ADLN-Perpustakaan Unair

MODE-LINEAR SCATTERING EQUATION
FIBER OPTICS

PENURUNAN KRITERIA KETAKSTABILAN MODULASI PADA SERAT OPTIK MENGGUNAKAN PENDEKATAN VARIASIONAL

SKRIPSI

MPT

HERLIK WIBOWO

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA
2006

MILIK
PERPUSTAKAAN
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

PENURUNAN KRITERIA KETAKSTABILAN MODULASI PADA SERAT OPTIK MENGGUNAKAN PENDEKATAN VARIASIONAL

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh

Gelar Sarjana Sains Bidang Fisika pada

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Airlangga

Oleh :

HERLIK WIBOWO

NIM. 080012134

Tanggal Lulus : 30 Januari 2006

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. R. Arif Wibowo, M.Si	Drs. Ali Yunus Rohedi, MT
NIP. 131933021	NIP. 132054882

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : **Penurunan Kriteria Ketakstabilan Modulasi pada Serat Optik Menggunakan Pendekatan Variasional**

Penyusun : **Herlik Wibowo**

Nomor Induk : **080012134**

Tanggal Ujian : **30 Januari 2006**

Disetujui Oleh :

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Drs. R. Arif Wibowo, M.Si	**Drs. Ali Yunus Rohedi, MT**
NIP. 131933021	**NIP. 132054882**

Mengetahui :

Ketua Jurusan Fisika

FMIPA Universitas Airlangga

Drs. Pujiyanto, M.S

NIP. 131756001

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seizin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

Skripsi Ini Kupersembahkan Kepada

Ibunda Tercinta

Dalam Rangka Ulang Tahun Beliau Yang Ke-45

(Alm.) Ayahanda Tercinta

Ricky. Lina. Yuanita

KATA PENGANTAR

Namo Buddhāya,

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa dan Sang Tiratana atas selesainya skripsi yang berjudul "Penurunan Kriteria Ketakstabilan Modulasi Pada Serat Optik Menggunakan Pendekatan Variasional".

Ketakstabilan Modulasi merupakan fenomena umum yang sering dijumpai pada sistem yang bersifat taklinear dan dispersif. Dalam optika taklinear, khususnya pada serat optik, ketakstabilan modulasi telah dimanfaatkan sebagai mekanisme pembangkitan pulsa soliton. Pulsa soliton tersebut memegang peranan yang sangat penting dalam sistem komunikasi serat optik karena sifatnya yang tidak mengalami perubahan bentuk selama perambatannya dalam serat optik. Dengan demikian, pengetahuan mengenai kriteria ketakstabilan modulasi menjadi sangat penting. Topik dari skripsi ini adalah ketakstabilan modulasi yang terjadi pada serat optik moda tunggal tanpa rugi dengan profil indeks bias berundak. Penulisan skripsi ini ditujukan untuk membahas cara penurunan kriteria ketakstabilan modulasi dengan menggunakan pendekatan variasional.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kriteria sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna kesempurnaan skripsi ini.

Surabaya, Januari 2006

Mettācittena,

Penyusun

Herlik Wibowo

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. R. Arif Wibowo, M.Si selaku Pembimbing I dan Bapak Drs. Ali Yunus Rohedi, MT selaku Pembimbing II, yang dengan kesabaran yang luar biasa telah membimbing dan memberi dukungan baik berupa literatur maupun saran yang membangun selama penyusunan skripsi ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih atas dukungan yang diberikan oleh Bapak Drs. Pujiyanto, MS selaku Ketua Jurusan Fisika FMIPA UNAIR, Bapak Drs. Muzakki selaku Dosen Wali, Bapak Drs. Adri Supardi, MS dan Bapak Drs. Moh. Yasin, M.Si.

Penyusunan skripsi ini tentunya tidak terlepas dari dorongan, bantuan serta inspirasi yang luar biasa yang diberikan secara tidak langsung oleh fisikawan dan matematikawan mancanegara melalui kemudahan dalam memperoleh jurnal dan disertasi karya mereka melalui koneksi internet. Secara khusus, penulis berterima kasih kepada Z. Rapti, P.G. Kevrekidis, A. Smerzi dan A.R. Bishop atas inspirasi yang tertuang dalam jurnal mereka yang berjudul *"Variational approach to the modulational instability"*. Secara khusus, penulis juga berterima kasih kepada fisikawan yang bernama Jayanthi Santhanam atas pengantar yang baik mengenai persamaan Schrödinger taklinear melalui disertasi beliau yang berjudul *"Applications of the Moment Method to Optical Communications Systems : Amplifier Noise and Timing Jitter"*. Penulis juga berterima kasih kepada Bapak Agus Purwanto D.Sc atas bantuannya menghubungkan penulis kepada Pembimbing II di awal penyusunan proposal skripsi dan atas dorongan yang diberikan pada penulis agar menjadi seorang fisikawan teoritis yang handal.

Penulis menyadari bahwa dorongan keluarga dan rekan-rekan yang dekat dengan penulis juga menjadi faktor penentu dalam penyelesaian skripsi. Secara khusus, penulis berterima kasih kepada Ibu dan adik tercinta atas dukungan yang diberikan selama studi, khususnya selama penyelesaian skripsi ini. Penulis juga berterima kasih secara khusus kepada Dian Saptiana atas bantuannya sebagai *editor* dalam menerjemahkan abstrak skripsi ini ke dalam bahasa Inggris. Sebagai

sesama mahasiswa yang mencintai fisika teoritis, penulis sangat menghargai dukungan yang diberikan oleh saudari Chusnul Chotimah baik berupa literatur maupun motivasi yang luar biasa. Penulis berterima kasih kepada seluruh anggota UKKB UNAIR dan HIKMAHBUDHI atas persahabatan dalam Dhamma yang indah dan luar biasa selama studi dan semoga persahabatan ini dapat terus dipertahankan.

Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua mahluk yang namanya tidak dapat disebutkan satu per satu atas dukungan yang diberikan dalam penyelesaian skripsi ini.

Sabbe Sattā Bhavantu Sukhitattā

Semoga Semua Mahluk Berbahagia

Herlik Wibowo, 2006. Penurunan Kriteria Ketakstabilan Modulasi Pada Serat Optik Menggunakan Pendekatan Variasional. Skripsi dibawah bimbingan Drs. R. Arif Wibowo, M.Si, Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Airlangga, Surabaya dan Drs. Ali Yunus Rohedi, MT., Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya

ABSTRAK

Tujuan Penelitian ini adalah pertama untuk memperoleh cara menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik moda tunggal tanpa rugi dengan sifat ketaklinearan kubik dan dispersi kecepatan gugus negatif (dispersi anomali) dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu. Kedua, untuk mengetahui perbandingan antara hasil kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh melalui penerapan metode tersebut dan hasil yang diperoleh dengan menerapkan metode analisis kestabilan linear. Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang dilakukan melalui penelaahan berbagai literatur berupa jurnal-jurnal ilmiah dan buku-buku teks dengan melakukan penurunan bukti-bukti secara analitik. Metode matematis yang digunakan adalah pendekatan variasional bergantung waktu yang lazim dikenal sebagai formulasi Lagrangan untuk sistem kontinu. Kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu bersesuaian dengan kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menerapkan analisis kestabilan linear sehingga diperoleh suatu kesimpulan bahwa metode pendekatan variasional bergantung waktu dapat digunakan untuk menentukan kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik moda tunggal tanpa rugi dengan sifat ketaklinearan kubik dan dispersi kecepatan gugus negatif (dispersi anomali).

Kata Kunci: Persamaan Schrödinger Taklinear, Kriteria Ketakstabilan Modulasi, Pendekatan Variasional Bergantung Waktu

Herlik Wibowo, 2006. Derivation of Modulational Instability Criterion on Fiber Optics using Variational Approach. A thesis under advisory of Drs. R. Arif Wibowo, M.Si, Physics Department Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Airlangga University, Surabaya and Drs. Ali Yunus Rohedi, MT., Physics Department Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya

ABSTRACT

The aim of this research, firstly, is to obtain a way of deriving modulational instability criterion on lossless single-mode fiber optics with cubic nonlinearity and negative group velocity dispersion (anomalous dispersion) using time-dependent variational approach. The second is to find out the comparison between the result of modulational instability criterion that is obtained using the above method and the result that is obtained using linear stability analysis. This research is theoretical research which is done through evaluation on journals and textbooks by deriving the evidence analytically. Mathematical method that is used on this research is time-dependent variational approach, called Lagrangian formulation for continuous system. Modulational instability criterion that is obtained using time-dependent variational approach is proved to be accordance with modulational instability criterion that is obtained using linear stability analysis. Thus the method of time-dependent variational approach can be used to determine modulational instability criterion on lossless single-mode fiber optics with cubic nonlinearity and negative group velocity dispersion (anomalous dispersion).

Key Words: Nonlinear Schrödinger Equation, Modulational Instability Criterion, Time Dependent Variational Approach

DAFTAR ISI

Halaman

KATA PENGANTAR ii
UCAPAN TERIMA KASIH iii
ABSTRAK v
DAFTAR ISI vii
DAFTAR GAMBAR ix
DAFTAR LAMPIRAN xi
DAFTAR SIMBOL DAN KONSTANTA xii
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN xv
DAFTAR ISTILAH xvi

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Rumusan Masalah 7
1.3 Batasan Masalah 7
1.4 Tujuan Penelitian 8
1.5 Manfaat Penelitian 8

BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Persamaan Schrödinger Taklinear 9
2.1.1 Klasifikasi Serat Optik 9
2.1.2 Dispersi Pada Serat Optik Moda Tunggal 11
2.1.3 Indeks Bias Taklinear 15
2.1.4 Perambatan Pulsa Dalam Serat Optik 17
2.2 Ketakstabilan Modulasi 30
2.3 Pendekatan Variasional Bergantung Waktu 34

BAB III METODE PENELITIAN 38
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 38

3.2 Prosedur Penelitian 38

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN..... 40

4.1 Lagrangan Untuk Persamaan Schrödinger Taklinear 40

4.2 Penurunan Kriteria Ketakstabilan Modulasi 43

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 48

5.1 Kesimpulan 48

5.2 Saran 49

DAFTAR PUSTAKA 50

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Gambar	Halaman
2.1.1.1	Penampang lintang dan profil indeks bias untuk serat optik indeks bias berundak dan serat optik indeks bias berangsur	10
2.1.2.1	Variasi indeks bias n dan indeks gugus n_g terhadap panjang gelombang untuk silika	13
2.1.2.2	Variasi b dan turunannya $d(Vb)/dV$ dan $V\left[d^2(Vb)/dV^2\right]$ terhadap parameter V	14
3.2.1	Diagram Alir Penelitian	39
4.2.1(a)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$	45
4.2.1(b)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$	45
4.2.1(c)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$	46
4.2.2(a)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$	46
4.2.2(b)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$	46
4.2.2(c)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$	47
D.1	Grafik Pers. (4.2.9) dengan $\Omega = 4$	
D.1(a)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$	101
D.1(b)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$	101
D.1(c)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$	101
D.2	Grafik Pers. (4.2.10) dengan $\Omega = 4$	
D.2(a)	Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$	102

D.2(b) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$ 102

D.2(c) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$ 102

D.3 Grafik Pers. (4.2.9) dengan $\Omega = 8$

D.3(a) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$ 103

D.3(b) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$ 103

D.3(c) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$ 103

D.4 Grafik Pers. (4.2.10) dengan $\Omega = 8$

D.4(a) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$ 104

D.4(b) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$ 104

D.4(c) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$ 104

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran	Halaman
A	Pembuktian Rumus-Rumus Subbab 2.1.4	52
B	Pembuktian Rumus-Rumus Subbab 2.2	75
C	Pembuktian Rumus-Rumus Bab IV	84
D	Grafik-Grafik Subbab 4.2	101

DAFTAR SIMBOL DAN KONSTANTA

Simbol	Keterangan
A_{eff}	Luas teras efektif
α	Koefisien absorpsi satu foton
α_2	Koefisien absorpsi dua foton
$\widetilde{\alpha}$	Koefisien absorpsi total
b	Konstanta perambatan ternormalisasi
$\vec{B}$	Rapat fluks magnet
B_j	Kekuatan osilator ke- j
β_2	Dispersi kecepatan grup
$\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$	Suseptibilitas orde satu, orde dua, dan orde tiga
$\widetilde{\chi}$	Transformasi Fourier dari χ
D	Dispersi total
D_M	Parameter dispersi bahan
D_W	Parameter dispersi pandu gelombang
$\vec{D}$	Vektor pergeseran listrik
Δ	Fraksi perubahan indeks bias pada perbatasan teras-selubung
$\vec{E}$	Medan listrik
$\widetilde{E}$	Transformasi Fourier dari $\vec{E}$
$\varepsilon(\omega)$	Konstanta dielektrik
ε_{NL}	Bagian taklinear dari konstanta dielektrik
Γ	Rugi serat
$\vec{H}$	Medan magnet
$\vec{J}$	Rapat arus total

$\vec{J}_f$	Rapat arus bebas
$\vec{J}_M$	Rapat arus magnetisasi
L	Lagrangan
L_D	Panjang dispersi serat
$\mathscr{L}$	Densitas Lagrangan
λ	Panjang gelombang
λ_0	Panjang gelombang dispersi nol
$\vec{M}$	Vektor magnetisasi
$n(\omega)$	Indeks bias bahan sebagai fungsi frekuensi optik
n_2	Indeks bias selubung
n_g	Indeks gugus
n_{2g}	Indeks gugus daerah selubung
$\tilde{n}$	Indeks bias total
$\bar{n}_2$	Koefisien indeks bias taklinear
ω	Frekuensi optik
ω_0	Frekuensi pembawa
ω_j	Frekuensi resonansi ke- j
$\Delta\omega$	Lebar spektral
Ω	Frekuensi pita sisi
$\vec{P}$	Vektor polarisasi
$\vec{P}_L(\vec{r},t)$	Vektor polarisasi linear
$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t)$	Vektor polarisasi taklinear
φ_ρ	Koordinat umum
q	Fungsi amplop pulsa berubah lambat ternormalisasi
ρ	Rapat muatan total
ρ_0	Amplitudo gelombang kontinu
ρ_b	Rapat muatan polarisasi

ρ_f	Rapat muatan bebas
S	Integral aksi
T_0	Lebar pulsa
v_g	Kecepatan gugus
V	Frekuensi ternormalisasi
$\hat{x}$	Vektor satuan polarisasi
x_ν	Koordinat ruang-waktu
x_i	Koordinat ruang

Konstanta	**Keterangan**
c	Kecepatan cahaya
ε_0	Permitivitas listrik ruang hampa
μ_0	Permeabilitas magnet ruang hampa

DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN

Lambang	Keterangan
$\left\| \right\|^2$	Intensitas
$\delta(t-t')$	Fungsi delta Dirac
δ	Variasi
Re[ ]	Bagian real
Im[ ]	Bagian imajiner
$\vec{\nabla}\bullet$	Divergensi
$\vec{\nabla}\times$	Curl
$\vec{\nabla}^2$	Laplacian
∞	Positif tak berhingga
$-\infty$	Negatif tak berhingga
*	Konjugat kompleks
$\sum_{j=1}^{M}$	Penjumlahan ke seluruh indeks j

Singkatan	Keterangan
et.al.	dan kawan-kawan
c.c.	Konjugat kompleks

DAFTAR ISTILAH

Istilah	Keterangan
Ketakstabilan Modulasi	Fenomena yang terjadi sebagai hasil dari peningkatan amplitudo termodulasi ketika suatu gelombang kontinu diterapkan pada sistem yang bersifat taklinear dan dispersif. Peningkatan amplitudo termodulasi disebabkan modulasi kecil yang diterapkan gangguan lemah pada gelombang kontinu.
Pendekatan Variasional	Metode matematis yang berdasarkan pada prinsip aksi terkecil atau prinsip integral Hamilton.
Persamaan Schrödinger Taklinear	Salah satu persamaan diferensial parsial taklinear yang memiliki solusi soliton. Persamaan ini hadir pada beberapa situasi fisis, misalnya pada optika taklinear dan kondensasi Bose-Einstein.
Soliton	Gelombang yang berperilaku seperti partikel karena dapat mempertahankan bentuk dan kecepatannya setelah tumbukan.
Transformasi Hamburan Balik	Metode pemecahan solusi persamaan diferensial parsial taklinear secara analitik yang berdasarkan pada kriteria keterintegralan eksak.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sebelum tahun 1950-an, dunia ilmiah didominasi oleh fisika linear, termasuk diantaranya adalah mekanika fluida, fisika zat padat, elektronika, mekanika kuantum, dan teori medan elektromagnetik. Fisika linear, tentu saja, terkait dengan matematika linear, misalnya transformasi integral, ruang vektor linear, persamaan diferensial linear dan sebagainya. Pada umumnya, ketaklinearan dianggap sebagai suatu gangguan (perturbasi) terhadap suatu sistem linear, sehingga efeknya lazim dianalisis dengan metode gangguan, analisis statistika, dan sebagainya. Meskipun demikian, pada masa tersebut, banyak bermunculan fenomena dan wawasan baru yang terkait dengan sistem taklinear. Salah satunya adalah pengamatan John Scott-Russel terhadap gelombang *solitary* dan sifat kestabilannya (Lakshmanan, 2004).

