = \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right) \quad \text{dan} \quad \gamma C_j = \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right) \tag{4.3}$$

Dengan mengeliminasi γ pada persamaan (4.3) didapatkan :

$$C_i \ln\left(1-\frac{x_{j:n}}{\delta}\right) = C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)$$

Kemudian $C_j \ln\left(1-\frac{x_{i:n}}{\delta}\right)$ dipindahkan ke ruas kanan maka

$$C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta}\right) = 0 \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) merupakan persamaan yang digunakan untuk menentukan estimator parameter δ .

e. Penentuan nilai δ_0

Nilai δ_0 ditentukan dengan mendifferensialkan persamaan (4.4) terhadap parameter δ lalu hasil dari differensial tersebut disamadenganakan nol dan diselesaikan. Berikut ini merupakan hasil differensial dari persamaan (4.4) :

$$\frac{1}{\delta}\left[\frac{C_i\, x_{j:n}}{\delta - x_{j:n}} - \frac{C_j\, x_{i:n}}{\delta - x_{i:n}}\right] = 0 \tag{4.5}$$

Penyelesaian dari persamaan (4.5) adalah

$$\frac{1}{\delta} = 0 \text{ atau } \left[\frac{C_i\, x_{j:n}}{\delta - x_{j:n}} - \frac{C_j\, x_{i:n}}{\delta - x_{i:n}}\right] = 0$$

Untuk $\frac{1}{\delta} = 0$ diperoleh penyelesaian persamaan (4.4) yaitu $\delta = -\infty$ atau $\delta = \infty$.

Sedangkan untuk $\frac{C_i\, x_{j:n}}{\delta - x_{j:n}} - \frac{C_j\, x_{i:n}}{\delta - x_{i:n}} = 0$ diperoleh penyelesaian persamaan (4.4) sebagai berikut :

$$\delta_0 = \frac{x_{i:n}\, x_{j:n}\left(C_j - C_i\right)}{C_j\, x_{i:n} - C_i\, x_{j:n}} \tag{4.6}$$

f. Penentuan estimator parameter δ

Seperti yang telah dijelaskan pada sub-bab 4.1 bahwa nilai estimator parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ ditentukan melalui estimator parameter $\hat{\delta}$. Oleh karena itu sebelum dicari nilai estimator parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ terlebih dahulu dihitung nilai estimator parameter $\hat{\delta}$.

Estimator parameter $\hat{\delta}$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (4.4). Persamaan (4.4) tidak dapat diselesaikan secara analitis karena masih dalam bentuk fungsi implisit. Oleh karena itu diperlukan metode lain untuk menyelesaikannya, dalam kasus ini akan digunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimator parameter δ. Menurut persamaan (2.24) metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut :

$$\hat{\delta}^{(k+1)} = \hat{\delta}^{(k)} - \frac{f\left(\hat{\delta}^{(k)}\right)}{f'\left(\hat{\delta}^{(k)}\right)},$$

k=1,2,... merupakan iterasi dari Newton Raphson.

Langkah-langkah dari metode Newton-Raphson adalah sebagai berikut :

Langkah I :

Menentukan nilai awal untuk parameter $\hat{\delta}$. Nilai awal parameter $\hat{\delta}$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (4.6). Berdasarkan teorema (2.1) persamaan (4.6) mempunyai penyelesaian berhingga pada interval $(\delta_0, 0)$ jika $\delta_0 < 0$ dan pada interval $(\delta_0, x_{j:n})$ jika $\delta_0 > 0$ dengan δ_0 diberikan pada persamaan (4.6). Sehingga nilai awal parameter δ ada pada interval $(\delta_0, 0)$ atau pada interval $(\delta_0, x_{j:n})$.

Langkah II :

Menentukan persamaan fungsi $f(\hat{\delta}^{(k)})$ dan turunan pertamanya $f'(\hat{\delta}^{(k)})$. Fungsi $f(\hat{\delta}^{(k)})$ didapatkan dari persamaan (4.4) yaitu :

$$f(\hat{\delta}^{(k)}) = C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta^{(k+1)}}\right) - C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta^{(k+1)}}\right) \qquad (4.7)$$

dan turunan pertamanya $(f'(\hat{\delta}^{(k)}))$ yaitu :

$$f'(\hat{\delta}^{(k)}) = \frac{1}{\delta^{(k+1)}}\left[\frac{C_i x_{j:n}}{\delta^{(k+1)} - x_{j:n}} - \frac{C_j x_{i:n}}{\delta^{(k+1)} - x_{i:n}}\right] = 0 \qquad (4.8)$$

Langkah III :

Memasukkan persamaan fungsi $f(\hat{\delta}^{(k)})$ dan turunan pertamanya $f'(\hat{\delta}^{(k)})$ ke dalam rumus Newton–Raphson hingga $|\hat{\delta}^{(k+1)} - \hat{\delta}^{(k)}| < \varepsilon$, dengan $\varepsilon > 0$, sehingga diperoleh nilai akar fungsi sebagai nilai estimator parameter $\hat{\delta}$.

Selanjutnya nilai estimator $\hat{\delta}^{(k+1)}$ yang telah didapatkan dari langkah III, digunakan untuk mendapatkan nilai estimator $\hat{\gamma}^{(k+1)}$ dan $\hat{\sigma}^{(k+1)}$.