Tahun 1950-1970 merupakan era kebangkitan sekaligus merupakan masa keemasan bagi fisika taklinear. Era ini ditandai dengan eksperimen Fermi-Pasta-Ulam (FPU) untuk mengungkap fenomena pembagian energi pada kisi taklinear pada tahun 1955 (Lakshmanan, 2004). Pada tahun tersebut, FPU mengembangkan metode pengintegralan secara numerik terhadap persamaan diferensial biasa yang menggambarkan himpunan osilator anharmonik tergandeng (sekarang dikenal sebagai permasalahan FPU) dalam upaya memahami mekanisme yang membawa pada kesetimbangan termal. Asas ekuipartisi energi memprediksikan bahwa

PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

ketaklinearan dengan cepat akan mendistribusikan kembali energi sistem yang terkandung pada kondisi awal ke dalam semua moda vibrasi, yang mendorong sistem tersebut segera menuju kesetimbangan. Hasil analisis numerik yang diperoleh FPU ternyata berlawanan dengan prediksi tersebut. FPU mendapatkan bahwa energi hanya terdistribusi di antara beberapa moda rendah dan mengalir bolak-balik di antara moda tersebut mengikuti suatu pola yang berulang (Ablowitz *et.al.*, 2000).

Permasalahan FPU kemudian dipelajari oleh Martin Kruskal dan Norman Zabusky pada tahun 1965. Mereka menurunkan kembali persamaan Korteweg de Vries (KdV) sebagai bentuk pendekatan kontinum dari persamaan diferensial biasa. Melalui simulasi numerik, mereka mendapatkan bahwa ketika terjadi tumbukan, gelombang *solitary* – yang merupakan solusi persamaan KdV – dapat mengalami superposisi taklinear (saat terjadi tumpang tindih) dan kemudian dapat merambat kembali tanpa terjadi perubahan baik bentuk maupun kecepatannya (Lakshmanan, 2004). Karena sifatnya yang mirip partikel inilah, Zabusky dan Kruskal menamakan solusi gelombang *solitary* tersebut sebagai soliton (Ablowitz *et.al.*, 2000).

Persamaan KdV merupakan salah satu persamaan diferensial parsial taklinear yang memiliki solusi soliton. Solusi soliton hadir sebagai hasil dari keseimbangan antara efek dispersi dan efek ketaklinearan. Tidak semua persamaan diferensial parsial taklinear memiliki solusi soliton. Persamaan diferensial parsial taklinear memiliki solusi soliton jika persamaan nilai awalnya dapat dipecahkan secara analitik sebagai kombinasi suku soliton dan gelombang

kontinu. Persamaan diferensial dengan karakteristik demikian dikatakan sebagai persamaan yang terintegralkan secara eksak (*exactly integrable*).

Metode solusi analitik yang berdasarkan pada kriteria keterintegralan eksak dikenal sebagai transformasi hamburan balik (Eilenberger, 1983). Metode ini pertama kali dikenalkan pada tahun 1967 oleh Gardner, Greene, Kruskal, dan Miura untuk memecahkan permasalahan nilai awal persamaan KdV (Gardner *et.al.*, 1967). Lima tahun kemudian, Zakharov dan Shabat berhasil memecahkan persamaan Schrödinger taklinear dengan menggunakan metode transformasi hamburan balik tersebut, dan menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh merupakan kombinasi dari soliton dan gelombang kontinu (Zakharov & Shabat, 1972). Dengan demikian, selain persamaan KdV, salah satu persamaan diferensial parsial taklinear lainnya yang memenuhi kriteria tersebut adalah persamaan Schrödinger taklinear (Eilenberger, 1983). Persamaan Schrödinger taklinear memainkan peranan yang sangat penting dalam teori perambatan amplop gelombang yang berubah secara lambat *(slowly varying wave envelope)* di dalam sistem dengan ketaklinearan yang lemah dan terdapat pada situasi fisis yang meliputi fisika plasma dan optika taklinear (Dodd *et.al.*, 1982).

Pada optika taklinear, khususnya pada serat optik, persamaan Schrödinger taklinear digunakan untuk menggambarkan perambatan amplop gelombang medan listrik yang berubah secara lambat pada suatu bahan dielektrik dengan sifat ketaklinearan kubik. Bahan dielektrik yang demikian dikatakan bersifat mirip Kerr (*Kerr like*). Karena itu, nilai indeks biasnya sebanding dengan intensitas medan listrik yang merambat didalamnya.

Selain sifat ketaklinearan, perambatan amplop gelombang medan listrik pada serat optik juga ditentukan oleh sifat dispersi kecepatan gugus (*group velocity dispersion*). Terdapat dua jenis dispersi kecepatan gugus yaitu dispersi kecepatan gugus positif yang terkait dengan dispersi normal dan dispersi kecepatan gugus negatif yang terkait dengan dispersi anomali (*anomalous*). Pada dispersi normal, komponen frekuensi yang lebih tinggi dari suatu pulsa optik berjalan lebih lambat daripada komponen frekuensi yang lebih rendah, sebaliknya pada dispersi anomali, komponen frekuensi yang lebih tinggi berjalan lebih cepat daripada komponen frekuensi yang lebih rendah (Hasegawa & Kodama, 1995).

Ketakstabilan modulasi (*modulational instability*) merupakan ciri umum persamaan gelombang taklinear baik diskrit maupun kontinu (Rapti *et.al.*, 2004). Ketakstabilan modulasi memiliki hubungan yang erat dengan formasi soliton. Serupa dengan soliton, terjadinya ketakstabilan modulasi disebabkan karena efek taklinear dan dispersi yang saling mempengaruhi. Hal ini melibatkan pertumbuhan eksponensial gangguan lemah melalui penguatan frekuensi pita sisi, yang menyebabkan modulasi destruktif gelombang pembawa (Corney & Bang, 2001). Fenomena ketakstabilan modulasi telah dikenal dan dipelajari pada berbagai sistem fisis, misalnya dinamika fluida, plasma, optika taklinear dan kondensasi Bose-Einstein (Rapti *et.al.*, 2004).

Dalam optika taklinear, khususnya pada serat optik, suatu gelombang kontinu (gelombang pembawa) dengan amplitudo konstan yang terpandu dalam serat optik dengan ketaklinearan kubik dan dispersi kecepatan gugus negatif (dispersi anomali), mengalami peningkatan amplitudo termodulasi sebagai hasil

dari ketakstabilan modulasi. Hasil yang diperoleh dari mempelajari fenomena ketakstabilan modulasi adalah kriteria ketakstabilan modulasi. Kriteria ketakstabilan modulasi merupakan informasi mengenai rentang frekuensi pita sisi (frekuensi gelombang modulasi) yang diizinkan bagi gelombang modulasi untuk memodulasi gelombang pembawa sehingga pulsa termodulasi yang dihasilkan dapat merambat dalam serat optik tanpa terjadi perubahan bentuk. Pada tahun 1980, Hasegawa dan Brinkman menyarankan penggunaan fenomena ketakstabilan modulasi gelombang cahaya pada serat optik sebagai sarana untuk membangkitkan sumber cahaya inframerah jauh (*far infrared*). Pada tahap eksperimental, pengujian eksperimental ketakstabilan modulasi gelombang cahaya pada serat optik dilakukan pertama kali oleh Tai, Tomita dan Hasegawa pada tahun 1986. Ketakstabilan modulasi dapat dibangkitkan dengan cara menerapkan suatu modulasi kecil pada sinyal masukan dimana frekuensi pita sisi modulasi kecil tersebut memenuhi kriteria ketakstabilan modulasi. Ketakstabilan modulasi yang dibangkitkan menggunakan metode ini dikenal sebagai ketakstabilan modulasi terimbas (*induced modulational instability*). Ketakstabilan modulasi terimbas dapat digunakan untuk membangkitkan suatu pulsa serupa soliton dengan laju perulangan yang diinginkan (Hasegawa dan Kodama, 1995).

Metode standar yang digunakan untuk mempelajari ketakstabilan modulasi pada persamaan Schrödinger taklinear adalah analisis kestabilan linear (*linear stability analysis*). Penerapan metode ini pada persamaan Schrödinger taklinear pertama kali diprakarsai oleh Zakharov pada tahun 1968 dan Vakhitov dan Kolokolov pada tahun 1973 (Sulem C dan Sulem P.L., 1999). Sampai sejauh ini,

metode analisis kestabilan linear telah digunakan untuk mempelajari fenomena ketakstabilan modulasi pada optika taklinear, khususnya pada serat optik (Hasegawa dan Kodama, 1995). Dalam kerangka kerja analisis kestabilan linear, solusi eksak persamaan Schrödinger taklinear yang ditinjau dituliskan kembali ke dalam bentuk solusi yang mengandung suku-suku gangguan amplitudo dan fasa. Dengan menganalisis relasi dispersi yang diperoleh dari substitusi solusi tersebut ke dalam persamaan Schrödinger taklinear yang ditinjau, akan diperoleh kriteria ketakstabilan modulasi (Sulem C dan Sulem P.L., 1999).

Metode lainnya yang dapat digunakan untuk mempelajari ketakstabilan modulasi pada persamaan Schrödinger taklinear adalah pendekatan variasional bergantung waktu (*time-dependent variational approach*) yang diusulkan oleh Rapti, Kevrekidis, Smerzi dan Bishop pada tahun 2004 (Rapti *et.al.*, 2004). Dalam makalahnya, mereka menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi persamaan Schrödinger taklinear baik untuk kasus koefisien suku dispersi kecepatan gugus dan suku taklinear yang tidak bergantung waktu maupun yang bergantung waktu menggunakan pendekatan variasional bergantung waktu. Kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menggunakan metode tersebut tepat sama dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode analisis kestabilan linear untuk kasus tidak bergantung waktu.

Kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik perlu dipelajari dengan menggunakan pendekatan variasional bergantung waktu. Kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menggunakan metode tersebut perlu dianalisis

dengan cara membandingkan dengan kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menggunakan metode analisis kestabilan linear.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini mengangkat dua permasalahan pokok sebagai berikut :

1. Bagaimanakah penerapan metode pendekatan variasional bergantung waktu dalam menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik ?
2. Apakah hasil kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik yang diperoleh dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu memiliki kesesuaian dengan hasil yang diperoleh dengan menerapkan analisis kestabilan linear ?

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, dilakukan pembatasan masalah mengenai jenis, sifat ketaklinearan dan sifat dispersi kecepatan gugus serat optik yang ditinjau. Jenis serat optik yang ditinjau adalah serat optik moda tunggal (*single-mode*) yang terbuat dari bahan silika dan memiliki distribusi indeks bias yang seragam. Serat optik dengan jenis distribusi indeks bias yang seragam dikenal sebagai serat optik indeks berundak (*step-index fiber*). Sifat ketaklinearan serat optik bergantung pada kuat medan yang diterapkan dan struktur molekul dari bahan dielektrik serat optik itu sendiri. Khusus untuk bahan silika yang memiliki struktur molekul simetri, sifat ketaklinearan didominasi oleh ketaklinearan orde dua yang dikenal sebagai ketaklinearan kubik. Sifat dispersi kecepatan gugus serat optik yang

ditinjau adalah dispersi kecepatan gugus negatif yang terkait dengan dispersi anomali. Dalam menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi, serat optik diasumsikan tidak mengalami rugi serat.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh cara menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk mengetahui perbandingan antara hasil kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik yang diperoleh dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu dengan hasil yang diperoleh dengan menerapkan analisis kestabilan linear.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi perkembangan teori fisika yang terkait dengan sistem taklinear, khususnya dalam menyajikan perangkat matematis alternatif yang berguna dalam mempelajari fenomena ketakstabilan modulasi pada berbagai sistem fisis. Dalam bidang komunikasi serat optik, hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai referensi untuk menghasilkan pulsa soliton melalui fenomena ketakstabilan modulasi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Schrödinger Taklinear

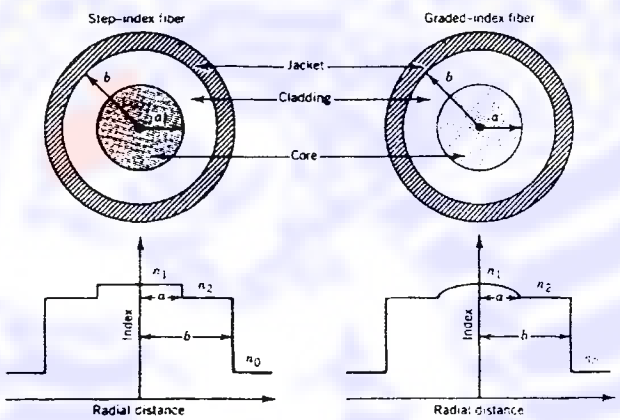
2.1.1 Klasifikasi Serat Optik

Dalam bentuk yang paling sederhana, struktur serat optik terdiri atas teras (*core*) yang diselimuti oleh selubung (*cladding*), dengan nilai indeks bias teras lebih tinggi dari indeks bias selubung. Struktur yang demikian memungkinkan suatu gelombang elektromagnetik dapat ditransmisikan pada daerah teras dengan memanfaatkan fenomena pemantulan dalam total (*total internal reflection*).

Serat optik merupakan salah satu bentuk pandu gelombang (*waveguide*) yang menggunakan bahan dielektrik kaca silika (*silica glass*) sehingga dapat beroperasi pada frekuensi optik. Berdasarkan variasi indeks bias sepanjang arah radial serat, serat optik dibedakan atas serat optik indeks bias berundak (*step-index fiber*) dan serat optik indeks bias berangsur (*graded-index fiber*). Serat optik yang memiliki indeks bias seragam pada arah radial tetapi dengan perubahan nilai indeks bias yang mendadak (atau undak) pada batas antara teras dan selubung dikenal sebagai serat optik indeks bias berundak. Sedangkan serat optik dengan indeks bias yang berubah sebagai fungsi jarak radial di daerah terasnya dikenal sebagai serat optik indeks bias berangsur. Perbedaan susunan indeks bias antara kedua jenis serat optik tersebut ditunjukkan pada gambar 2.1.1.1.

Baik serat optik indeks bias berundak maupun serat optik indeks bias berangsur dapat dibedakan lagi berdasarkan jumlah moda gelombang yang dapat

dipandu. Serat optik yang hanya memandu satu moda perambatan (*mode of propagation*) dikenal sebagai serat optik moda tunggal (*single-mode fiber* atau *monomode fiber*), sedangkan serat optik yang dapat memandu lebih dari satu moda perambatan gelombang dikenal sebagai serat optik moda jamak (*multimode fiber*).



Gambar 2.1.1.1 Penampang lintang dan profil indeks bias untuk serat optik indeks bias berundak (kiri) dan serat optik indeks bias berangsur (kanan)

(Agrawal, 1992).

Dalam bidang komunikasi optik, serat optik moda tunggal memiliki kelebihan dibandingkan dengan serat optik moda jamak. Hal ini disebabkan serat optik moda tunggal tidak mengalami dispersi intermodal (*intermodal dispersion*) sebagaimana yang dialami serat optik moda jamak. Dispersi intermodal terjadi karena berbedanya kecepatan rambat antar moda gelombang. Hal ini berarti moda-moda gelombang yang mengangkut energi pulsa optik akan mencapai ujung keluaran serat optik pada waktu yang sedikit berbeda. Sebagai akibatnya, pulsa

optik akan mengalami pelebaran di sepanjang perjalanannya. Dispersi intermodal yang terjadi serat optik moda jamak diatasi menggunakan teras dengan profil indeks bias berangsur.

2.1.2 Dispersi Pada Serat Optik Moda Tunggal

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa serat optik moda tunggal memiliki kelebihan dibandingkan serat optik moda jamak, karena pada serat optik moda tunggal tidak terjadi dispersi intermodal. Kendati pun demikian, dispersi pulsa optik tetap terjadi pada serat optik moda tunggal, tetapi penyebabnya adalah dispersi intramodal yang disebabkan oleh kebergantungan indeks bias serat terhadap frekuensi optik.

Suatu pulsa optik merambat pada kecepatan gugus (*group*) yang didefinisikan sebagai $v_g = d\omega/d\beta \equiv \beta_1^{-1}$ dengan β_1 menyatakan turunan pertama β terhadap ω. Oleh karena kecepatan gugus bergantung pada frekuensi, maka setiap komponen frekuensi pulsa optik akan merambat pada kecepatan gugus yang berbeda, sehingga menyebabkan di sepanjang serat terjadi dispersi kecepatan gugus pulsa optik. Fenomena ini dikenal sebagai dispersi kecepatan gugus (*group velocity dispersion*). Dispersi kecepatan gugus berasal dari dua sumber utama, yaitu dispersi bahan (*material dispersion*) atau dispersi khromatik (*chromatic dispersion*), dan dispersi pandu gelombang (*waveguide dispersion*).

Dispersi bahan terjadi karena indeks bias bahan serat optik merupakan fungsi dari frekuensi optik ω. Dispersi bahan terkait dengan frekuensi karakteristik resonansi bahan ketika menyerap radiasi elektromagnetik melalui

osilasi elektron-elektron terikat (*bound electrons*). Untuk kasus frekuensi gelombang elektromagnetik yang berbeda jauh dari frekuensi resonansi, kebergantungan indeks bias bahan terhadap frekuensi optik didekati dengan baik oleh rumusan dispersi Sellmeier yakni (Agrawal, 1992)

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \qquad (2.1.2.1)$$

dengan ω_j merupakan frekuensi resonansi ke-j, B_j merupakan kekuatan osilator ke-j, $n(\omega)$ merupakan indeks bias bahan. Untuk bahan silika murni, dengan mengambil $M = 3$, nilai parameter B_1, B_2, B_3, λ_1, λ_2, dan λ_3 adalah (Agrawal, 1992) $B_1 = 0{,}6961663$, $B_2 = 0{,}4079426$, $B_3 = 0{,}8974794$, $\lambda_1 = 0{,}0684043$ μm, $\lambda_2 = 0{,}1162414$ μm, dan $\lambda_3 = 9{,}896161$ μm, dengan $\lambda_j = 2\pi c/\omega_j$.

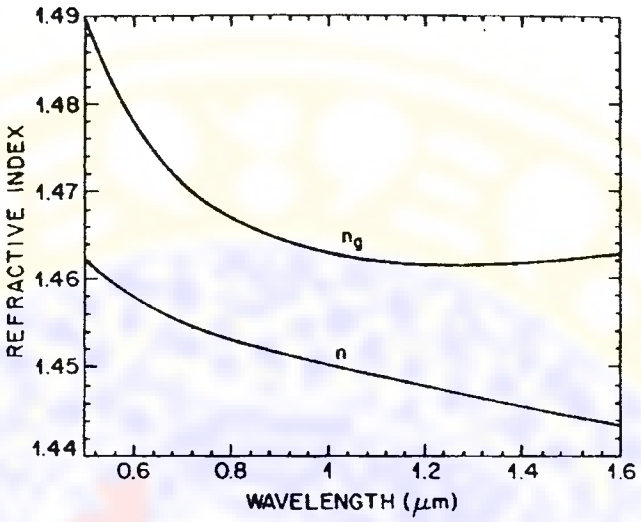
Kontribusi dispersi bahan pada sifat dispersi pulsa optik dapat dievaluasi dari persamaan

$$\beta_1 = v_g^{-1} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{n\omega}{c}\right) = \frac{n_g}{c}, \qquad (2.1.2.2)$$

dengan $n_g = n + \omega(dn/d\omega)$ menyatakan indeks gugus (*group index*). Dengan demikian, parameter dispersi kecepatan gugus β_2 dapat dinyatakan sebagai

$$\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega} = \frac{d\beta_1}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{D_M}{c}, \qquad (2.1.2.3)$$

dengan $D_M = c^{-1}(dn_g/d\lambda)$ menyatakan parameter dispersi bahan (Agrawal 1992). Plot indeks bias n dan indeks gugus n_g terhadap panjang gelombang λ untuk bahan silika diperlihatkan pada gambar 2.1.2.1.



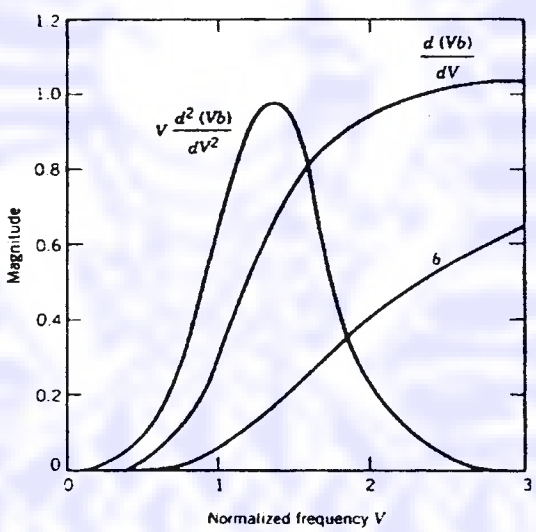
Gambar 2.1.2.1 Variasi indeks bias n dan indeks gugus n_g terhadap panjang gelombang untuk silika (Agrawal, 1992).

Dari gambar 2.1.2.1, terlihat bahwa untuk bahan silika, $dn_g/d\lambda$ bernilai nol pada panjang gelombang $\lambda = 1{,}276$ μm. Panjang gelombang ini disebut sebagai panjang gelombang dispersi nol (*zero-dispersion wavelength*) λ_0, karena $D_M = 0$ pada $\lambda = \lambda_0$. Selanjutnya, pada $\lambda < \lambda_0$, D_M bernilai negatif dan β_2 bernilai positif sedangkan pada $\lambda > \lambda_0$, D_M bernilai positif dan β_2 bernilai negatif. Nilai parameter dispersi kecepatan gugus β_2 terkait dengan dispersi normal dan dispersi anomali.

Dari gambar 2.1.2.1 juga terlihat bahwa pada dispersi normal ($\lambda < \lambda_0$), nilai indeks gugus n_g berkurang sebagaimana panjang gelombang λ meningkat sedangkan pada dispersi anomali ($\lambda > \lambda_0$), nilai indeks gugus n_g meningkat sebagaimana panjang gelombang λ meningkat. Oleh karena itu, dengan

menggunakan Pers. (2.1.2.2) dapat disimpulkan bahwa pada dispersi normal, komponen pulsa optik dengan frekuensi yang lebih tinggi berjalan lebih lambat, sebaliknya pada dispersi anomali, komponen pulsa optik dengan frekuensi yang lebih tinggi berjalan lebih cepat (Hasegawa & Kodama, 1995).

Selain mengalami dispersi bahan, serat optik moda tunggal juga mengalami dispersi pandu gelombang. Dispersi pandu gelombang disebabkan karena serat optik moda tunggal hanya mentransmisikan sekitar 80 persen pulsa optik pada daerah teras. Dispersi terjadi karena sekitar 20 persen pulsa optik merambat pada daerah selubung dengan kecepatan yang lebih besar daripada pulsa optik yang ditransmisikan pada daerah teras.



Gambar 2.1.2.2 Variasi b dan turunannya $d(Vb)/dV$ dan $V\left[d^2(Vb)/dV^2\right]$ terhadap parameter V (Agrawal, 1992)

Kontribusi dispersi pandu gelombang D_W pada sifat dispersi pulsa optik dapat dievaluasi dari persamaan (Agrawal, 1992)

$$\beta_2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{D_W}{c} \qquad (2.1.2.4)$$

$$D_W = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2}\left[\frac{n_{2g}^2}{n_2}\frac{Vd^2(Vb)}{dV^2} + \frac{dn_{2g}}{d\omega}\frac{d(Vb)}{dV}\right] \qquad (2.1.2.5)$$

dengan parameter Δ, n_{2g}, n_2, V dan b masing-masing menyatakan fraksi perubahan indeks bias pada perbatasan teras-selubung, indeks gugus daerah selubung, indeks bias selubung, frekuensi ternormalisasi dan konstanta perambatan ternormalisasi. Gambar 2.1.2.2 memperlihatkan perubahan b, $d(Vb)/dV$ dan $Vd^2(Vb)/dV^2$ terhadap V. Karena masing-masing turunan bernilai positif maka D_W bernilai negatif pada rentang panjang gelombang $0-1{,}6$ μm. Efek utama dari dispersi pandu gelombang adalah menggeser λ_0 sebesar $30-40$ nm sehingga dispersi total $D = D_M + D_W$ bernilai nol pada panjang gelombang yang mendekati 1,31 μm (Agrawal, 1992). Dispersi pandu gelombang juga mereduksi dispersi total dari nilai dispersi bahan pada rentang panjang gelombang 1,3 – 1,6 μm, yang merupakan rentang panjang gelombang yang sesuai untuk sistem komunikasi optik (Agrawal, 1992).

2.1.3 Indeks Bias Taklinear

Respon bahan dielektrik terhadap gelombang elektromagnetik bersifat taklinear ketika medan optik yang diterapkan memiliki intensitas yang tinggi. Hal ini juga berlaku pada serat optik. Polarisasi total $\vec{P}$ yang terinduksi oleh dipol-

dipol listrik tidak lagi linear terhadap medan listrik $\vec{E}$, tetapi memenuhi hubungan yang lebih umum yakni (Agrawal, 2001b)

$$\vec{P} = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} \vdots \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \ldots\right) \qquad (2.1.3.1)$$

Pada serat optik yang terbuat dari kaca silika, suseptibilitas orde dua $\chi^{(2)}$ bernilai nol, mengingat silika (SiO_2) merupakan molekul yang simetri (*symmetric molecule*) (Agrawal, 2001b). Suseptibilitas orde dua bernilai tidak nol, untuk medium-medium yang tidak memiliki simetri inversi (*inversion symmetry*) pada tingkat molekular. Dengan demikian, efek taklinear orde terendah pada serat optik berasal dari suseptibilitas orde tiga $\chi^{(3)}$ yang memberikan kontribusi taklinear pada indeks bias bahan silika. Indeks bias bahan silika diasumsikan bergantung pada intensitas medan optik yang diterapkan dan dapat dituliskan sebagai (Agrawal, 2001b)

$$\tilde{n}\left(\omega, \left|\vec{E}\right|^2\right) = n(\omega) + \bar{n}_2\left|\vec{E}\right|^2, \qquad (2.1.3.2)$$

dengan $n(\omega)$ merupakan bagian linear yang diberikan oleh Pers. (2.1.2.1), $\bar{n}_2$ adalah koefisien indeks bias taklinear ($\bar{n}_2 = 3{,}2 \times 10^{-20}$ m^2/W untuk serat optik silika), dan $\left|\vec{E}\right|^2$ merupakan intensitas medan optis dalam serat optik. Koefisien indeks bias taklinear, yang lazim disebut koefisien Kerr terkait dengan suseptibilitas orde tiga $\chi^{(3)}$ melalui persamaan (Agrawal, 2001b)

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n}\mathrm{Re}\left[\chi^{(3)}_{xxxx}\right] \qquad (2.1.3.3)$$

2.1.4 Perambatan Pulsa Dalam Serat Optik

Telaah mengenai perambatan pulsa cahaya dalam suatu serat optik membutuhkan pemahaman mengenai proses pembangkitan cahaya dalam medium. Menurut teori gelombang elektromagnetik, komponen medan listrik suatu radiasi elektromagnetik yang dikerahkan pada suatu medium dapat membangkitkan muatan-muatan terpolarisasi yang dikenal sebagai dipol-dipol listrik. Dipol-dipol tersebut turut berosilasi pada frekuensi yang sama dengan radiasi elektromagnetik penginduksinya. Osilasi dipol-dipol medium tersebut akan membangkitkan radiasi elektromagnetik yang kemudian merambat ke seluruh ruang dalam medium. Rapat muatan polarisasi ρ_b terkait dengan besaran polarisasi $\vec{P}$ (menyatakan momen dipol listrik per satuan volume) melalui $\rho_b = -\vec{\nabla} \bullet \vec{P}$. Hadirnya rapat muatan polarisasi ρ_b memberikan kontribusi bagi rapat muatan total ρ yang terdefinisi menurut $\rho = \rho_f - \vec{\nabla} \bullet \vec{P}$, dan melahirkan definisi bagi pergeseran listrik $\vec{D}$ dalam bentuk $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Proses yang sepadan juga terjadi dalam bahan magnetik, yang kemampuan merambatkan radiasi elektromagnetiknya sangat bergantung pada ketermagnetan bahan yang direpresentasikan oleh besaran magnetisasi $\vec{M}$, yang menyatakan jumlah momen magnetik per satuan volume. Magnetisasi berkontribusi pada hadirnya arus magnetisasi dengan rapat arus $\vec{J}_M$ sesuai hubungan $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$. Kehadiran rapat arus magnetisasi $\vec{J}_M$ dan rapat arus polarisasi dalam bentuk $\vec{J}_P = \partial \vec{P} / \partial t$ memberikan kontribusi bagi arus total dalam bentuk

$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \partial\vec{P}/\partial t$ dan melahirkan definisi bagi medan magnet dalam bentuk $\vec{H} = \left(\vec{B}/\mu_0\right) - \vec{M}$.

Proses pembangkitan cahaya dalam suatu medium dapat dinyatakan secara matematis dengan melibatkan keempat persamaan Maxwell. Karena proses pembangkitan cahaya dalam suatu medium mendasari proses perambatan cahaya dalam serat optik, maka perambatan cahaya dalam serat optik juga dapat juga diuraikan menggunakan empat persamaan Maxwell.

Perambatan gelombang elektromagnetik pada suatu medium dengan vektor medan listrik, medan magnet, pergeseran listrik dan rapat fluks magnet, yang secara berurutan, dinotasikan sebagai $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ dan $\vec{B}$, memenuhi empat persamaan Maxwell berikut (Wangsness, 1986)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (2.1.4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad (2.1.4.2)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho_f, \qquad (2.1.4.3)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0. \qquad (2.1.4.4)$$

dengan rapat arus bebas $\vec{J}_f$ dan rapat muatan bebas ρ_f mewakili sumber arus dan muatan bebas bagi medan elektromagnetik. Vektor pergeseran listrik dan kerapatan fluks magnet dihubungkan dengan vektor medan listrik dan medan magnet melalui hubungan konstitutif berikut

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad (2.1.4.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \qquad (2.1.4.6)$$

dengan ε_0 adalah permitivitas listrik ruang hampa, μ_0 adalah permeabilitas magnet ruang hampa, $\vec{P}$ adalah vektor polarisasi dan $\vec{M}$ adalah vektor magnetisasi. Ketika respon medan listrik dan medan magnet total suatu medium diketahui, semua fenomena elektromagnetik dapat dijelaskan menggunakan persamaan Maxwell (2.1.4.1) - (2.1.4.4) bersama-sama dengan hubungan konstitutif (2.1.4.5) - (2.1.4.6). Karena medium dielektrik serat optik tidak memiliki sumber arus dan muatan bebas serta bersifat nirmagnet maka $\rho_f = 0$, $\vec{J}_f = 0$ dan $\vec{M} = 0$. Dengan demikian, persamaan (2.1.4.1) - (2.1.4.6) dapat direduksi menjadi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (2.1.4.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad (2.1.4.8)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = 0, \qquad (2.1.4.9)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0, \qquad (2.1.4.10)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad (2.1.4.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \qquad (2.1.4.12)$$

Dengan melakukan operasi curl pada Pers. (2.1.4.7) dan menggunakan Pers. (2.1.4.12) diperoleh

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right). \qquad (2.1.4.13)$$

Substitusi Pers. (2.1.4.8) dan Pers. (2.1.4.11) pada Pers. (2.1.4.13) akan mendapatkan

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}, \qquad (2.1.4.14)$$

dengan c adalah kecepatan cahaya ruang hampa yang dapat dirumuskan sebagai $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Dengan menggunakan identitas $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{E}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{E}$ dan $\vec{\nabla}\bullet\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\nabla}\bullet\vec{E}=0$, Pers. (2.1.4.14) dapat dituliskan sebagai

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}, \qquad (2.1.4.15)$$

Dengan menganggap bahwa respon yang dialami medium taklinear adalah respon setempat, yang mana polarisasi yang terjadi pada setiap titik dalam medium tersebut ditentukan oleh medan listrik pada titik tersebut, vektor polarisasi $\vec{P}(\vec{r},t)$ dapat dituliskan sebagai

$$\vec{P}(\vec{r},t)=\vec{P}_L(\vec{r},t)+\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) \qquad (2.1.4.16)$$

dengan $\vec{P}_L$ adalah bagian linear yang terkait dengan medan listrik $\vec{E}$ melalui persamaan (Agrawal, 2001b)

$$\vec{P}_L(\vec{r},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')\vec{E}(\vec{r},t')dt', \qquad (2.1.4.17)$$

dan $\vec{P}_{NL}$ adalah bagian taklinear yang terkait dengan medan listrik $\vec{E}$ melalui persamaan (Agrawal, 2001b)

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3)\vdots\times\vec{E}(\vec{r},t_1)\vec{E}(\vec{r},t_2)\vec{E}(\vec{r},t_3)dt_1dt_2dt_3,$$

(2.1.4.18)

dengan $\chi^{(1)}$ dan $\chi^{(3)}$ adalah suseptibilitas orde satu dan tiga sedangkan tanda : menunjukkan bahwa perkalian antara $\vec{E}$ dan $\chi^{(3)}$ adalah untuk masing-masing koordinat waktu. Dengan demikian Pers. (2.1.4.15) menjadi

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \qquad (2.1.4.19)$$

Untuk memecahkan Pers. (2.1.4.19), diambil tiga asumsi (Agrawal, 2001b). Pertama, diasumsikan bahwa polarisasi taklinear $\vec{P}_{NL}$ adalah gangguan kecil terhadap polarisasi linear $\vec{P}_L$. Asumsi ini beralasan karena perubahan taklinear indeks bias, dalam praktek, lebih kecil daripada 10^{-6}. Kedua, medan optik diasumsikan mempertahankan polarisasinya sepanjang panjang serat. Dan terakhir, diasumsikan medan optik merupakan medan monokromatik semu, yakni pulsa spektrum yang terpusat pada ω_0 memiliki lebar spektral $\Delta\omega$ sedemikian hingga $\Delta\omega/\omega_0 << 1$. Dengan menggunakan pendekatan fungsi amplop yang berubah lambat, medan listrik dapat dituliskan sebagai