g. Penentuan estimator awal parameter $\hat{\gamma}$

Estimator awal parameter $\hat{\gamma}$ ditentukan dari nilai estimator $\hat{\delta}$ yang telah diperoleh sebelumnya. Setiap pasang order statistik yang diamati akan dihitung estimatornya yang dilambangkan dengan $\hat{\gamma}(i,j)$. Dengan mensubtitusikan nilai estimator $\hat{\delta}^{(k+1)}$ pada salah satu persamaan (4.3) akan diperoleh nilai estimator $\hat{\gamma}(i,j)$ sebagai berikut :

$$\gamma C_i = \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\hat{\delta}(i,j)}\right)$$

atau dapat juga ditulis

$$\hat{\gamma}(i,j) = \frac{\ln\left(1 - \dfrac{x_{i:n}}{\hat{\delta}(i,j)}\right)}{C_i} \tag{4.9}$$

h. Penentuan estimator awal parameter $\hat{\sigma}$

Seperti halnya estimator awal $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}$ juga dihitung untuk setiap pasang order statistik yang dilambangkan dengan $\hat{\sigma}(i,j)$. Seperti yang telah dijelaskan pada sub-bab 4.1 bahwa $\delta = \dfrac{\sigma}{\gamma}$ atau $\sigma = \gamma\delta$. Dengan mensubtitusikan nilai $\hat{\delta}(i,j)$ dan $\hat{\gamma}(i,j)$ yang telah didapatkan sebelumnya, maka estimator awal parameter $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}(i,j) = \hat{\gamma}(i,j)\,\hat{\delta}(i,j) \tag{4.10}$$

4.3.2 Tahap Estimasi Akhir

Tahap estimasi akhir merupakan tahap penghitungan dan penggabungan semua estimator awal parameter $\hat{\gamma}(i,j)$ dan $\hat{\sigma}(i,j)$ untuk semua order statistik yang diamati. Selanjutnya akan dicari estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ secara keseluruhan. Menurut **Castillo dan Hadi(1997)** estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ ditentukan dengan mengambil nilai median atau nilai tengah dari gabungan estimator awal parameter $\hat{\gamma}(i,j)$ dan $\hat{\sigma}(i,j)$. Dari persamaan (4.9) dan (4.10) didapatkan persamaan untuk estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut :

$$\hat{\gamma}_{EPM} = median\left(\hat{\gamma}(1,n), \hat{\gamma}(1,n), \cdots, \hat{\gamma}(n-1,n)\right) \tag{4.11}$$

$$\hat{\sigma}_{EPM} = median\left(\hat{\sigma}(1,n), \hat{\sigma}(1,n), \cdots, \hat{\sigma}(n-1,n)\right) \tag{4.12}$$

4.4 Algoritma Program

Algoritma program dibuat berdasarkan teori-teori yang telah dibahas dari subbab sebelumnya. Pada pembahasan skripsi ini akan dibuat algoritma-algoritma sebagai berikut :

1. Algoritma untuk menentukan pasangan dua order statistik

1. Input data.
2. Urutkan data.
3. Tentukan order statistik yang pertama yaitu $x_{i:n}$, i = 1, 2,..., n-1 dengan n adalah banyaknya data.
4. Tentukan order statistik yang kedua yaitu $x_{j:n}$ dengan j = n.

2. Algoritma untuk menentukan nilai awal

1. Input data.
2. Hitung nilai persentil masing-masing order statistik menggunakan persamaan (2.5).
3. Tentukan C_i dan C_j menggunakan persamaan (2.7).
4. Hitung δ_0 sebagai nilai awal δ menggunakan persamaan (4.6).

3. Algoritma untuk menentukan nilai estimator δ dengan metode Newton-Raphson

1. Tentukan nilai awal parameter δ .
2. Tentukan $f(\delta)$ yang didapatkan dari persamaan (4.7) dan $f'(\delta)$yang didapatkan dari persamaan (4.8).
3. Masukkan ke rumus Newton-Raphson $\hat{\delta}^{(k+1)} = \hat{\delta}^{(k)} - \dfrac{f(\hat{\delta}^{(k)})}{f'(\hat{\delta}^{(k+1)})}$

   k=1,2,… merupakan iterasi dari Newton-Raphson.
4. Jika $\left|\hat{\delta}^{(k+1)} - \hat{\delta}^{(k)}\right| < \varepsilon$ berhenti dan jika tidak ulangi langkah (3).

5. Algoritma untuk menentukan nilai estimator awal parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$

1. Pilih $x_{i:n}$ dan $x_{j:n}$ dengan $x_{i:n} < x_{j:n}$.
2. Hitung nilai persentil $p_{i:n}$ dan $p_{j:n}$, dengan $p_{i:n} = \dfrac{i}{n+1}$ dan $p_{j:n} = \dfrac{j}{n+1}$.
3. Hitung nilai C_i dan C_j, dengan $C_i = \ln(1 - p_{i:n}) < 0$ dan $C_j = \ln(1 - p_{j:n}) < 0$.

4. Cari nilai $\delta_0 = \dfrac{x_{i:n} x_{j:n}(C_j - C_i)}{C_j x_{i:n} - C_i x_{j:n}}$.

5. Cari nilai $\hat{\delta}(i,j)$ dengan metode Newton-Raphson.

6. Cari nilai $\hat{\gamma}(i,j)$ dengan $\hat{\gamma}(i,j) = \dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{x_{i:n}}{\hat{\delta}(i,j)}\right)}{C_i}$.

7. Cari nilai $\hat{\sigma}(i,j)$ dengan $\hat{\sigma}(i,j) = \hat{\gamma}(i,j)\ \hat{\delta}(i,j)$.

5. Algoritma untuk menentukan nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$

1. Ulangi langkah ke-1 sampai ke-7 pada algoritma (4) untuk semua pasang order statistik.
2. Tentukan nilai median dari $\hat{\sigma}(i,j)$.
3. Tentukan nilai median dari $\hat{\gamma}(i,j)$.

4.5 Implementasi Algoritma ke Program Komputer

Bahasa pemrograman yang digunakan pada pembahasan kali ini yaitu program S-Plus. Program ini nantinya akan digunakan pada penentuan nilai estimator parameter distribusi Pareto tergeneralisir. Didalam S-Plus terdapat cukup banyak fungsi standar yang dapat memudahkan pengerjaan program.

Berdasarkan algoritma yang telah disusun pada sub-bab 4.2 maka dibuat program (lihat lampiran 1) untuk mendapatkan estimator parameter distribusi Pareto Tergeneralisir yaitu :

a. Program **estimasi** merupakan program utama untuk menentukan nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ dengan menggunakan metode EPM.

b. Program **kombinasi** untuk menentukan semua pasangan order statistik yang diamati.

c. Program **hit1** untuk menentukan nilai persentil masing-masing order statistik.

d. Program **hit2** untuk menentukan nilai awal parameter δ .

e. Program **Newton** untuk menentukan nilai estimator parameter δ .