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + c.c.\right], \qquad (2.1.4.20)$$

dengan $\hat{x}$ merupakan vektor satuan polarisasi, *c.c.* menyatakan konjugat kompleks (*complex conjugate*) suku didepannya dan $\vec{E}(\vec{r},t)$ merupakan fungsi amplop berubah lambat terhadap waktu. Polarisasi $\vec{P}_L$ dan $\vec{P}_{NL}$ juga dapat dituliskan sebagai

$$\vec{P}_L = \frac{1}{2}\hat{x}\left[P_L(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + c.c.\right], \qquad (2.1.4.21)$$

$$\vec{P}_{NL} = \frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{NL}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + c.c.\right], \qquad (2.1.4.22)$$

Substitusi Pers. (2.1.4.20) dan Pers. (2.1.4.21) ke dalam Pers. (2.1.4.17) akan diperoleh bahwa amplitudo bagian linear polarisasi diberikan oleh[1]

$$P_L(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')\exp\left[i\omega_0(t-t')\right]dt'$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp\left[-i(\omega-\omega_0)t\right]d\omega, \qquad (2.1.4.23)$$

dengan $\tilde{E}(\vec{r},\omega)$ merupakan transformasi Fourier $\vec{E}(\vec{r},t)$ yang didefinisikan sebagai

$$\tilde{E}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r},t)\exp\left[i\omega t\right]dt \qquad (2.1.4.24)$$

Dengan cara yang sama, amplitudo bagian nonlinear polarisasi dapat diperoleh dari Pers. (2.1.4.18) yaitu

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3)\vdots\times \vec{E}(\vec{r},t_1)\vec{E}(\vec{r},t_2)\vec{E}(\vec{r},t_3)dt_1dt_2dt_3,$$

(2.1.4.25)

Dengan mengasumsikan bahwa respon taklinear pada serat merupakan respon sesaat (Agrawal, 2001b), Pers. (2.1.4.25) dapat disederhanakan dengan menggunakan $\chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3) = \chi^{(3)}\delta(t-t_1)\delta(t-t_2)\delta(t-t_3)$ menjadi

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\times \vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t). \qquad (2.1.4.26)$$

Asumsi ini tidak akan valid ketika lebar pulsa lebih kecil daripada 10^{-12} s yang disebabkan oleh kontribusi vibrasi molekul (efek Raman) pada $\chi^{(3)}$. Kondisi

[1] Pembuktian Pers. (2.1.4.23) disajikan pada lampiran A.1.

tersebut valid untuk lebar pulsa lebih besar daripada 10^{-12} s karena untuk serat silika, respon Raman terjadi pada skala waktu 60×10^{-15} s sampai 70×10^{-15} s (Agrawal, 2001b). Substitusi Pers. (2.1.4.20) dan (2.1.4.22) ke dalam Pers. (2.1.4.26), akan memperoleh dua suku, yaitu suku yang berosilasi pada ω_0 dan suku yang berosilasi pada $3\omega_0$. Suku yang berosilasi pada $3\omega_0$ membutuhkan kecocokan fase (*phase matching*) dan secara umum diabaikan dalam serat optik. Dengan demikian, $\vec{P}_{NL}$ dapat dituliskan sebagai[2]

$$P_{NL} \approx \frac{3}{4}\varepsilon_0 \chi^{(3)}_{xxxx} E(\vec{r},t)\left|E(\vec{r},t)\right|^2$$

$$\approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\vec{r},t) \qquad (2.1.4.27)$$

dengan $\varepsilon_{NL} = (3/4)\chi^{(3)}_{xxxx}\left|E(\vec{r},t)\right|^2$. Kehadiran intensitas dalam suku $\vec{P}_{NL}$ ($\varepsilon_{NL} \propto \left|E(\vec{r},t)\right|^2$), menyebabkan Pers. (2.1.4.19) menjadi persamaan taklinear dan sulit untuk dipecahkan. Karenanya, ε_{NL} diperlakukan sebagai suatu konstanta dengan memperlakukan $\vec{P}_{NL}$ sebagai suatu gangguan. Selanjutnya, untuk memperoleh persamaan gelombang bagi $E(\vec{r},t)$, akan lebih memudahkan jika bekerja dalam kerangka kerja transformasi Fourier.

Dengan menggunakan Pers. (2.1.4.23), Pers. (2.1.4.24) dan Pers. (2.1.4.27), Pers. (2.1.4.20) - (2.1.4.22) dapat dituliskan sebagai

$$\vec{E} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega, \qquad (2.1.4.28)$$

[2] Pembuktian Pers. (2.1.4.27) disajikan pada lampiran A.2.

UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

$$\vec{P}_L = \frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega, \qquad (2.1.4.29)$$

$$\vec{P}_{NL} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\varepsilon_{NL} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega, \qquad (2.1.4.30)$$

Dari Pers. (2.1.4.28) diperoleh

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\vec{\nabla}^2\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega, \qquad (2.1.4.31)$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega. \qquad (2.1.4.32)$$

Dengan menurunkan Pers. (2.1.4.29) dua kali terhadap t, diperoleh

$$\frac{\partial^2\vec{P}_L}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega. \qquad (2.1.4.33)$$

Dengan cara yang sama, dari Pers. (2.1.4.30), dapat diperoleh

$$\frac{\partial^2\vec{P}_{NL}}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\varepsilon_{NL}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega, \qquad (2.1.4.34)$$

Substitusi Pers. (2.1.4.31) - (2.1.4.34) ke dalam Pers. (2.1.4.19) dapat menunjukkan bahwa $E(\vec{r},t)$ memenuhi persamaan Helmholtz[3]

$$\vec{\nabla}^2\tilde{E} + k_0^2\varepsilon(\omega)\tilde{E} = 0, \qquad (2.1.4.35)$$

dengan $\varepsilon(\omega) = 1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{NL}$ adalah konstanta dielektrik, $k_0 = \omega/c$ dan hubungan $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ telah digunakan. Indeks bias dan koefisien absorpsi terkait dengan konstanta dielektrik dan, secara berurutan, dapat dituliskan dalam bentuk

$$\tilde{n} = n + \bar{n}_2|E|^2 \qquad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|E|^2, \qquad (2.1.4.36)$$

[3] Pembuktian Pers. (2.1.4.35) disajikan pada lampiran A.3.

Dengan menggunakan hubungan, $(\tilde{n}+i\tilde{\alpha}/2k_0)^2=\varepsilon(\omega)$, $\varepsilon(\omega)=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{NL}$ dan $\varepsilon_{NL}=(3/4)\chi_{xxxx}^{(3)}|E(\bar{r},t)|^2$ diperoleh

$$\tilde{n}^2-\frac{\tilde{\alpha}^2}{4k_0^2}+i\frac{\tilde{n}\tilde{\alpha}}{k_0}=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\chi_{xxxx}^{(3)}|E|^2$$

$$\left(n+\frac{i\alpha}{2k_0}\right)^2+\left[2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}+i\left(\bar{n}_2\frac{\alpha}{k_0}+n\frac{\alpha_2}{k_0}\right)\right]|E|^2=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}|E|^2 \qquad (2.1.4.37)$$

Dari Pers. (2.1.4.37), dapat dituliskan[4]

$$n(\omega)=\left\{1+\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right]\right\}^{1/2} \qquad \alpha(\omega)=\frac{k_0}{n}\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right] \qquad (2.1.4.38)$$

$$\bar{n}_2=\frac{3}{8n}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \qquad \alpha_2=\frac{3k_0}{4n}\mathrm{Im}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \qquad (2.1.4.39)$$

Persamaan (2.1.4.35) dapat dipecahkan menggunakan metode pemisahan variabel dengan mengasumsikan suatu solusi berbentuk

$$\tilde{E}(\bar{r},\omega-\omega_0)=F(x,y)\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)\exp(i\beta_0 z) \qquad (2.1.4.40)$$

dengan $\tilde{A}(z,\omega)$ merupakan suatu fungsi berubah lambat dari z dan β_0 adalah bilangan gelombang. Substitusi solusi ini ke dalam Pers. (2.1.4.35) dan dengan menyusunnya kembali, diperoleh dua persamaan untuk $F(x,y)$ dan $\tilde{A}(z,\omega)$ yakni[5]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left[\varepsilon(\omega)k_0^2-\tilde{\beta}^2\right]F=0 \qquad (2.1.4.41)$$

[4] Pembuktian Pers. (2.1.4.38) dan Pers. (2.1.4.39) disajikan pada lampiran A.4.
[5] Pembuktian Pers. (2.1.4.41) dan Pers. (2.1.4.42) disajikan pada lampiran A.5.

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2\right)\tilde{A} = 0 \qquad (2.1.4.42)$$

Karena $\tilde{A}(z,\omega)$ merupakan suatu fungsi berubah lambat dari z maka turunan kedua terhadap z pada Pers. (2.1.4.42) diabaikan.

Persamaan (2.1.4.41) akan lebih mudah dipecahkan dalam koordinat silinder. Jadi dengan menggunakan hubungan

$$F(x,y) = f(\rho)\exp(-im\phi)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2},$$

persamaan (2.1.4.41) dapat dituliskan dalam koordinat silinder sebagai

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \left(\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)f = 0. \qquad (2.1.4.43)$$

Konstanta dielektrik $\varepsilon(\omega)$ dapat didekati sebagai $\varepsilon(\omega) = (n+\Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n$ pada Pers. (2.1.4.43), dengan $\Delta n = n_2\left|\vec{E}\right|^2 + i\tilde{\alpha}/2k_0$ merupakan gangguan kecil. Dengan demikian Pers. (2.1.4.43) dapat dituliskan sebagai[6]

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \left(n^2 k_0^2 - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} + 2n\Delta n k_0^2\right)f = 0. \qquad (2.1.4.44)$$

Ketika $\Delta n = 0$, Pers. (2.1.4.44) tereduksi menjadi fungsi Bessel. Untuk serat dengan jari-jari teras a yang memiliki indeks bias $n = n_1$ tetapi di luar teras ($\rho > a$), bernilai $n = n_2$, solusi umum untuk Pers. (2.1.4.44) di dalam teras dapat dituliskan sebagai

$$f(\rho) = C_1 J_m(\kappa\rho) + C_2 N_m(\kappa\rho), \qquad (2.1.4.45)$$

---

[6] Pembuktian Pers. (2.1.4.44) disajikan pada lampiran A.6.

dengan J_m adalah fungsi Bessel, N_m adalah fungsi Neumann, dan

$$\kappa = \left(n_1^2 k_0^2 - \tilde{\beta}^2\right)^{1/2}. \tag{2.1.4.46}$$

Konstanta C_1 dan C_2 dapat ditentukan menggunakan syarat batas yang tepat. N_m memiliki singularitas pada $\rho = 0$ dan karenanya, untuk suatu solusi fisis, diambil $C_2 = 0$. Dengan demikian, untuk $\rho < a$, $F(\rho,\phi) = J_m(\kappa\rho)\exp(-im\phi)$ dan pada daerah selubung ($\rho > a$), solusi $F(\rho,\phi) = K_m(\gamma\rho)\exp(-im\phi)$ dengan K_m adalah fungsi Bessel termodifikasi dan $\gamma = \left(\tilde{\beta}^2 - n_2^2 k_0^2\right)^{1/2}$.

Sekarang akan dimasukkan efek Δn pada Pers. (2.1.4.44). Dalam teori gangguan orde satu, Δn tidak mempengaruhi $F(\rho,\phi)$. Nilai eigen $\tilde{\beta}$ dapat dituliskan menjadi

$$\tilde{\beta} = \beta(\omega) + \Delta\beta, \tag{2.1.4.47}$$

dengan[7]

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \rho \Delta n |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}{\iint \rho |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}. \tag{2.1.4.48}$$

Persamaan ini melengkapi solusi formal Pers. (2.1.4.41) menjadi orde satu dalam gangguan $\vec{P}_{NL}$. Selanjutnya, untuk melengkapi perhitungan medan listrik $\vec{E}(\vec{r},t)$, Pers. (2.1.4.42) perlu dipecahkan untuk amplop pulsa berubah lambat. Dengan menggunakan Pers. (2.1.4.47) dan pendekatan bagi $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2$ pada Pers. (2.1.4.42), yakni $2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$, Pers. (2.1.4.42) dapat dituliskan sebagai

[7] Pembuktian Pers. (2.1.4.48) disajikan pada lampiran A.7.

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0]\tilde{A}. \qquad (2.1.4.49)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa sebagaimana pulsa merambat sepanjang serat, setiap komponen spektral dalam amplop pulsa memperoleh pergeseran fase yang besarnya bergantung baik pada frekuensi maupun intensitas. Ekspansi $\beta(\omega)$ dalam suatu deret Fourier di sekitar frekuensi pembawa (*carrier*) ω_0 dapat dituliskan sebagai

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta_2, \qquad (2.1.4.50)$$

dengan

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m}\right)_{\omega=\omega_c} \qquad (m = 1,2,...). \qquad (2.1.4.51)$$

Suku kubik dan orde yang lebih tinggi pada ekspansi Pers. (2.1.4.50) diabaikan jika lebar spektral $\Delta\omega << \omega_0$. Dengan melakukan substitusi Pers. (2.1.4.50) ke dalam Pers. (2.1.4.49) dan melakukan transformasi Fourier balik menggunakan

$$A(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z,\omega-\omega_0)\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega, \qquad (2.1.4.52)$$

persamaan (2.1.4.49) dapat dituliskan sebagai[8]

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A. \qquad (2.1.4.53)$$

Suku $\Delta\beta$ meliputi efek rugi serat dan ketaklinearan. Dengan menggunakan $\Delta n = \bar{n}_2|E|^2 + i\tilde{\alpha}/2k_0$ pada Pers. (2.1.4.48) dan mengingat bahwa koefisien

[8] Pembuktian Pers. (2.1.4.53) disajikan pada lampiran A.8.

absorpsi dua foton, yakni α_2, bernilai kecil bagi serat optik, substitusi untuk $\Delta\beta$ pada Pers. (2.1.4.53) memperoleh[9]

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A, \qquad (2.1.4.54)$$

dengan parameter ketaklinearan γ didefinisikan sebagai

$$\gamma=\frac{\bar{n}_2\omega}{cA_{eff}}. \qquad (2.1.4.55)$$

Parameter A_{eff} dikenal sebagai luas teras (*core*) efektif yang didefinisikan sebagai

$$A_{eff}=\frac{\left(\iint\rho|F(\rho,\phi)|^2\,d\rho d\phi\right)^2}{\iint\rho|F(\rho,\phi)|^4\,d\rho d\phi}. \qquad (2.1.4.56)$$

Parameter A_{eff} bergantung pada parameter serat seperti jari-jari teras dan perbedaan indeks bias teras-selubung dan penaksirannya membutuhkan penggunaan fungsi $F(\rho,\phi)$. Dengan menggunakan suatu transformasi, $t'=t-\beta_1 z$, kedalam Pers. (2.1.4.54) akan diperoleh[10]

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A. \qquad (2.1.4.57)$$

Persamaan (2.1.4.57) menggambarkan perambatan pulsa optik pikosekon pada serat optik moda tunggal. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan Schrödinger taklinear yang meliputi efek rugi serat melalui faktor α, dispersi kecepatan gugus melalui β_2 dan ketaklinearan serat melalui γ.

Persamaan Schrödinger taklinear, yakni Pers. (2.1.4.57), dapat dinormalisasi menggunakan transformasi (Agrawal, 2001a)

---

[9] Pembuktian Pers. (2.1.4.54) disajikan pada lampiran A.9.
[10] Pembuktian Pers. (2.1.4.57) disajikan pada lampiran A.10.

$$\tau = \frac{t'}{T_0}, \qquad \xi = \frac{z}{L_D}, \qquad q = \sqrt{\gamma L_D}\, A, \tag{2.1.4.58}$$

dengan T_0 adalah lebar pulsa dan $L_D = T_0^2/|\beta_2|$ adalah panjang dispersi. Persamaan Schrödinger taklinear yang telah dinormalisasi berbentuk[11]

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{s}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = -i\frac{\Gamma}{2}q \tag{2.1.4.59}$$

dengan $\Gamma = \alpha L_D$ menyatakan rugi serat pada panjang dispersi dan s dapat bernilai $+1$ atau -1 bergantung pada apakah β_2 positif (dispersi normal) atau negatif (dispersi anomali).

Untuk serat optik tanpa rugi ($\Gamma = 0$) dengan dispersi anomali (nilai $s = -1$), Pers. (2.1.4.59) dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = 0 \tag{2.1.4.60}$$

Persamaan (2.1.4.60) memiliki solusi berupa soliton fundamental yang berbentuk (Agrawal, 2001b)[12]

$$q(\xi,\tau) = \sec h(\tau)\exp(i\xi/2) \tag{2.1.4.61}$$

2.2 Ketakstabilan Modulasi

Fenomena ketakstabilan modulasi ditemukan oleh M.J. Lighthill pada tahun 1965. Ketakstabilan modulasi terjadi ketika suatu gelombang kontinu (gelombang pembawa) berada pada suatu sistem yang bersifat taklinear dan dispersif. Secara fisis, proses terjadinya ketakstabilan modulasi dapat diuraikan

[11] Pembuktian Pers. (2.1.4.59) disajikan pada lampiran A.11.
[12] Pembuktian Pers. (2.1.4.61) disajikan pada lampiran A.12.

dengan meninjau pengaruh yang ditimbulkan oleh penerapan gangguan lemah (*weak perturbation*) pada amplitudo gelombang kontinu. Gangguan lemah menyebabkan modulasi kecil pada amplitudo maupun fasa gelombang kontinu. Hasil dari proses modulasi tersebut, amplitudo termodulasi tumbuh secara eksponensial yang disertai penurunan secara ekponensial amplitudo gelombang kontinu.