4.6 Data

Program yang telah dibuat akan diuji coba menggunakan dua jenis data yaitu :

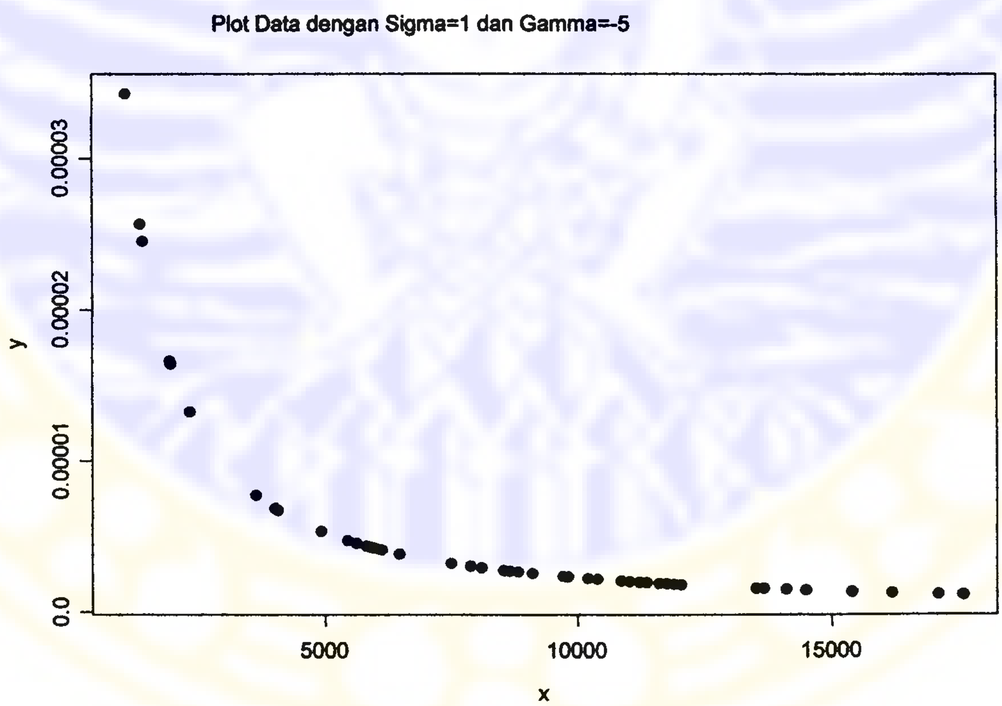
a. Data Sekunder.

Data sekunder yang digunakan dalam pembahasan ini adalah data berdistribusi Pareto tergeneralisir yang diambil dari **Castillo dan Hadi(1997).** Data tersebut merupakan data tentang daya tahan logam pembentuk kapal (dalam satuan jam) yang dihitung pada tingkat tekanan 70%. Data sekunder yang digunakan dalam pembahasan dapat dilihat pada tabel 4.1 berikut ini :

Tabel 4.1. Data tentang daya tahan logam pembentuk kapal (dalam satuan jam) yang dihitung pada tingkat tekanan 70%

i	xi	i	xi	i	xi	i	xi
1	1051	14	5817	27	9711	40	12044
2	1337	15	5905	28	9806	41	13520
3	1389	16	5956	29	10205	42	13670
4	1921	17	6068	30	10396	43	14110
5	1942	18	6121	31	10861	44	14496
6	2322	19	6473	32	11026	45	15395
7	3629	20	7501	33	11214	46	16179
8	4006	21	7886	34	11362	47	17092
9	4012	22	8108	35	11604	48	17568
10	4063	23	8546	36	11608	49	17588
11	4921	24	8666	37	11745		
12	5445	25	8831	38	11762		
13	5620	26	9106	39	11895		

Berikut ini merupakan plot data sekunder :



Gambar 4.2. Plot Data Sekunder

b. Data Bangkitan.

Data bangkitan yang digunakan dalam pembahasan ini adalah data bangkitan dari distribusi uniform U(0,1) yang ditransformasi ke distribusi Pareto tergeneralisir. Untuk dapat membangkitkan data berdistribusi Pareto tergeneralisir akan digunakan program **Pareto(**σ, γ, n**)** dengan σ parameter skala dan γ parameter bentuk distribusi Pareto tergeneralisir dan n merupakan jumlah data. Dalam pembahasan ini dipilih data yang dibangitkan dengan program **Pareto(2, 1, 100)** yang artinya $\sigma=2$ dan $\gamma=1$ sebanyak 100.

4.7 Analisa Data

a. Data Sekunder.

Langkah awal yang harus dilakukan adalah memilih dua order statistik dari semua order statistik yang diamati dengan menggunakan program **kombinasi** (lampiran 1-2). Dalam pemilihan order statistik ini, diasumsikan bahwa order statistik pertama lebih kecil dari order statistik kedua. Oleh karena itu dipilih data terbesar sebagai order statistik kedua. Sedangkan order statistik pertama adalah data ke-i dengan i=1, ..., (n-1) dimana n adalah jumlah data. Sehingga banyaknya pasangan dari order statistik adalah n-1. Pasangan order statistik yang diamati dapat dilihat pada tabel 4.2 berikut ini :

Tabel 4.2. Pasangan Order Statistik

i	x_i	x_j	i	x_i	x_j
1	1051	17588	25	8831	17588
2	1337	17588	26	9106	17588
3	1389	17588	27	9711	17588
4	1921	17588	28	9806	17588
5	1942	17588	29	10205	17588
6	2322	17588	30	10396	17588
7	3629	17588	31	10861	17588
8	4006	17588	32	11026	17588
9	4012	17588	33	11214	17588
10	4063	17588	34	11362	17588
11	4921	17588	35	11604	17588
12	5445	17588	36	11608	17588
13	5620	17588	37	11745	17588
14	5817	17588	38	11762	17588
15	5905	17588	39	11895	17588
16	5956	17588	40	12044	17588
17	6068	17588	41	13520	17588
18	6121	17588	42	13670	17588
19	6473	17588	43	14110	17588
20	7501	17588	44	14496	17588
21	7886	17588	45	15395	17588
22	8108	17588	46	16179	17588
23	8546	17588	47	17092	17588
24	8666	17588	48	17568	17588