Sistem yang bersifat taklinear dan dispersif tersebut dapat ditemukan pada serat optik yang memiliki sifat ketaklinearan kubik dan dispersi kecepatan gugus negatif (dispersi anomali). Pada serat optik tersebut, gelombang kontinu dengan amplitudo konstan yang terpandu di daerah teras akan mengalami peningkatan amplitudo termodulasi sebagai hasil dari ketakstabilan modulasi. Sifat ketaklinearan kubik dan sifat dispersi anomali yang dimiliki oleh serat optik termaktub dalam persamaan Schrödinger taklinear, karena itu fenomena ketakstabilan modulasi lazim dianalisis secara matematis melalui penyelesaian persamaan Schrödinger taklinear.

Persamaan Schrödinger taklinear ternormalisasi untuk sistem dengan dispersi anomali (nilai $s = -1$) adalah dalam bentuk

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = -i\frac{\Gamma}{2}q \qquad (2.2.1)$$

Untuk serat optik tanpa rugi (*lossless*) ($\Gamma = 0$), Pers. (2.2.1), memiliki solusi gelombang kontinu dalam bentuk

$$q = \rho_0 \exp(ik\xi - i\omega\tau) \qquad (2.2.2)$$

dengan relasi dispersi

$$\rho_0^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 + k \qquad (2.2.3)$$

Mengacu pada bentuk solusi gelombang kontinu yang diberikan oleh Pers. (2.2.2), solusi umum Pers. (2.2.1) dituliskan sebagai

$$q = \rho \exp(i\sigma) \qquad (2.2.4)$$

Substitusi Pers. (2.2.4) ke dalam Pers. (2.2.1) akan menyebabkan Pers. (2.2.1) pecah menjadi bagian imajiner dan bagian real. Suku-suku bagian imajiner berbentuk

$$2\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + 2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + \Gamma\rho = 0, \qquad (2.2.5)$$

sedangkan suku-suku bagian realnya adalah[13]

$$\rho^2 - \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 = 0. \qquad (2.2.6)$$

Dalam kerangka kerja analisis kestabilan linear, dimisalkan suatu modulasi kecil terhadap amplitudo ρ dan fasa σ dengan frekuensi pita sisi Ω sebagai fungsi coba (*trial function*) bagi Pers. (2.2.5) dan Pers. (2.2.6), sedemikian hingga

$$\rho = \rho_0(\xi) + [\rho_1(\xi)\exp(-i\Omega\tau) + c.c.] \qquad (2.2.7)$$

dan

$$\sigma = \sigma_0(\xi,\tau) + [\sigma_1(\xi)\exp(-i\Omega\tau) + c.c.] \qquad (2.2.8)$$

dengan

$$\sigma_0(\xi,\tau) = k\xi - \omega\tau. \qquad (2.2.9)$$

[13] Pembuktian Pers. (2.2.5) dan Pers. (2.2.6) disajikan pada lampiran B.1.

Suku pertama dan kedua Pers. (2.2.7) masing-masing merupakan suku amplitudo awal dan modulasi amplitudo. Suku pertama dan kedua Pers. (2.2.8) masing-masing merupakan suku fasa awal dan modulasi fasa

Jika Pers. (2.2.7), Pers. (2.2.8) dan Pers. (2.2.9) disubstitusikan ke dalam Pers. (2.2.5) dan Pers. (2.2.6) maka untuk suku orde ke nol, akan diperoleh[14]

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \frac{\Gamma}{2}\rho_0 = 0 \qquad (2.2.10)$$

$$\rho_0^2 = k + \tfrac{1}{2}\omega^2 . \qquad (2.2.11)$$

dan untuk suku orde ke satu, akan diperoleh persamaan untuk amplitudo dan fasa pita sisi yaitu[15]

$$2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \rho_0 \Omega^2 \sigma_1 + \Gamma \rho_1 + 2i\Omega\rho_1\omega = 0 \qquad (2.2.12)$$

dan

$$2\rho_0\rho_1 - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - \frac{\Omega^2 \rho_1}{2\rho_0} - i\omega\Omega\sigma_1 = 0 . \qquad (2.2.13)$$

Persamaan (2.2.10) dapat dipecahkan untuk syarat awal $\rho_0(0) = \rho_0$ yang memberikan

$$\rho_0(\xi) = \rho_0 \exp(-\Gamma\xi/2) \qquad (2.2.14)$$

Persamaan (2.2.14) secara sederhana menunjukkan bahwa amplitudo gelombang kontinu berkurang secara eksponensial dengan laju $\Gamma/2$ sebagai hasil ketakstabilan modulasi. Untuk $\rho_0(\xi) = \rho_0$, Pers. (2.2.11) menjadi Pers. (2.2.3) yang merupakan relasi dispersi gelombang kontinu.

---

[14] Pembuktian Pers. (2.2.10) dan Pers. (2.2.11) disajikan pada lampiran B.2.
[15] Pembuktian Pers. (2.2.12) dan Pers. (2.2.13) disajikan pada lampiran B.3.

Untuk menggambarkan ketakstabilan, rugi serat Γ diabaikan (Hasegawa & Kodama, 1995) dan $\rho_1(\xi)$ dan $\sigma_1(\xi)$ dituliskan sebagai $\rho_1(\xi)=[\rho_1\exp(iQ\xi)+c.c.]$ dan $\sigma_1(\xi)=[\sigma_1\exp(iQ\xi)+c.c.]$. Kemudian, untuk $\rho_0(\xi)=\rho_0$, Pers. (2.2.12) dan Pers. (2.2.13) memberikan relasi dispersi untuk bilangan gelombang Q dan frekuensi Ω yang dapat dituliskan sebagai[16]

$$(Q+\omega\Omega)^2=\Omega^2\left(\tfrac{1}{4}\Omega^2-\rho_0^2\right). \qquad (2.2.15)$$

Dari Pers. (2.2.15) diperoleh kriteria ketakstabilan modulasi adalah $\Omega^2<4\rho_0^2$. Pada kasus $\Omega^2<4\rho_0^2$, Q bernilai imajiner sehingga menyebabkan terjadinya pertumbuhan eksponensial amplitudo gangguan lemah.

2.3 Pendekatan Variasional Bergantung Waktu

Prinsip variasional telah digunakan dalam mekanika untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan gerak partikel tunggal. Prinsip variasional dalam mekanika lebih dikenal sebagai prinsip Hamilton yang menyatakan bahwa gerak sistem dari waktu t_1 ke waktu t_2 adalah sedemikian hingga integral garis

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt, \qquad (2.3.1)$$

dengan $L=T-V$, memiliki suatu nilai stasioner terhadap lintasan gerak yang sebenarnya (Goldstein, 1980).

[16] Pembuktian Pers. (2.2.15) disajikan pada lampiran B.4.

Prinsip Hamilton dapat dirangkum dengan menyatakan bahwa gerak sistem adalah sedemikian hingga variasi integral garis S untuk waktu t_1 dan t_2 tertentu bernilai nol. Secara matematis, pernyataan ini dapat dituliskan sebagai

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 . \qquad (2.3.2)$$

Dalam optika, prinsip variasional lebih dikenal sebagai prinsip Fermat yang menyatakan bahwa sinar cahaya yang bergerak dari satu titik ke titik lain akan menempuh lintasan sedemikian rupa sehingga waktu tempuhnya bernilai minimum. Prinsip ini menguraikan sifat alami dari perambatan cahaya sehingga dapat diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan perambatan pulsa dalam serat optik.

Pada subbab 2.1.4 telah dijelaskan bahwa perambatan pulsa optik pikosekon dalam serat optik moda tunggal dapat dinyatakan oleh persamaan Schrödinger Taklinear. Dengan demikian, prinsip variasional dapat diterapkan untuk menganalisis persamaan Schrödinger taklinear. Penerapan prinsip variasional dalam menganalisis persamaan Schrödinger taklinear terkait dengan formulasi Lagrangan untuk sistem kontinu.

Pada sistem kontinu, prinsip Hamilton dapat diperluas menjadi

$$\delta S[\varphi_\rho] = \delta \int \mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) dx_\upsilon = 0 \qquad (2.3.3)$$

dengan $\varphi_\rho \equiv \varphi_\rho(x_\upsilon)$ merupakan koordinat umum, $\varphi_{\rho,\upsilon} \equiv \dfrac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\upsilon}$, $\mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$ merupakan densitas Lagrangan, x_υ merupakan koordinat ruang-waktu dan $\rho, \upsilon = 0,1,2,...,i+1$.

Densitas Lagrangan $\mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$ terkait dengan Lagrangan $L(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$ melalui persamaan

$$L(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) = \int \mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) dx_i \qquad (2.3.4)$$

dengan x_i merupakan koordinat ruang.

Variasi $S[\varphi_\rho]$, yakni $\delta S[\varphi_\rho]$, didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\delta S[\varphi_\rho] &= \delta S[\varphi_\rho + \delta\varphi_\rho] - \delta S[\varphi_\rho] \\ &= \int \mathscr{L}(\varphi_\rho + \delta\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon} + \delta\varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) dx_\upsilon - \int \mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) dx_\upsilon \qquad (2.3.5)\end{aligned}$$

dengan $\delta\varphi_\rho$ merupakan variasi φ_ρ dan $\delta\varphi_{\rho,\upsilon}$ merupakan variasi $\varphi_{\rho,\upsilon}$.

Tiga suku pertama uraian Taylor dari densitas Lagrangan $\mathscr{L}(\varphi_\rho + \delta\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon} + \delta\varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\varphi_\rho + \delta\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon} + \delta\varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) &= \mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\rho}\delta\varphi_\rho + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}}\delta\varphi_{\rho,\upsilon} \\ &= \mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) + \delta\mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon) \qquad (2.3.6)\end{aligned}$$

dengan $\delta\mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$ didefinisikan sebagai variasi densitas Lagrangan $\mathscr{L}(\varphi_\rho, \varphi_{\rho,\upsilon}, x_\upsilon)$.

Substitusi Pers. (2.3.6) ke dalam Pers. (2.3.5) akan memberikan

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\rho}\delta\varphi_\rho + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}}\delta\varphi_{\rho,\upsilon} \right] dx_\upsilon \qquad (2.3.7)$$

Karena $\delta\varphi_{\rho,\upsilon} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\upsilon}(\delta\varphi_\rho)$, maka integrasi secara parsial Pers. (2.3.7) memberikan

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\rho}\delta\varphi_\rho - \frac{\partial}{\partial x_\upsilon}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho\,\upsilon}} \right)\delta\varphi_\rho \right] dx_\upsilon + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}} \right) \int \frac{\partial}{\partial x_\upsilon}(\delta\varphi_\rho) dx_\upsilon \qquad (2.3.8)$$

Integral suku kedua Pers. (2.3.8) dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema divergensi yang memberikan

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\upsilon}} (\delta\varphi_{\rho}) dx_{\upsilon} = \int_{\partial\Lambda} (\delta\varphi_{\rho})\, n_{\upsilon} dS \tag{2.3.9}$$

dengan Λ merupakan daerah ruang-waktu, $\partial\Lambda$ merupakan batas daerah, dS merupakan elemen luas daerah dan n_{υ} merupakan besar vektor normal yang tegak lurus elemen luas dS. Pada batas daerah $\partial\Lambda$, $\delta\varphi_{\rho}\big|_{\partial\Lambda}$ bernilai nol, sehingga

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x_{\upsilon}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}} \right) \right] (\delta\varphi_{\rho}) dx_{\upsilon} \tag{2.3.10}$$

Dengan menggunakan Pers. (2.3.10), Pers. (2.3.3) dapat dituliskan sebagai

$$\int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho}} - \frac{\partial}{\partial x_{\upsilon}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}} \right) \right] (\delta\varphi_{\rho}) dx_{\upsilon} = 0 \tag{2.3.11}$$

Karena $\delta\varphi_{\rho}$ bernilai sembarang, maka syarat agar Pers. (2.3.11) dapat terpenuhi adalah

$$\frac{\partial}{\partial x_{\upsilon}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho,\upsilon}} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_{\rho}} = 0 \tag{2.3.12}$$

Pers. (2.3.12) dikenal sebagai persamaan gerak Lagrange untuk sistem kontinu. Untuk koordinat umum φ_{ρ} yang hanya bergantung pada ξ, Lagrangan L dapat dinyatakan sebagai $L = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}(\varphi_{\rho}(\xi), \varphi_{\rho,\xi}, \tau) d\tau$. Kemudian dengan mengambil x_{υ} sebagai ξ dan τ, Pers. (2.3.12) dapat direduksi menjadi

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\rho,\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\rho}} = 0 \tag{2.3.13}$$

BAB III

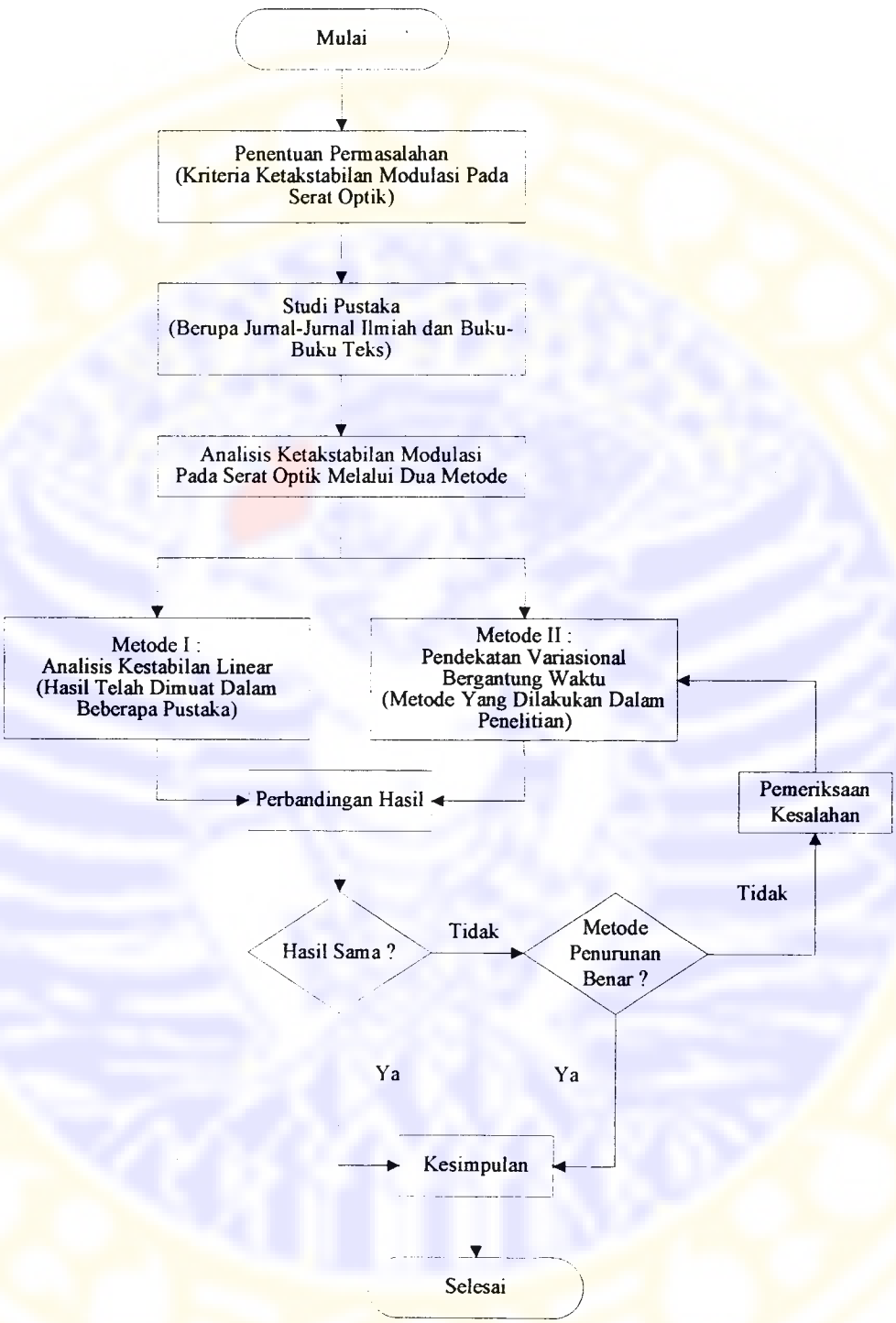
METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Fisika FMIPA Universitas Airlangga Surabaya dan Jurusan Fisika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya selama kurang lebih 6 bulan.

3.2 Prosedur Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang dilakukan melalui penelaahan berbagai literatur berupa jurnal-jurnal ilmiah dan buku-buku teks (*textbook*). Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode matematis yang dikenal sebagai pendekatan variasional bergantung waktu. Urutan kerja dari penelitian ini dapat dilihat pada diagram alir seperti gambar 3.2.1.