Selanjutnya dari masing-masing pasangan order statistik tersebut dihitung nilai persentilnya yaitu $p_{i:n}$ dan $p_{j:n}$. Kemudian dicari nilai C_i dan C_j menggunakan program **hit1** (lampiran 1-2). Nilai persentil masing-masing order statistik dapat dilihat pada tabel 4.3 berikut ini :

Tabel 4.3. Nilai Persentil Masing-Masing Order Statistik

i	p_i	p_j	C_i	C_j	i	p_i	p_j	C_i	C_j
1	0.02	0.98	-0.02020271	-3.912023	25	0.5	0.98	-0.6931472	-3.912023
2	0.04	0.98	-0.04082199	-3.912023	26	0.52	0.98	-0.7339692	-3.912023
3	0.06	0.98	-0.0618754	-3.912023	27	0.54	0.98	-0.7765288	-3.912023
4	0.08	0.98	-0.08338161	-3.912023	28	0.56	0.98	-0.8209806	-3.912023
5	0.1	0.98	-0.10536052	-3.912023	29	0.58	0.98	-0.8675006	-3.912023
6	0.12	0.98	-0.12783337	-3.912023	30	0.6	0.98	-0.9162907	-3.912023
7	0.14	0.98	-0.15082289	-3.912023	31	0.62	0.98	-0.967584	-3.912023
8	0.16	0.98	-0.17435339	-3.912023	32	0.64	0.98	-1.0216513	-3.912023
9	0.18	0.98	-0.19845094	-3.912023	33	0.66	0.98	-1.0788097	-3.912023
10	0.2	0.98	-0.22314355	-3.912023	34	0.68	0.98	-1.1394343	-3.912023
11	0.22	0.98	-0.24846136	-3.912023	35	0.7	0.98	-1.2039728	-3.912023
12	0.24	0.98	-0.27443685	-3.912023	36	0.72	0.98	-1.2729657	-3.912023
13	0.26	0.98	-0.30110509	-3.912023	37	0.74	0.98	-1.3470737	-3.912023
14	0.28	0.98	-0.32850407	-3.912023	38	0.76	0.98	-1.4271164	-3.912023
15	0.3	0.98	-0.35667494	-3.912023	39	0.78	0.98	-1.5141277	-3.912023
16	0.32	0.98	-0.38566248	-3.912023	40	0.8	0.98	-1.6094379	-3.912023
17	0.34	0.98	-0.41551544	-3.912023	41	0.82	0.98	-1.7147984	-3.912023
18	0.36	0.98	-0.4462871	-3.912023	42	0.84	0.98	-1.8325815	-3.912023
19	0.38	0.98	-0.4780358	-3.912023	43	0.86	0.98	-1.9661129	-3.912023
20	0.4	0.98	-0.51082562	-3.912023	44	0.88	0.98	-2.1202635	-3.912023
21	0.42	0.98	-0.54472718	-3.912023	45	0.9	0.98	-2.3025851	-3.912023
22	0.44	0.98	-0.5798185	-3.912023	46	0.92	0.98	-2.5257286	-3.912023
23	0.46	0.98	-0.61618614	-3.912023	47	0.94	0.98	-2.8134107	-3.912023
24	0.48	0.98	-0.65392647	-3.912023	48	0.96	0.98	-3.2188758	-3.912023

Setelah didapatkan nilai persentil masing-masing order statistik, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai δ_0 menggunakan program **hit2** (lampiran 1-2). Jika nilai δ_0 >0 maka nilai awal parameter δ ada pada interval $(\delta_0, x_{j:n})$ dan jika δ_0 <0 nilai awal parameter δ ada pada interval $(\delta_0, 0)$. Nilai δ_0 pada pembahasan ini tidak ada yang lebih kecil dari nol. Sehingga nilai awal parameter δ hanya ada pada interval $(\delta_0, x_{j:n})$.

Langkah selanjutnya yaitu pengestimasian parameter δ dengan metode Newton-Raphson. Penghitungan estimator δ dilakukan menggunakan program **Newton**(lampiran 1-3). Nilai estimator parameter δ dapat dilihat pada tabel 4.4 berikut ini :

Tabel 4.4. Nilai Estimator Parameter δ

i	$\hat{\delta}$	i	$\hat{\delta}$
1	17588.11	25	17985.83
2	17588.03	26	18009.56
3	17688.5	27	17941.97
4	17667.76	28	18013.46
5	17834.75	29	18001.53
6	17837.95	30	18051.42
7	17632.73	31	18019.27
8	17642.55	32	18080.04
9	17699.5	33	18140.59
10	17775.93	34	17588.07
11	17692.5	35	18280.96
12	17681.04	36	17588.08
13	17712.34	37	18618.87
14	17744.56	38	18896.64
15	17802.16	39	19146.15
16	17881.69	40	17588.03
17	17958.08	41	17588
18	18069.16	42	18736.89
19	18066.96	43	18755.06
20	17863.96	44	18850.06
21	17860.19	45	18463.14
22	17892.88	46	18187.18
23	17876.04	47	17782.01
24	17588.1	48	17594.56

Selanjutnya nilai estimator $\hat{\delta}$ yang diperoleh digunakan untuk menghitung estimator awal $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ dengan menggunakan program **estimasi**(lampiran 1-1). Nilai estimator awal parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ dapat dilihat pada tabel 4.5 berikut ini :

Tabel 4.5. Nilai Estimator Awal Parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$

i	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	i	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$
1	3.0498961	53641.91	25	0.9742556	17522.8
2	1.9367571	34063.73	26	0.9597835	17285.28
3	1.3216927	23378.76	27	1.0034895	18004.58
4	1.3804829	24390.04	28	0.9574839	17247.6
5	1.0942031	19514.83	29	0.9645848	17364
6	1.0909489	19460.29	30	0.9361772	16899.33
7	1.5278395	26939.98	31	0.9541017	17192.21
8	1.4772292	26062.09	32	0.9212612	16656.44
9	1.2952992	22926.15	33	0.8924504	16189.58
10	1.1629556	20672.62	34	0.9113955	16029.69
11	1.3117719	23208.53	35	0.8365618	15293.15
12	1.3413188	23715.91	36	0.8474598	14905.19
13	1.2676284	22452.67	37	0.7397136	13772.63
14	1.2092009	21456.73	38	0.6825111	12897.16
15	1.1299364	20115.31	39	0.6412549	12277.56
16	1.0503548	18782.12	40	0.7173289	12616.41
17	0.9923478	17820.66	41	0.8537828	15016.33
18	0.9268231	16746.92	42	0.7136202	13371.02
19	0.9279651	16765.51	43	0.7098575	13313.42
20	1.0660139	19043.23	44	0.691144	13028.11
21	1.0694773	19101.07	45	0.7794307	14390.74
22	1.0409542	18625.67	46	0.8724176	15866.81
23	1.055236	18863.44	47	1.1549104	20536.63
24	1.0378712	18254.18	48	2.0181216	35507.95

Setelah didapatkan nilai estimator awal parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$, langkah selanjutnya adalah menentukan nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$. Nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ ditentukan dengan mencari nilai median dari nilai estimator awal parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$. Nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ yang dihitung menggunakan program **estimasi** (lampiran 1-1) adalah $\hat{\gamma} = 0.9979187$ dan $\hat{\sigma} = 17912.62$. Nilai estimator tersebut berbeda dengan nilai estimator parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ menurut **Castillo dan Hadi(1997).** Perbedaan nilai estimator tersebut disebabkan karena adanya perbedaan pendekatan numerik yang digunakan untuk mendapatkan estimator parameter $\hat{\delta}$. Pada **Castillo dan Hadi(1997)** digunakan metode *bisection* sedangkan pada skripsi ini digunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan estimator parameter $\hat{\delta}$.

b. Data Bangkitan.

Langkah awal yang harus dilakukan adalah membangkitkan data yang berdistribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan program **Pareto**(lihat lampiran 1-6). Langkah selanjutnya untuk pengestimasian parameter distribusi Pareto tergeneralisir pada data bangkitan analog dengan langkah pengestimasian parameter distribusi Pareto tergeneralisir pada data sekunder. Hasil estimator awal parameter $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ dapat dilihat pada lampiran 3.

Nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ yang dihitung menggunakan program **estimasi** (lampiran 1-1) adalah $\hat{\gamma} = 1.013595$ dan $\hat{\sigma} = 1,981651$. Nilai estimator yang diperoleh mendekati nilai parameter yang digunakan untuk membangkitkan data yang berdistribusi Pareto tergeneralisir yaitu $\sigma = 2$ dan $\gamma = 1$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

1. Estimator parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan menggunakan metode estimasi EPM adalah sebagai berikut :

   a. Nilai estimator $\hat{\delta}$ tidak dapat diselesaikan secara analitis sehingga masih dalam bentuk fungsi implisit dibawah ini :

   $$C_j \ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\delta^{(k+1)}}\right) - C_i \ln\left(1 - \frac{x_{j:n}}{\delta^{(k+1)}}\right) = 0$$

   Nilai estimasi $\hat{\delta}$ diperoleh dengan pendekatan metode Newton-Raphson.

   b. Nilai estimator awal $\hat{\gamma}$ adalah sebagai berikut :

   $$\hat{\gamma}(i,j) = \frac{\ln\left(1 - \frac{x_{i:n}}{\hat{\delta}(i,j)}\right)}{C_i}$$

   c. Nilai estimator awal $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut :

   $$\hat{\sigma}(i,j) = \hat{\gamma}(i,j)\ \hat{\delta}(i,j)$$

   d. Nilai estimator akhir $\hat{\gamma}$ adalah sebagai berikut :

   $$\hat{\gamma}_{EPM} = median\left(\hat{\gamma}(1,2),\ \hat{\gamma}(1,3), \cdots,\ \hat{\gamma}(n-1,n)\right)$$

   e. Nilai estimator akhir $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut :

   $$\hat{\sigma}_{EPM} = median\left(\hat{\sigma}(1,2),\ \hat{\sigma}(1,3), \cdots,\ \hat{\sigma}(n-1,n)\right)$$

2. Nilai estimator parameter distribusi Pareto tergeneralisir dengan metode estimasi EPM menggunakan program S-Plus adalah sebagai berikut :

a. Nilai estimator parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ untuk data sekunder adalah $\hat{\gamma} = 0.9979187$ dan $\hat{\sigma} = 17912.62$.

b. Nilai estimator parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ untuk data bangkitan yang berdistribusi Pareto tergeneralisir dengan $\gamma = 1$ dan $\sigma = 2$ adalah $\hat{\gamma} = 1.013595$ dan $\hat{\sigma} = 1{,}981651$.

5.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini metode yang digunakan dalam pemilihan order statistik yaitu dengan mengambil data terbesar sebagai order statistik kedua. Diharapkan digunakan metode lain dalam pemilihan order statistik yaitu dengan cara kombinasi untuk mendapatkan hasil estimasi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F.A., 1964, *Theory and Problems of Calculus*, Mc. Graw-Hill, Inc., Britain.

Bain, L.J., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition, Duxbury Press, USA.

Castillo, E., and Hadi, A. S (1995a), *A Method for Estimating Parameters and Quantiles of Distributions of Continuous Random Variables,* Computational Statistics and Data Analysis, 20, 421-439.

Castillo, E., and Hadi, A. S (1997), *Fitting the Generalized Pareto Distribution to Data,* Journal of the American Statistical Association, 92, 1609-1619.

Everitt, S. Brian, 1994, *A Handbook of Statistical Analyses Using S-Plus*, Chapman & Hall, London.