Gambar 3.2.1 Diagram Alir Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini disajikan penerapan metode pendekatan variasional bergantung waktu, yakni formulasi Lagrangan bagi sistem kontinu, dalam menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi pada serat optik. Hasil kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh dengan menggunakan metode ini akan dibandingkan dengan hasil yang diperoleh menggunakan analisis kestabilan linear.

4.1 Lagrangan Untuk Persamaan Schrödinger Taklinear

Untuk menurunkan kriteria ketakstabilan modulasi menggunakan pendekatan variasional perlu ditentukan terlebih dahulu Lagrangan bagi persamaan Schrödinger taklinear.

Untuk serat optik tanpa rugi serat atau rugi serat diabaikan, $\Gamma = 0$, persamaan Schrödinger taklinear, yaitu Pers. (2.2.1), dapat dituliskan sebagai

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = 0 \qquad (4.1.1)$$

Konjugat kompleks dari Pers. (4.1.1) dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$-i\frac{\partial q^*}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q^*}{\partial \tau^2} + |q|^2 q^* = 0. \qquad (4.1.2)$$

Integrasi kedua ruas Pers. (4.1.1) terhadap dq^* akan memberikan

$$i\int\left(\frac{\partial q}{\partial \xi}\right)dq^* + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\right)dq^* + \int |q|^2 q\,dq^* = 0$$

$$i\int\left(\frac{\partial q}{\partial \xi}\right)dq^* + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\right)dq^* + \int q^2 q^* dq^* = 0$$

$$iq^*\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}q^*\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}q^2\left(q^*\right)^2 = 0$$

$$iq^*\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}q^*\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}|q|^4 = 0 \qquad (4.1.3)$$

Dengan cara yang sama, integrasi kedua ruas Pers. (4.1.2) terhadap dq akan memberikan

$$-iq\frac{\partial q^*}{\partial \xi} + \frac{1}{2}q\frac{\partial^2 q^*}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}|q|^4 = 0 \qquad (4.1.4)$$

Penjumlahan Pers. (4.1.3) dan Pers. (4.1.4) memberikan

$$i\left[q^*\frac{\partial q}{\partial \xi} - q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{2}\left[q^*\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + q\frac{\partial^2 q^*}{\partial \tau^2}\right] + |q|^4 = 0 \qquad (4.1.5)$$

Dengan mengingat

$$q^*\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \tau}\right) - \left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2 \qquad (4.1.6a)$$

$$q\frac{\partial^2 q^*}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(q\frac{\partial q^*}{\partial \tau}\right) - \left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2 \qquad (4.1.6b)$$

Pers. (4.1.5) dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$i\left[q^*\frac{\partial q}{\partial \xi} - q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(q\frac{\partial q^*}{\partial \tau}\right) - 2\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2\right] + |q|^4 = 0 \qquad (4.1.7)$$

Integrasi kedua ruas Pers. (4.1.7) terhadap $d\tau$ dengan menerapkan syarat batas bahwa untuk $t \to \pm\infty$ maka $q \to 0$, $q^* \to 0$, $\partial q/\partial \tau \to 0$ dan $\partial q^*/\partial \tau \to 0$, akan memberikan

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\left[q^*\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right]d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2 d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}|q|^4 d\tau=0 \qquad (4.1.8)$$

dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(q\frac{\partial q^*}{\partial \tau}\right)d\tau=0$$

Pembagian kedua ruas Pers. (4.1.8) dengan dua akan memberikan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(|q|^4-\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2\right)\right]d\tau=0 \qquad (4.1.9)$$

Integrasi kedua ruas Pers. (4.1.9) terhadap $d\xi$ akan memberikan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(|q|^4-\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2\right)\right]d\tau d\xi=0 \qquad (4.1.10)$$

Variasi terhadap Pers. (4.1.10) dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(|q|^4-\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2\right)\right]d\xi d\tau=0 \qquad (4.1.11)$$

Persamaan (4.1.11) bersesuaian dengan prinsip Hamilton untuk sistem kontinu, yakni Pers. (2.3.3). Dengan demikian densitas Lagrangan $\mathscr{L}$ Pers. (4.1.1) dapat dinyatakan dalam bentuk (Agrawal, 2001a)

$$\mathscr{L}=\frac{i}{2}\left(q^*\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^*}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(|q|^4-\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^2\right) \qquad (4.1.12)$$

Dengan mengambil x_υ sebagai ξ dan τ dan φ_ρ sebagai q^*, Pers. (2.3.12) dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^*_\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^*_\tau}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^*}=0 \qquad (4.1.13)$$

Persamaan (4.1.13) merupakan persamaan gerak Lagrange bagi Pers. (4.1.1)[1].

Dengan menggunakan Pers. (2.3.4) dan Pers. (4.1.12), Lagrangan persamaan Schrödinger taklinear dapat dituliskan sebagai

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i}{2}\left(q^{*}q_{\xi} - qq_{\xi}^{*}\right) + \frac{1}{2}\left(|q|^{4} - |q_{\tau}|^{2}\right)\right]d\tau \qquad (4.1.14)$$

dengan $q_{\xi} \equiv \partial q/\partial\xi$, $q_{\xi}^{*} \equiv \partial q^{*}/\partial\xi$, $q_{\tau} \equiv \partial q/\partial\tau$, $q_{\tau}^{*} \equiv \partial q^{*}/\partial\tau$ dan tanda $(*)$ menyatakan konjugat kompleks.

4.2 Penurunan Kriteria Ketakstabilan Modulasi

Mengacu pada bentuk solusi gelombang kontinu persamaan Schrödinger taklinear yang diberikan oleh Pers. (2.2.2) maka fungsi coba q yang memuat suku modulasi kecil amplitudo dan fasa dapat dituliskan sebagai

$$q = \left[\rho_0 + a(\xi)\exp[i(\phi_a(\xi) + \Omega\tau)] + a(\xi)\exp[i(\phi_b(\xi) - \Omega\tau)]\right]\exp[i(k\xi - \omega\tau)]. \qquad (4.2.1)$$

Mengingat bahwa solusi gelombang kontinu dan fungsi coba q yang masing-masing diberikan oleh Pers. (2.2.2) dan Pers. (4.2.1) merupakan fungsi dengan periode 2π , maka integrasi setiap suku Pers. (4.1.14) dapat dilakukan dengan mengambil batas integral $0 \le \tau < 2\pi$ sehingga nilai ω dan Ω terkuantisasi pada setiap nilai $\omega, \Omega = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (Rapti *et.al.*, 2004). Substitusi Pers. (4.2.1) ke dalam Pers. (4.1.14) akan memberikan[2]

[1] Bukti bahwa Pers. (4.1.13) merupakan persamaan gerak Lagrange bagi Pers. (4.1.1) disajikan pada lampiran C.1

[2] Pembuktian Pers. (4.2.2) disajikan pada lampiran C.2.

$$L = \pi\left[-2a^2\frac{d}{d\xi}(\phi_a+\phi_b)+2a^2\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)-\rho_0^4+6a^4+4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right] \tag{4.2.2}$$

Dengan menggunakan Pers. (2.3.13), persamaan gerak Lagrange untuk Pers. (4.2.2) didapatkan dalam bentuk

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\partial L}{\partial(da/d\xi)}\right]=\frac{\partial L}{\partial a}\Rightarrow\frac{d}{d\xi}(\phi_a+\phi_b)=\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)+6a^2+2\rho_0^2\cos(\phi_a+\phi_b) \tag{4.2.3}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\partial L}{\partial(d\phi_a\ d\xi)}\right]=\frac{\partial L}{\partial\phi_a}\Rightarrow\frac{da}{d\xi}=\rho_0^2a\sin(\phi_a+\phi_b) \tag{4.2.4}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\partial L}{\partial(d\phi_b\ d\xi)}\right]=\frac{\partial L}{\partial\phi_b}\Rightarrow\frac{da}{d\xi}=\rho_0^2a\sin(\phi_a+\phi_b) \tag{4.2.5}$$

Mengingat bahwa a merupakan modulasi kecil terhadap solusi gelombang kontinu maka suku $O(a^2)$ dapat diabaikan (Rapti *et.al.*, 2004). Dengan demikian, dari Pers. (4.2.3) – (4.2.5) dapat diperoleh

$$\frac{da}{d\xi}=\rho_0^2a\sin(\phi) \tag{4.2.6}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi}=\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)+2\rho_0^2\cos(\phi) \tag{4.2.7}$$

dengan $\phi=\phi_a+\phi_b$. Persamaan (4.2.7) memiliki solusi[3]

$$\phi=2\arctan\left\{\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{\Omega^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)\right\} \tag{4.2.8}$$

[3] Bukti bahwa Pers. (4.2.8) merupakan solusi Pers. (4.2.7) disajikan pada lampiran C.3.

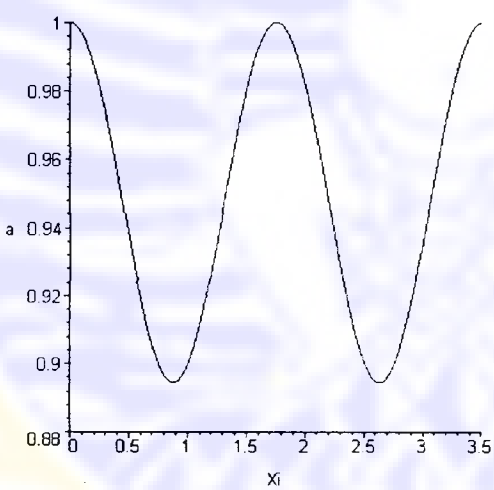
Terdapat dua kasus untuk solusi Pers. (4.2.6). Untuk kasus $4\rho_0^2 - \Omega^2 < 0$, dengan solusi dalam bentuk

$$a(\xi) \sim \sqrt{1 - \frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2 - 4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \qquad (4.2.9)$$

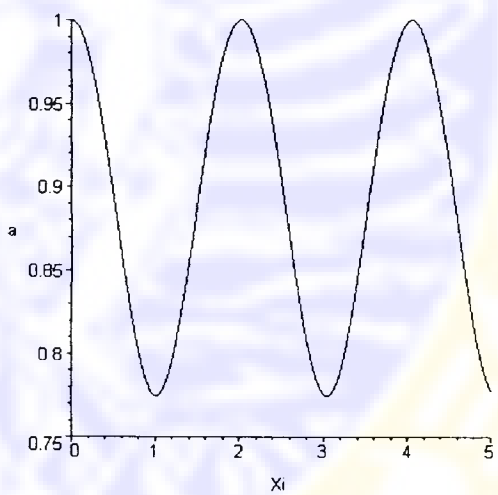
dan kasus $4\rho_0^2 - \Omega^2 > 0$ dengan solusi[4]

$$a(\xi) \sim \sqrt{1 + \frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \qquad (4.2.10)$$

Grafik yang bersesuaian dengan Pers. (4.2.9) dengan nilai Ω tetap, yakni $\Omega = 2$, dan variasi nilai $4\rho_0^2/\Omega^2$, yakni 0,2, 0,4 dan 0,8, masing-masing ditunjukkan pada gambar 4.2.1(a), gambar 4.2.1(b) dan gambar 4.2.1(c).

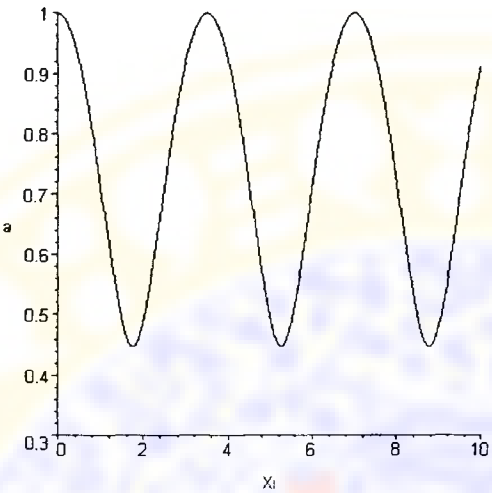


Gambar 4.2.1(a)



Gambar 4.2.1(b)

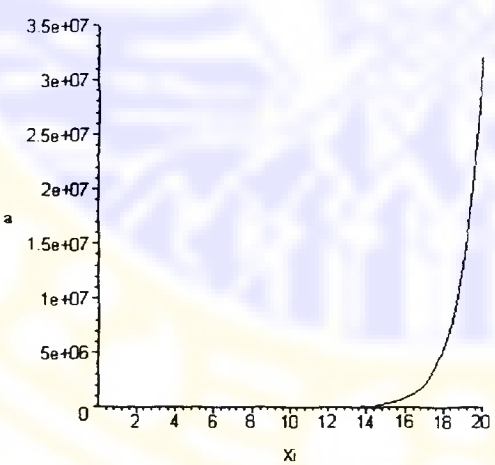
[4] Bukti bahwa Pers. (4.2.9) dan Pers. (4.2.10) merupakan solusi bagi Pers. (4.2.6) disajikan pada lampiran C.4.



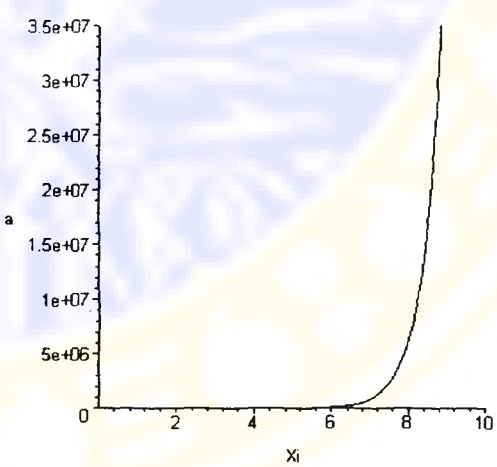
Gambar 4.2.1(c)

Gambar 4.2.1 (a) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$. (b) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$. (c) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$.

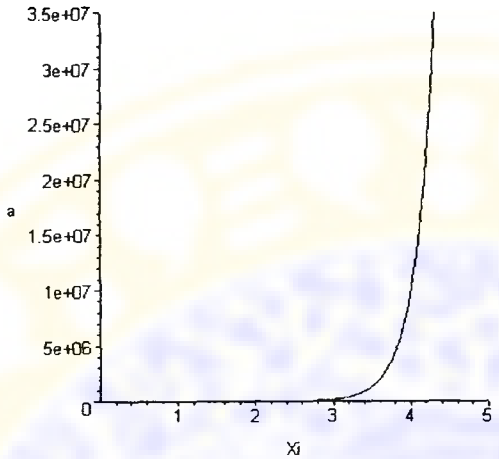
Grafik yang bersesuaian dengan Pers. (4.2.10) dengan nilai Ω tetap, yakni $\Omega = 2$, dan variasi nilai $4\rho_0^2/\Omega^2$, yakni 1,2, 2 dan 5, masing-masing ditunjukkan pada gambar 4.2.2(a), gambar 4.2.2(b) dan gambar 4.2.2(c).



Gambar 4.2.2(a)



Gambar 4.2.2(b)



Gambar 4.2.2(c)

Gambar 4.2.2 (a) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$. (b) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$. (c) Grafik $a-\xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$.

Pada gambar 4.2.2(a), gambar 4.2.2(b) dan gambar 4.2.2(c) terlihat bahwa $a(\xi)$ mengalami pertumbuhan secara eksponensial untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$, $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$ dan $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$ sehingga diperoleh bahwa $4\rho_0^2 - \Omega^2 > 0$ atau $\Omega^2 < 4\rho_0^2$ merupakan kriteria ketakstabilan modulasi yang diinginkan. Hal ini berlaku sekalipun nilai Ω bervariasi sebagaimana yang ditunjukkan pada lampiran D untuk nilai $\Omega = 4$ dan $\Omega = 8$. Dengan demikian, terbukti bahwa hasil kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh menggunakan pendekatan variasional bergantung waktu ternyata tepat sama dengan hasil yang diperoleh melalui analisis kestabilan linear yang telah dibahas pada subbab 2.2.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

5.1.1 Persamaan Helmholtz yang mendeskripsikan perambatan pulsa cahaya dalam serat optik moda tunggal tanpa rugi yang memiliki ketaklinearan kubik dan dispersi kecepatan gugus negatif (dispersi anomali) mematuhi bentuk persamaan Schrödinger taklinear.

5.1.2 Kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh menggunakan pendekatan variasional bergantung waktu dengan mensubstitusikan fungsi coba yang memuat suku modulasi kecil amplitudo dan fasa ke dalam fungsi Lagrangan persamaan Schrödinger taklinear, didapatkan sesuai bahkan tepat sama dengan kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh melalui analisis kestabilan linear.