Hogg, R.V. and Craig, A.T., 1995, *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice-Hall, inc., New Jersey.

Mood, A. M., Graybill, F.A. and Boes, D.C., 1974, *Introduction to The Theory of Statistics*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc. , Singapore.

Spiegel, M.R., 1988, *Statistika*, Edisi Kedua, Penerjemah : I Nyoman Susila dan Ellen Gunawan, Erlangga, Jakarta.

Supranoto, J., 1987, *Statistik Teori dan Aplikasi*, Edisi Kelima Jilid 1, Erlangga, Jakarta.

Tajvidi, N., 1996b, *Multivariate Generalized Pareto Distribution*, http://citeseer.nj.nec.com/tajvidi96multivariate.html., tgl. Akses 16 februari 2004.

Trehin, P., *Pareto Distribution*, http://perso.wanadoo.fr/gilles.trehin.urville/pareto_distribution.html, tgl. Akses 5 Februari 2004.

Lampiran Data Bangkitan

DATA BANGKITAN BERDISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR

DENGAN $\sigma = 2$ DAN $\gamma = 1$

i	xi	i	xi	i	xi	i	xi
1	0.68691762	26	0.54279030	51	0.24986426	76	1.46450831
2	1.21283229	27	0.91008888	52	1.66554085	77	1.24031910
3	1.46833350	28	0.36623897	53	1.75904687	78	0.13607524
4	1.66526508	29	0.50096145	54	0.07902766	79	0.61125660
5	1.30459349	30	0.94164342	55	1.21514578	80	1.66954731
6	1.82317655	31	0.17582880	56	0.10002228	81	1.95591566
7	0.48073535	32	0.03328667	57	1.85451200	82	0.98046496
8	0.49258247	33	1.15008811	58	1.08949025	83	1.36559423
9	0.91320643	34	1.90666933	59	0.25270910	84	1.28921133
10	1.12003585	35	0.24123791	60	0.36530524	85	0.65095058
11	1.71963074	36	1.80390121	61	0.47826554	86	1.01289779
12	0.48222348	37	1.00198407	62	1.42480857	87	1.37875318
13	1.12116990	38	0.19467108	63	1.81241357	88	0.48025154
14	0.15464006	39	0.56878941	64	1.57463555	89	1.22587403
15	1.27148432	40	1.68227918	65	1.84190658	90	0.49220103
16	1.66963539	41	0.53225748	66	0.12675479	91	0.30685402
17	1.39597527	42	0.29924821	67	1.20222966	92	0.40426228
18	0.84751852	43	0.78653051	68	0.14135446	93	1.21507090
19	1.73668620	44	1.89043051	69	1.29095004	94	0.57822637
20	0.57348328	45	1.45638147	70	0.35198160	95	0.40736955
21	1.16065165	46	1.09534470	71	0.53254233	96	1.15669644
22	1.63635281	47	0.38829549	72	1.52088433	97	0.52288063
23	0.66575081	48	0.15150368	73	0.79998129	98	0.67111356
24	1.77282079	49	1.76844961	74	1.88506857	99	0.95983260
25	0.85966793	50	1.36620900	75	0.89927995	100	1.20165226

Lampiran 1. Program

1.1. Program estimasi untuk menentukan nilai estimator akhir parameter $\hat{\gamma}$ dan $\hat{\sigma}$ dengan menggunakan metode EPM

```
estimasi<-function(a)
{
   a<-as.vector(a)
   hitung<-hit2(a)
   d<-hitung$D
   m<-length(d)
   y1<-kombinasi(a)$X[,1]
   c1<-hit1(a)$c1
   deltatopi<-rep(0,m)
   gammatopi<-rep(0,m)
   sigmatopi<-rep(0,m)
   g<-rep(0,m)
   deltatopi<-newton(a)
   for(i in 1:m){
   if(d[i]==0){
      cat("deltatopi=inf dan gammatopi=0 \n")
         }
   else{
      g[i]<-1-(y1[i]/deltatopi[i])
      gammatopi[i]<-log(g[i])/c1[i]
      sigmatopi[i]<-gammatopi[i]*deltatopi[i]
         }
      }
   gammaepm<-median(gammatopi)
   sigmaepm<-median(sigmatopi)
   return(a,deltatopi,g,gammatopi,sigmatopi,gammaepm,sigmaep
   m)
}
```

1.2. Program kombinasi untuk menentukan semua kemungkinan kombinasi dua order statistik yang diamati

```
kombinasi<-function(a)
{
   a <- as.vector(a)
   a<-sort(a)
   n <- length(a)
   index <- matrix(0, n-1, 2)
   X <- matrix(0, n-1, 2)
   for(j in 1:(n-1)) {
      index[j,  ] <- c(j, n)
      X[j,  ] <- a[as.vector(index[j,  ])]
   }
   return(index,X)
}
```

1.3. Program hit1 untuk menentukan nilai persentil masing- masing order statistik.

```
hit1<-function(a)
{
   a <- as.vector(a)
   a <- sort(a)
   n<-length(a)
   hsl<-kombinasi(a)
   indexhsl<-hsl$index
   Xhsl<-hsl$X
   p1<-rep(0,n-1)
   p2<-rep(0,n-1)
   c1<-rep(0,n-1)
   c2<-rep(0,n-1)
   for(i in 1:n-1){
      p1[i]<-indexhsl[i,1]/(n+1)
      p2[i]<-indexhsl[i,2]/(n+1)
      c1[i]<-log(1-p1[i])
      c2[i]<-log(1-p2[i])
      }
      return(p1,p2,c1,c2)
   }
```

1.4. Program hit2 untuk menentukan nilai awal delta

```
hit2<-function(a)
{
   a <- as.vector(a)
   a <- sort(a)
   n<-length(a)
   hsl<-kombinasi(a)
   X<-hsl$X
   hit<-hit1(a)
   c1<-hit$c1
   c2<-hit$c2
   D<-rep(0,n-1)
   delta<-rep(0,n-1)
   for(i in 1:(n-1)){
      D[i]<-c2[i]*X[i,1]-c1[i]*X[i,2]
      delta[i]<-(X[i,1]*X[i,2]*(c2[i]-c1[i]))/D[i]
   }
   return(D,delta)

}
```

1.5. Program Newton untuk menentukan nilai estimator awal parameter $\hat{\delta}$

```
newton<-function(a)
{
   N <- length(a)
   n <- N-1
   hitung <- hit1(a)
   kerja <- hit2(a)
   proses <- kombinasi(a)
   y1 <- proses$X[, 1]
   y2 <- proses$X[, 2]
   c1 <- hitung$c1
   c2 <- hitung$c2
   delta <- kerja$delta
   x1 <- rep(0, n)
   x2 <- rep(0, n)
   x3 <- rep(0, n)
   x4 <- rep(0, n)
   t <- rep(0, n)
   b1<-rep(0, n)
   b2<-rep(0, n)
   eror <- rep(0, n)
   deltanol1 <- rep(0, n)
   deltanol <- rep(0, n)
   fdeltanol <- rep(0, n)
   dfdeltanol <- rep(0, n)
   deltatopi <- rep(0, n)
```

Lampiran1-4

```
for(i in 1:n) {
   j <- 1
   if(delta[i]> 0) {
      deltanol[i] <- (delta[i] + y2[i])/2
      cat("elemen ke-", i, "\n")
      repeat {
         cat("iterasi ke-", j,"kondisi 1   \n")
         cat("deltanol=", deltanol[i], "\n")
         t[i] <- 1 - (y2[i]/deltanol[i])
            while(deltanol[i] <=y2[i]) {
           deltanol[i] <- deltanol[i] + 0.1
           t[i] <- 1 - (y2[i]/deltanol[i])
            }
         b1[i] <- log(t[i])
         b2[i] <- log(1 - (y1[i]/deltanol[i]))
         fdeltanol[i] <- (c1[i] * b1[i]) - (c2[i] * b2[i])
         x1[i] <- c1[i]/(deltanol[i] - y2[i])
         x2[i] <- c1[i]/deltanol[i]
         x3[i] <- c2[i]/(deltanol[i] - y1[i])
         x4[i] <- c2[i]/deltanol[i]
         dfdeltanol[i] <- (x1[i]) - (x2[i]) - (x3[i]) +
                          x4[i])
         deltanol1[i] <- fdeltanol[i]/dfdeltanol[i]
         deltatopi[i] <- deltanol[i] - deltanol1[i]
         eror[i] <- abs(deltatopi[i] -deltanol[i])
         if(eror[i] < 0.1)break
         deltanol[i] <- deltatopi[i]
         j <- j + 1
      }
   }
   else {
      deltanol[i] <- delta[i]/2
      cat("elemen ke-", i, "\n")
      repeat {
         cat("deltanol=", deltanol[i], "\n")
         cat("iterasi ke-", j,"kondisi 2   \n")
         t[i] <- 1 - (y2[i]/deltanol[i])
         while(deltanol[i] <=y2[i]) {
           deltanol[i] <- deltanol[i] + 0.1
           t[i] <- 1 - (y2[i]/deltanol[i])
              }
         b1[i] <- log(1 - (y2[i]/deltanol[i]))
         b2[i] <- log(1 - (y1[i]/deltanol[i]))
         fdeltanol[i] <- (c1[i] * b1[i]) - (c2[i] * b2[i])
         x1[i] <- c1[i]/(deltanol[i] - y2[i])
         x2[i] <- c1[i]/deltanol[i]
         x3[i] <- c2[i]/(deltanol[i] - y1[i])
         x4[i] <- c2[i]/deltanol[i]
         dfdeltanol[i] <- (x1[i]) - (x2[i]) - (x3[i]) +
                          (x4[i])
```

```
            deltanol1[i] <- fdeltanol[i]/dfdeltanol[i]
            deltatopi[i] <- deltanol[i] - deltanol1[i]
            eror[i] <- abs(deltatopi[i] - deltanol[i])
            if(eror[i] < 0.1)break
            deltanol[i] <- deltatopi[i]
            j <- j + 1
         }
      }
   }
   return(deltatopi)
}
```

1.6. Program Untuk Membangkitkan Data Berdistribusi Pareto Tergeneralisir

```
Pareto<-function(sigma,gamma,n)
{
   u<-runif(n)
   z<-(sigma/gamma)*(1-(1-u)^gamma)
   return(z)
}
```

Lampiran 2. Output Program

HASIL SIMULASI DATA SEKUNDER YANG BERDISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR DENGAN n=49

Nilai Estimator $\hat{\delta}$

```
$deltatopi:
[1]   17588.11  17588.03 17688.50 17667.76 17834.75 17837.95
      17632.73  17642.55 17699.50  17775.93
[11]  17692.50  17681.04 17712.34 17744.56 17802.16 17881.69
      17958.08  18069.16 18066.96  17863.96
[21]  17860.19  17892.88 17876.04 17588.10 17985.83 18009.56
      17941.97  18013.46 18001.53  18051.42
[31]  18019.27  18080.04 18140.59 17588.07 18280.96 17588.08
      18618.87  18896.64 19146.15  17588.03
[41]  17588.00  18736.89 18755.06 18850.06 18463.14 18187.18
      17782.01  17594.56
```

Nilai Estimator awal $\hat{\gamma}$

```
$gammatopi:
 [1]  3.0498961  1.9367571  1.3216927  1.3804829  1.0942031
       1.0909489  1.5278395  1.4772292  1.2952992
[10]  1.1629556  1.3117719  1.3413188  1.2676284  1.2092009
       1.1299364  1.0503548  0.9923478  0.9268231
[19]  0.9279651  1.0660139  1.0694773  1.0409542  1.0552360
       1.0378712  0.9742556  0.9597835  1.0034895
[28]  0.9574839  0.9645848  0.9361772  0.9541017  0.9212612
       0.8924504  0.9113955  0.8365618  0.8474598
[37]  0.7397136  0.6825111  0.6412549  0.7173289  0.8537828
       0.7136202  0.7098575  0.6911440  0.7794307
[46]  0.8724176  1.1549104   2.0181216
```