5.1.3 Kebergantungan nilai frekuensi pita sisi Ω yang diperlukan untuk proses modulasi informasi ke dalam gelombang pembawa didapatkan sangat bergantung pada amplitudo gelombang pembawa ρ_0 melalui hubungan $\Omega^2 > 4\rho_0^2$ dan $\Omega^2 < 4\rho_0^2$. Frekuensi pita sisi yang memenuhi $\Omega^2 > 4\rho_0^2$ menghasilkan modulasi stabil, sebaliknya yang memenuhi $\Omega^2 < 4\rho_0^2$ menyebabkan peningkatan amplitudo gelombang pembawa termodulasi

5.2 Saran

5.2.1 Fenomena ketakstabilan modulasi pada serat optik telah dimanfaatkan untuk membangkitkan pulsa soliton (Hasegawa, 1992). Dengan demikian, hasil kriteria ketakstabilan modulasi yang diperoleh pada penelitian ini perlu ditindaklanjuti hingga memperoleh suatu analisis teoritis mengenai keterkaitan antara kriteria ketakstabilan modulasi dengan formasi soliton.

5.2.2 Selain pada serat optik, fenomena ketakstabilan modulasi telah dikenal dan dipelajari pada berbagai sistem fisis, misalnya kondensasi Bose-Einstein. Dengan demikian, penting untuk menganalisis kriteria ketakstabilan modulasi pada kondensasi Bose-Einstein dengan menerapkan metode pendekatan variasional bergantung waktu. Hal ini dimungkinkan karena persamaan fungsi gelombang kondensat, yakni persamaan Gross-Pitaevskii, juga merupakan persamaan Schrödinger taklinear (Castin, 2001).

DAFTAR PUSTAKA

Ablowitz, M.J., Biondini, G., and Ostrovsky, L.A., 2000, Optical Solitons: Perspectives and Applications. *Chaos*, 10 (3) : 471-474.

Agrawal, G.P., 1992, *Fiber-Optic Communication Systems*. John Wiley & Sons, Inc. Canada.

Agrawal, G.P., 2001a, *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press. New York.

Agrawal, G.P., 2001b, *Nonlinear Fiber Optics, third Edition*. Academic Press. San Diego.

Castin, Y., 2001, *Bose-Einstein condensates in atomic gases: simple theoretical results*, arXiv:cond-mat/0105058.

Corney, J.F. and Bang, O., 2001, *Modulational instability in periodic quadratic nonlinear materials*, arXiv:nlin.PS/0103028.

Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. and Morris, H.C., 1982, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Academic Press. New York.

Eilenberger, G., 1983, *Solitons, Mathematical Methods for Physicists*. Springer-Verlag. Berlin.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967, Method For Solving The Korteweg-de Vries Equation. *Physical Review Letters*, 19 (19) : 1095-1097.

Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics, 2nd Edition*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts.

Hasegawa, A., 1992, Optical solitons in fibers: theoretical review. *Dalam*: Taylor J.R. (ed)., 1981, *Optical Solitons – Theory and Experiment*. Cambridge University Press. New York.

Hasegawa, A. and Kodama, Y., 1995, *Solitons in Optical Communications*. Clarendon Press. Oxford.

Lakshmanan, K., 2004, *Nonlinear Physics: Integrability, Chaos and Beyond*, arXiv:solv-int/9709008.

Rapti, Z., Kevrekidis, P.G., Smerzi, A. and Bishop, A.R., 2004, *Variational approach to the modulational instability*, arXiv:cond-mat/0404601.

Sulem, C. and Sulem, P.L., 1999, *The Nonlinear Schrödinger Equation*. Springer-Verlag. New York.

Wangsness, R.K., 1986, *Electromagnetic Fields*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Zakharov, V.E. and Shabat, A.B., 1972, Exact Theory-of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation Of Waves in Nonlinear Media. *Soviet Physics JETP*, 34 (1) : 62-69.

LAMPIRAN A

Pembuktian Rumus-Rumus Subbab 2.1.4

A.1 Pembuktian Pers. (2.1.4.23), yakni

$$P_L(\vec{r},t)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega$$

Bukti :

Substitusi Pers. (2.1.4.20), yakni

$$\vec{E}=\frac{1}{2}\hat{x}[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]$$

dan Pers. (2.1.4.21), yakni

$$\vec{P}_L=\frac{1}{2}\hat{x}[P_L(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]$$

ke dalam Pers. (2.1.4.17), yakni

$$\vec{P}_L(\vec{r},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')\vec{E}(\vec{r},t')dt'$$

akan memberikan

$$\frac{1}{2}\hat{x}[P_L(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]=$$

$$\frac{1}{2}\hat{x}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi^{(1)}(t-t')[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]dt'$$

$$P_L(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{xx}^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')\exp(-i\omega_0 t')dt'$$

$$P_L(\vec{r},t)=\varepsilon_0\int_{\infty}^{\infty}\chi_{xx}^{(1)}(t-t')E(\vec{r},t')\exp[i\omega_0(t-t')]dt' \qquad \text{(A.1.1)}$$

Dengan mengingat bahwa

$$\chi_{xx}^{(1)}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$$

$$\chi_{xx}^{(1)}(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\exp[-i\omega(t-t')]d\omega \qquad \text{(A.1.2)}$$

maka Pers. (A.1.1) dapat dituliskan sebagai

$$P_L(\vec{r},t)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\exp[-i\omega(t-t')]E(\vec{r},t')\exp[i\omega_0(t-t')]dt'd\omega$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)E(\vec{r},t')\exp[i(\omega-\omega_0)t']\exp[-i(\omega-\omega_0)t]dt'd\omega$$

$$P_L(\vec{r},t)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t')\exp[i(\omega-\omega_0)t']dt'\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega$$

(A.1.3)

Dengan mengingat bahwa

$$\tilde{E}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t)\exp(i\omega t)dt \qquad \text{(2.1.4.24)}$$

$$\tilde{E}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t')\exp(i\omega t')dt'$$

$$\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t')\exp[i(\omega-\omega_0)t']dt' \qquad \text{(A.1.4)}$$

maka Pers. (A.1.3) dapat dituliskan sebagai

$$P_L(\vec{r},t)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega \qquad \blacksquare$$

A.2 Pembuktian Pers. (2.1.4.27), yakni

$$P_{NL}\approx\varepsilon_0\varepsilon_{NL}E(\vec{r},t)$$

dengan

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}|E(\vec{r},t)|^2$$

Bukti :

Substitusi Pers. (2.1.4.20), yakni

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\hat{x}[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]$$

dan Pers. (2.1.4.22), yakni

$$\vec{P}_{NL} = \frac{1}{2}\hat{x}[P_{NL}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.]$$

ke dalam Pers. (2.1.4.26), yakni

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0\chi^{(3)}:\times\vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)$$

akan memberikan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\hat{x}[P_{NL}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.] &= \varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}:\frac{1}{2}\hat{x}[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\\ &\quad + E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)]\frac{1}{2}\hat{x}[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\\ &\quad + E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)]\frac{1}{2}\hat{x}[E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\\ &\quad + E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)]\\ &= \varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}:\frac{1}{8}\hat{x}[E^2(\vec{r},t)\exp(-2i\omega_0 t)\\ &\quad + 2|E(\vec{r},t)|^2 + E^{*2}(\vec{r},t)\exp(2i\omega_0 t)]\\ &\quad [E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)]\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{NL}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.\right]=\varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}:\frac{1}{8}\hat{x}\Big[E^3(\vec{r},t)\exp(-3i\omega_0 t)$$

$$+|E(\vec{r},t)|^2E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)$$

$$+2|E(\vec{r},t)|^2E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)$$

$$+2|E(\vec{r},t)|^2E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)$$

$$+|E(\vec{r},t)|^2E^*(\vec{r},t)\exp(i\omega_0 t)$$

$$E^{*3}(\vec{r},t)\exp(3i\omega_0 t)\Big]$$

$$=\varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}:\frac{1}{8}\hat{x}\Big[E^3(\vec{r},t)\exp(-3i\omega_0 t)$$

$$+3|E(\vec{r},t)|^2E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+c.c.\Big]$$

$$P_{NL}(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)=\frac{1}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}\Big[E^3(\vec{r},t)\exp(-3i\omega_0 t)$$

$$+3|E(\vec{r},t)|^2E(\vec{r},t)\exp(-i\omega_0 t)\Big] \qquad \text{(A.2.1)}$$

Suku yang berosilasi pada frekuensi $3\omega_0$ diabaikan sehingga Pers. (A.2.1) dapat dituliskan sebagai

$$P_{NL}(\vec{r},t)\approx\frac{3}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}|E(\vec{r},t)|^2E(\vec{r},t)$$

$$P_{NL}(\vec{r},t)\approx\varepsilon_0\varepsilon_{NL}E(\vec{r},t) \qquad \blacksquare$$

dengan

$$\varepsilon_{NL}=\frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}|E(\vec{r},t)|^2$$

A.3 Pembuktian Pers. (2.1.4.35), yakni

$$\vec{\nabla}^2\tilde{E}+k_0^2\varepsilon(\omega)\tilde{E}=0$$

dengan

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}$$

Bukti :

Dari Pers. (2.1.4.28), yakni

$$\vec{E} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

didapat

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-i\omega\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega \qquad (2.1.4.32)$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\vec{\nabla}^2\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega \qquad (2.1.4.31)$$

Dari Pers. (2.1.4.29), yakni

$$\vec{P}_L = \frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

didapat

$$\frac{\partial\vec{P}_L}{\partial t} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\left[-i\omega\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

$$\frac{\partial^2\vec{P}_L}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega \qquad (2.1.4.33)$$

Dari Pers. (2.1.4.30), yakni

$$\vec{P}_{NL} = \frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\varepsilon_{NL}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

didapat

$$\frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} = -\frac{\hat{x}}{4\pi}\varepsilon_0\varepsilon_{NL}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega \qquad (2.1.4.34)$$

Substitusi Pers. (2.1.4.31), Pers. (2.1.4.32), Pers. (2.1.4.33) dan Pers. (2.1.4.34) ke dalam Pers. (2.1.4.19) memberikan

$$\frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\vec{\nabla}^2\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega+\frac{\hat{x}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{c^2}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)\right.$$

$$\left.+c.c.\right]d\omega=-\frac{\hat{x}}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

$$-\frac{\hat{x}}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{NL}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_0)\exp(-i\omega t)+c.c.\right]d\omega$$

$$\vec{\nabla}^2\tilde{E}+k_0^2\left(1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}+\varepsilon_{NL}\right)\tilde{E}=0$$

$$\vec{\nabla}^2\tilde{E}+k_0^2\varepsilon(\omega)\tilde{E}=0 \qquad \blacksquare$$

dengan

$$\varepsilon(\omega)=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{NL}$$

A.4 Pembuktian Pers. (2.1.4.38), yakni

$$n=\left\{1+\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right]\right\}^{1/2} \qquad \alpha=(k_0/n)\,\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right]$$

dan Pers. (2.1.4.39), yakni

$$\bar{n}_2=\frac{3}{8n}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \qquad \alpha_2=\frac{3k_0}{4n}\mathrm{Im}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right]$$

Bukti :

Substitusi Pers. (2.1.4.36), yakni

$$\tilde{n}=n+\bar{n}_2|E|^2 \qquad \tilde{\alpha}=\alpha+\alpha_2|E|^2$$

ke dalam hubungan

$$\left(\tilde{n}+i\frac{\tilde{\alpha}}{2k_0}\right)^2=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{NL} \qquad \text{(A.4.1)}$$

dengan $\varepsilon_{NL}=(3/4)\chi_{xxxx}^{(3)}|E(\vec{r},t)|^2$, memberikan

$$1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}|E|^2=\left(n+\bar{n}_2|E|^2\right)^2-\frac{\left(\alpha+\alpha_2|E|^2\right)^2}{4k_0^2}$$

$$+i\frac{\left(n+\bar{n}_2|E|^2\right)\left(\alpha+\alpha_2|E|^2\right)}{k_0}$$

$$=n^2+2n\bar{n}_2|E|^2+\bar{n}_2^2|E|^4$$

$$-\left[\frac{\alpha^2+2\alpha\alpha^2|E|^2+\alpha_2^2|E|^4}{4k_0^2}\right]$$

$$+i\frac{\left(n\alpha+n\alpha_2|E|^2+\alpha\bar{n}_2|E|^2+\bar{n}_2\alpha_2|E|^4\right)}{k_0}$$

$$=\left(n^2+i\frac{n\alpha}{k_0}-\frac{\alpha^2}{4k_0^2}\right)$$

$$+\left[2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}+i\left(n\frac{\alpha_2}{k_0}+\bar{n}_2\frac{\alpha}{k_0}\right)\right]|E|^2$$

$$+\left[\bar{n}_2^2-\frac{\alpha_2^2}{4k_0^2}+i\frac{\bar{n}_2\alpha_2}{k_0}\right]|E|^4$$

$$1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}|E|^2=\left[n+i\frac{\alpha}{2k_0}\right]^2+\left[2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}+i\left(n\frac{\alpha_2}{k_0}+\bar{n}_2\frac{\alpha}{k_0}\right)\right]|E|^2$$

$$+\left[\bar{n}_2+i\frac{\alpha_2}{2k_0}\right]^2|E|^4 \qquad \text{(A.4.2)}$$

Nilai $\bar{n}_2$ dan α_2 sangat kecil dibandingkan n dan α sehingga koefisien $|E|^4$ dapat diabaikan. Dengan demikian, Pers. (A.4.2) dapat dituliskan sebagai

$$\left(n+\frac{i\alpha}{2k_0}\right)^2+\left[2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}+i\left(\bar{n}_2\frac{\alpha}{k_0}+n\frac{\alpha_2}{k_0}\right)\right]|E|^2=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}|E|^2 \tag{2.1.4.37}$$

Dari Pers. (2.1.4.37) diperoleh

$$\left(n+i\frac{\alpha}{2k_0}\right)^2=1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)$$

$$n^2-\frac{\alpha^2c^2}{4\omega^2}+i\frac{\alpha cn}{\omega}=1+\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right]+i\,\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right] \tag{A.4.3}$$

Dari Pers. (A.4.3), untuk bagian imajiner diperoleh

$$\frac{\alpha cn}{\omega}=\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right] \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\left(\frac{k_0}{n}\right)\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right] \quad\blacksquare$$

dan untuk bagian real diperoleh

$$n^2=1+\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right] \quad\Leftrightarrow\quad n=\left\{1+\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)\right]\right\}^{1/2} \quad\blacksquare$$

Dari Pers. (2.1.4.37) juga diperoleh

$$2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}+i\left(n\frac{\alpha_2}{k_0}+\bar{n}_2\frac{\alpha}{k_0}\right)=\frac{3}{4}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right]+i\frac{3}{4}\mathrm{Im}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \tag{A.4.4}$$

Dari Pers. (A.4.4), untuk bagian real diperoleh

$$2n\bar{n}_2-\frac{\alpha\alpha_2}{2k_0^2}=\frac{3}{4}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right]$$

$$2n\bar{n}_2=\frac{3}{4}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \bar{n}_2=\frac{3}{8n}\mathrm{Re}\left[\chi_{xxxx}^{(3)}\right] \quad\blacksquare$$

dan untuk bagian imajiner diperoleh

$$\bar{n}_2 \frac{\alpha}{k_0} + n\frac{\alpha_2}{k_0} = \frac{3}{4}\mathrm{Im}\left[\chi^{(3)}_{xxxx}\right]$$

$$n\frac{\alpha_2}{k_0} = \frac{3}{4}\mathrm{Im}\left[\chi^{(3)}_{xxxx}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = \frac{3k_0}{4n}\mathrm{Im}\left[\chi^{(3)}_{xxxx}\right] \qquad \blacksquare$$

A.5 Pembuktian Pers. (2.1.4.41), yakni

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2\right]F = 0$$

dan

Pers. (2.1.4.42), yakni

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2\right)\tilde{A} = 0$$

Bukti :

Persamaan (2.1.4.35), yakni

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{E} + k_0^2 \varepsilon(\omega)\tilde{E} = 0$$

dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(\omega)\tilde{E} = 0 \qquad \text{(A.5.1)}$$

Substitusi Pers. (2.1.4.40), yakni

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)\exp(i\beta_0 z)$$

ke dalam Pers. (A.5.1) memberikan

$$\tilde{A}\exp(i\beta_0 z)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[F\tilde{A}\exp(i\beta_0 z)\right] + k_0^2 \varepsilon(\omega)F\tilde{A}\exp(i\beta_0 z) = 0$$

(A.5.2)

Suku kedua Pers. (A.5.2) dapat diperoleh melalui langkah-langkah berikut ini.

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(F\tilde{A}\exp(i\beta_0 z)\right)\right]$$

$$= F\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}\exp(i\beta_0 z) + i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\tilde{A}\right]$$

$$= F\left[\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}\exp(i\beta_0 z) + i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}\right.$$

$$\left. - \beta_0^2 \exp(i\beta_0 z)\tilde{A}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} = F\left[\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}\exp(i\beta_0 z) + 2i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 \exp(i\beta_0 z)\tilde{A}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} = F\left[2i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 \exp(i\beta_0 z)\tilde{A}\right] \qquad \text{(A.5.3)}$$

Persamaan (A.5.3) diperoleh dengan mengingat bahwa $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ merupakan fungsi berubah lambat terhadap z sehingga turunan kedua terhadap z dapat diabaikan.