Nilai Estimator awal $\hat{\sigma}$

```
$sigmatopi:
 [1]  53641.91  34063.73  23378.76  24390.04  19514.83  19460.29
      26939.98 26062.09  22926.15 20672.62
[11]  23208.53  23715.91  22452.67  21456.73  20115.31  18782.12
      17820.66 16746.92  16765.51 19043.23
[21]  19101.07  18625.67  18863.44  18254.18  17522.80  17285.28
      18004.58 17247.60  17364.00 16899.33
[31]  17192.21  16656.44  16189.58  16029.69  15293.15  14905.19
      13772.63 12897.16  12277.56 12616.41
[41]  15016.33  13371.02  13313.42  13028.11  14390.74  15866.81
      20536.63 35507.95
```

Nilai Estimator akhir $\hat{\gamma}$

```
$gammaepm:
[1] 0.9979187
```

Nilai Estimator akhir $\hat{\sigma}$

```
$sigmaepm:
[1] 17912.62
```

Lampiran 3. Output Program

HASIL SIMULASI DATA BANGKITAN DARI DISTRIBUSI PARETO TERGENERALISIR DENGAN n=100; σ=2; γ=1

Nilai Estimator $\hat{\delta}$

```
$deltatopi:

[1]   1.923363 1.955144 1.913486 1.908961 1.958428 1.940424
      1.960446 1.951098  1.947941 1.936470 1.963966
[12]  1.952268 1.965206 1.945393 1.942894 1.936843 1.923039
      1.956663 1.950920  1.971564 1.966837 1.931276
[23]  1.968606 1.954000 1.928666 1.965728 1.982555 1.987495
      1.985531 1.982246  1.972853 1.963353 1.958927
[34]  1.988878 2.004470 1.995406 1.979331 1.988474 1.997392
      1.997850 1.976581  1.969712 1.973992 1.973397
[45]  1.971723 1.973216 1.969221 1.961788 1.951652 1.938841
      1.926422 1.957930  1.969140 1.927452 1.933696
[56]  1.970550 1.970908 1.967991 1.961545 1.945337 1.933467
      1.938703 1.966566  1.980673 1.976229 1.982771
[67]  1.981211 1.978155 1.975152 1.967156 1.938416 1.944759
      1.971907 1.968408  1.978949 1.980350 1.980159
[78]  1.978070 1.950970 1.964967 1.952324 1.966747 1.965930
      1.960861 1.956433  1.938261 1.960018 1.970786
[89]  1.970127 1.972705 1.971311 1.925817 1.964653 1.969317
      1.974473 1.986978  1.957426 1.967943 2.012449
```

Nilai Estimator awal $\hat{\gamma}$

```
$gammatopi:

[1]   1.7545150   2.0629310   1.7805180   1.7002688   1.4183653
      1.2350170   1.1197890   1.0006586   1.0135946   1.0161830
[11]  1.1365519   1.0827489   0.9989905   1.1193975   1.0692075
      1.1628875   1.1430841   1.0558383   1.0649372   1.0398793
[21]  0.9956599   1.1582217   1.0822058   1.0408480   1.0117245
      0.9683217   0.9182570   0.8945577   0.9030355   0.8871706
[31]  0.8581564   0.8493144   0.8669945   0.8287988   0.7999128
      0.8298936   0.8741030   0.8637439   0.8390926   0.8355690
[41]  0.9742635   0.9693640   1.0113370   0.9999531   1.0325544
      1.0175437   0.9952080   1.0140861   1.0196027   1.0311883
[51]  1.0442842   1.0070839   1.0832199   1.0980689   1.1006599
      1.0409457   1.0541746   1.0377279   1.0208662   1.0665799
[61]  1.0497617   1.0324141   0.9840878   0.9466488   0.9387338
      0.9268898   0.9428926   0.9429181   0.9223606   0.9213436
```

Lampiran 3-2

```
[71]  1.0042246   0.9715855   0.9363845   0.9361790   0.9380103
      0.9522668   0.9362838   0.9164362   0.9921387   1.0290568
[81]  1.1245751   1.1225512   1.0892268   1.0700544   1.0420990
      1.0615438   1.0619394   1.0391528   1.0485403   1.0228048
[91]  0.9927259   1.1413938   1.0086522   0.9743990   0.9566521
      0.9009757   1.0213534   0.9197495   0.7510886
```

Nilai Estimator awal $\hat{\sigma}$

```
$sigmatopi:

[1]   3.374569  4.033326  3.406997 3.245747 2.777767 2.396456
      2.195286  1.952383  1.974422 1.967808 2.232149
[12]  2.113816  1.963222  2.177668 2.077357 2.252331 2.198196
      2.065919  2.077607  2.050189 1.958301 2.236845
[23]  2.130436  2.033817  1.951279 1.903457 1.820495 1.777929
      1.793005  1.758590  1.693017 1.667504 1.698379
[34]  1.648380  1.603401  1.655975 1.730139 1.717532 1.675997
      1.669342  1.925710  1.909368 1.996371 1.973305
[45]  2.035912  2.007833  1.959785 1.989422 1.989909 1.999310
      2.011732  1.971800  2.133012 2.116475 2.128341
[56]  2.051236  2.077681  2.042240 2.002475 2.074857 2.029679
      2.001544  1.935273  1.875002 1.855153 1.837811
[67]  1.868069  1.865238  1.821803 1.812426 1.946605 1.889500
      1.846463  1.842782  1.856275 1.885821 1.853991
[78]  1.812775  1.935633  2.022063 2.195535 2.207774 2.141343
      2.098228  2.038797  2.057549 2.081420 2.047948
[89]  2.065758  2.017692  1.956972 2.198116 1.981651 1.918900
      1.888884  1.790219  1.999223 1.810014 1.511527
```

Nilai Estimator akhir $\hat{\gamma}$

```
$gammaepm:
[1] 1.013595
```

Nilai Estimator akhir $\hat{\sigma}$

```
$sigmaepm:
[1] 1.981651
```