Dengan menggunakan Pers. (A.5.3), Pers. (A.5.2) dapat dituliskan sebagai

$$\tilde{A}\exp(i\beta_0 z)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + F\left[2i\beta_0 \exp(i\beta_0 z)\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 \exp(i\beta_0 z)\tilde{A}\right]$$

$$+ k_0^2 \varepsilon(\omega) F\tilde{A}\exp(i\beta_0 z) = 0 \qquad \text{(A.5.4)}$$

Pembagian kedua ruas Pers. (A.5.4) dengan $F\tilde{A}\exp(i\beta_0 z)$ memberikan

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{2i\beta_0}{\tilde{A}}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \beta_0^2 + k_0^2 \varepsilon(\omega) = 0 \qquad \text{(A.5.5)}$$

Dengan mengenalkan $\tilde{\beta}^2$ sebagai suatu fungsi pemisah, Pers. (A.5.5) pecah menjadi dua bagian yaitu

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+k_0^2\varepsilon(\omega)=\tilde{\beta}^2 \qquad \text{(A.5.6)}$$

$$\frac{2i\beta_0}{\tilde{A}}\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}-\beta_0^2=-\tilde{\beta}^2 \qquad \text{(A.5.7)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.5.6) dengan F memberikan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left[k_0^2\varepsilon(\omega)-\tilde{\beta}^2\right]F=0 \quad \blacksquare$$

dan perkalian kedua ruas Pers. (A.5.7) dengan $\tilde{A}$ memberikan

$$2i\beta_0\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}+\left[\tilde{\beta}^2-\beta_0^2\right]\tilde{A}=0 \quad \blacksquare$$

A.6 Pembuktian Pers. (2.1.4.44), yakni

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho}+\left(n^2k_0^2-\tilde{\beta}^2-\frac{m^2}{\rho^2}+2n\Delta nk_0^2\right)f=0$$

Bukti :

Dengan menggunakan hubungan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \qquad \text{(A.6.1)}$$

Pers. (2.1.4.41), yakni

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left[k_0^2\varepsilon(\omega)-\tilde{\beta}^2\right]F=0$$

dapat dituliskan dalam koordinat silinder sebagai

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}+\left[k_0^2\varepsilon(\omega)-\tilde{\beta}^2\right]F=0 \qquad \text{(A.6.2)}$$

Dalam koordinat silinder $F(x,y)$ dapat dituliskan sebagai

$$F(x,y) = f(\rho)\exp(-im\phi) \qquad \text{(A.6.3)}$$

Dari Pers. (A.6.3) didapat

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \exp(-im\phi)\frac{df}{d\rho} \qquad \text{(A.6.4)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \exp(-im\phi)\frac{d^2 f}{d\rho^2} \qquad \text{(A.6.5)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = -m^2 \exp(-im\phi) f \qquad \text{(A.6.6)}$$

Substitusi Pers. (A.6.4), Pers. (A.6.5) dan Pers. (A.6.6) ke dalam Pers. (A.6.2) diperoleh

$$\exp(-im\phi)\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \exp(-im\phi)\frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}\exp(-im\phi) f$$

$$+\left[k_0^2 \varepsilon(\omega) - \tilde{\beta}^2\right] f \exp(-im\phi) = 0 \qquad \text{(A.6.7)}$$

Pembagian kedua ruas Pers. (A.6.7) dengan $\exp(-im\phi)$ memberikan

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \left[k_0^2 \varepsilon(\omega) - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right] f = 0 \qquad \text{(2.1.4.43)}$$

Dengan menggunakan hubungan

$$\varepsilon(\omega) = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n \qquad \text{(A.6.8)}$$

Pers. (2.1.4.43) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} + \left(n^2 k_0^2 - \tilde{\beta}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} + 2n\Delta n k_0^2\right) f = 0 \qquad \blacksquare$$

A.7 Pembuktian Pers. (2.1.4.48), yakni

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \rho \Delta n |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}{\iint \rho |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}$$

Bukti :

Dengan menggunakan hubungan

$$\varepsilon(\omega) = n^2 + 2n\Delta n \qquad \text{(A.7.1)}$$

Pers. (2.1.4.41), yakni

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[k_0^2 \varepsilon(\omega) - \tilde{\beta}^2\right] F = 0$$

dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[k_0^2 \left(n^2 + 2n\Delta n\right) - \tilde{\beta}^2\right] F = 0$$

$$\tilde{\nabla}^2 F + \left[k_0^2 \left(n^2 + 2n\Delta n\right) - \tilde{\beta}^2\right] F = 0 \qquad \text{(A.7.2)}$$

Pada Pers. (A.7.2), $\tilde{\beta}^2 \approx \beta^2 + 2\beta\Delta\beta$ dan F digantikan oleh $F' = F + \Delta F$.

Dengan demikian, Pers. (A.7.2) dapat dituliskan sebagai

$$\tilde{\nabla}^2 (F + \Delta F) + \left[k_0^2 \left(n^2 + 2n\Delta n\right) - \left(\beta^2 + 2\beta\Delta\beta\right)\right](F + \Delta F) = 0$$

$$\tilde{\nabla}^2 F + \tilde{\nabla}^2 (\Delta F) + k_0^2 \left(n^2 + 2n\Delta n\right) F + k_0^2 \left(n^2 + 2n\Delta n\right)(\Delta F) - \left(\beta^2 + 2\beta\Delta\beta\right) F$$

$$- \left(\beta^2 + 2\beta\Delta\beta\right)(\Delta F) = 0$$

$$\tilde{\nabla}^2 F + \tilde{\nabla}^2 (\Delta F) + k_0^2 n^2 F + 2k_0^2 n\Delta n F + k_0^2 n^2 (\Delta F) + 2k_0^2 n\Delta n (\Delta F) - \beta^2 F$$

$$- 2\beta\Delta\beta F - \beta^2 (\Delta F) - 2\beta\Delta\beta (\Delta F) = 0$$

$$\tilde{\nabla}^2 F + \tilde{\nabla}^2 (\Delta F) + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right) F + \left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right) F + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)(\Delta F)$$

$$+ \left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right)(\Delta F) = 0 \qquad \text{(A.7.3)}$$

Karena Δn, $\Delta\beta$ dan ΔF bernilai kecil, suku terakhir Pers. (A.7.3) dapat diabaikan sehingga diperoleh

$$\vec{\nabla}^2 F + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)F = 0 \qquad \text{(A.7.4)}$$

$$\vec{\nabla}^2(\Delta F) + \left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right)F + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)(\Delta F) = 0 \qquad \text{(A.7.5)}$$

Konjugat kompleks Pers. (A.7.4) dapat dituliskan sebagai

$$\vec{\nabla}^2 F^* + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)F^* = 0 \qquad \text{(A.7.6)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.7.6) dengan ΔF memberikan

$$(\Delta F)\vec{\nabla}^2 F^* + \left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)(\Delta F)F^* = 0 \qquad \text{(A.7.7)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.7.5) dengan F^* memberikan

$$F^*\vec{\nabla}^2(\Delta F) + \left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right)|F|^2 + F^*\left(k_0^2 n^2 - \beta^2\right)(\Delta F) = 0 \qquad \text{(A.7.8)}$$

Pengurangan Pers. (A.7.8) dengan Pers. (A.7.7) memberikan

$$\left[F^*\vec{\nabla}^2(\Delta F) - (\Delta F)\vec{\nabla}^2 F^*\right] + \left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right)|F|^2 = 0 \qquad \text{(A.7.9)}$$

Integrasi kedua ruas Pers. (A.7.9) terhadap elemen luas $\rho d\rho d\phi$ memberikan

$$\iint\left[F^*\vec{\nabla}^2(\Delta F) - (\Delta F)\vec{\nabla}^2 F^*\right]\rho d\rho d\phi + \iint\left(2k_0^2 n\Delta n - 2\beta\Delta\beta\right)|F|^2\,\rho d\rho d\phi = 0 \qquad \text{(A.7.10)}$$

Integrasi suku pertama Pers. (A.7.10) dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Green yang memberikan

$$\iint\left[F^*\vec{\nabla}^2(\Delta F) - (\Delta F)\vec{\nabla}^2 F^*\right]\rho d\rho d\phi = \oint_C\left[F^*\vec{\nabla}(\Delta F) - (\Delta F)\vec{\nabla}F^*\right]\cdot\hat{n}dl \qquad \text{(A.7.11)}$$

dengan C merupakan lintasan garis tertutup yang melingkupi elemen luas $dA = \rho d\rho d\phi$. Solusi F merupakan solusi fisis jika menurun secara

eksponensial terhadap jari-jari ρ sehingga untuk ρ yang mendekati tak berhingga, ruas kanan Pers. (A.7.11) bernilai nol .

Dengan demikian, dari Pers. (A.7.10) didapat

$$\iint 2k_0^2 n\Delta n|F|^2 \rho d\rho d\phi = \iint 2\beta\Delta\beta|F|^2 \rho d\rho d\phi$$

$$\Delta\beta = \frac{2k_0^2 n\iint \Delta n|F|^2 \rho d\rho d\phi}{2\beta\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}$$

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \Delta n|F|^2 \rho d\rho d\phi}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}$$ ■

A.8 Pembuktian Pers. (2.1.4.53), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A$$

Bukti :

Substitusi Pers. (2.1.4.50), yakni

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta_2$$

ke dalam Pers. (2.1.4.49), yakni

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0]\tilde{A}$$

memberikan

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i\left[(\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + \Delta\beta\right]\tilde{A} \qquad \text{(A.8.1)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.8.1) dengan $(1/2\pi)\exp[-i(\omega - \omega_0)t]$ dan integrasi kedua ruas persamaan tersebut terhadap $d\omega$ memberikan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\left[(\omega-\omega_0)\beta_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2+\Delta\beta\right]$$

$$\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega \quad \text{(A.8.2)}$$

Dengan mengingat bahwa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]\right\}=-i(\omega-\omega_0)\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i(\omega-\omega_0) \quad \text{(A.8.3)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]\right\}=-(\omega-\omega_0)^2\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=-(\omega-\omega_0)^2 \quad \text{(A.8.4)}$$

Pers. (A.8.2) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\beta_1\frac{\partial}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+i\Delta\beta\right]$$

$$\tilde{A}\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega \quad \text{(A.8.5)}$$

Dengan mengingat definisi $A(z,t)$ yang diberikan Pers. (2.1.4.52), yakni

$$A(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)\exp[-i(\omega-\omega_0)t]d\omega$$

Pers. (A.8.5) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial A}{\partial z}=-\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+i\Delta\beta A \quad \blacksquare$$

A.9 Pembuktian Pers. (2.1.4.54), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A$$

Bukti :

Nilai α_2 pada Pers. (2.1.4.36), yakni $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2$, kecil sehingga dapat diabaikan. Dengan demikian, hubungan $\Delta n = \bar{n}_2 |E|^2 + i(\tilde{\alpha}/2k_0)$ dapat dituliskan sebagai

$$\Delta n = \bar{n}_2 |E|^2 + i\frac{\alpha}{2k_0} \tag{A.9.1}$$

Substitusi Pers. (A.9.1) ke dalam Pers. (2.1.4.48), yakni

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \rho \Delta n |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}{\iint \rho |F(\rho,\phi)|^2 \, d\rho d\phi}$$

memberikan

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \iint \left(\bar{n}_2 |E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} \right) |F|^2 \rho d\rho d\phi}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}$$

$$= \frac{k_0 \bar{n}_2 \iint |F|^4 |A|^2 \rho d\rho d\phi}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi} + i\frac{\alpha}{2} \frac{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}$$

$$\Delta\beta = \frac{\bar{n}_2 \omega}{c} \frac{\iint |F|^4 \rho d\rho d\phi}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi} |A|^2 + i\frac{\alpha}{2} \tag{A.9.2}$$

Pada suku pertama ruas kanan Pers. (A.9.2), $|A|^2$ diasumsikan ternormalisasi, yakni

$$|A|^2 \rightarrow \frac{|A|^2}{\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi}$$

sedemikian hingga $|A|^2$ mewakili daya optis.

Dengan demikian, Pers. (A.9.2) dapat dituliskan menjadi

$$\Delta\beta = \frac{\bar{n}_2\omega}{c}\frac{\iint |F|^4 \rho d\rho d\phi}{\left(\iint |F|^2 \rho d\rho d\phi\right)^2}|A|^2 + i\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(A.9.3)}$$

Substitusi Pers. (A.9.3) ke dalam Pers. (2.1.4.53), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A$$

memberikan

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma|A|^2 A - \frac{\alpha}{2}A$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma|A|^2 A \qquad \blacksquare$$

dengan

$$\gamma = \frac{\bar{n}_2\omega}{cA_{eff}} \qquad \text{(2.1.4.55)}$$

dan

$$A_{eff} = \frac{\left(\iint \rho|F(\rho,\phi)|^2 d\rho d\phi\right)^2}{\iint \rho|F(\rho,\phi)|^4 d\rho d\phi} \qquad \text{(2.1.4.56)}$$

A.10 Pembuktian Pers. (2.1.4.57), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma|A|^2 A$$

Bukti :

Dari transformasi $t' = t - \beta_1 z$, didapat

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \qquad \text{(A.10.1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}=-\beta_1\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(A.10.2)}$$

Subsititusi Pers. (A.10.1) dan Pers. (A.10.2) ke dalam Pers. (2.1.4.54), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A$$

memberikan

$$-\beta_1\frac{\partial A}{\partial t'}+\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t'}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A \qquad \blacksquare$$

A.11 Pembuktian Pers. (2.1.4.59), yakni

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}-\frac{s}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2q=-i\frac{\Gamma}{2}q$$

Bukti :

Dari Pers. (2.1.4.58), yakni

$$\tau=\frac{t'}{T_0} \qquad \xi=\frac{z}{L_D} \qquad q=\sqrt{\gamma L_D}A$$

diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial \xi}=\frac{1}{L_D\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial q}{\partial \xi} \qquad \text{(A.11.1)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t'}=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial \tau}{\partial t'}\frac{\partial q}{\partial \tau}=\frac{1}{T_0\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial q}{\partial \tau} \qquad \text{(A.11.2)}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}=\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{T_0\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)=\frac{\partial \tau}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{T_0\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)=\frac{1}{T_0^2\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} \qquad \text{(A.11.3)}$$

Substitusi Pers. (A.11.1), Pers. (A.11.2) dan Pers. (A.11.3) ke dalam Pers. (2.1.4.57), yakni

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}+\frac{\alpha}{2}A=i\gamma|A|^2A$$

memberikan

$$\frac{1}{L_D\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{1}{T_0^2\sqrt{\gamma L_D}}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+\frac{\alpha}{2}\frac{q}{\sqrt{\gamma L_D}}=\frac{i\gamma|q|^2q}{(\gamma L_D)\sqrt{\gamma L_D}} \qquad \text{(A.11.4)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.11.4) dengan $L_D\sqrt{\gamma L_D}$ memberikan

$$\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{i}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+\frac{1}{2}\alpha L_D q=i|q|^2q$$

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2q=-\frac{i}{2}\Gamma q \qquad \text{(A.11.5)}$$

dengan $\Gamma=\alpha L_D$. Secara umum, Pers. (A.11.5) dapat dituliskan sebagai

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}-\frac{s}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2q=-i\frac{\Gamma}{2}q \qquad \blacksquare$$

dengan s dapat bernilai $+1$ atau -1.

A.12 Pembuktian bahwa Pers. (2.1.4.61), yakni

$$q(\xi,\tau)=\sec h(\tau)\exp(i\xi/2)$$

merupakan solusi soliton fundamental Pers. (2.1.4.60), yakni

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}+|q|^2q=0$$

Bukti :

Mengacu pada sifat soliton fundamental, diasumsikan bahwa bentuk solusi Pers. (2.1.4.60) adalah

$$q(\xi,\tau)=V(\tau)\exp[i\Phi(\xi)] \qquad \text{(A.12.1)}$$

Pada Pers. (A.12.1), $V(\tau)$ harus tidak bergantung pada ξ menunjukkan bahwa sifat soliton fundamental adalah mempertahankan bentuknya selama perambatan. Fasa Φ bergantung pada ξ tetapi diasumsikan tidak bergantung pada τ.

Dari Pers. (A.12.1) diperoleh

$$\frac{\partial q}{\partial \xi}=iV\exp(i\Phi)\frac{d\Phi}{d\xi} \qquad \text{(A.12.2)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau}=\exp(i\Phi)\frac{dV}{d\tau}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}=\exp(i\Phi)\frac{d^2V}{d\tau^2} \qquad \text{(A.12.3)}$$

$$|q|^2 q=V^3\exp(i\Phi) \qquad \text{(A.12.4)}$$

Substitusi Pers. (A.12.2), Pers. (A.12.3) dan Pers. (A.12.4) ke dalam Pers. (2.1.4.60) memberikan

$$-V\exp(i\Phi)\frac{d\Phi}{d\xi}+\frac{1}{2}\exp(i\Phi)\frac{d^2V}{d\tau^2}+V^3\exp(i\Phi)=0 \qquad \text{(A.12.5)}$$

Pembagian ruas kiri dan ruas kanan Pers. (A.12.5) dengan $\exp(i\Phi)$ memberikan

$$-V\frac{d\Phi}{d\xi}+\frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\tau^2}+V^3=0$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi}=\frac{1}{V}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\tau^2}+V^3\right] \qquad \text{(A.12.6)}$$

Persamaan (A.12.6) dapat dipecah menjadi persamaan untuk Φ dan V yang berbentuk

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = K \qquad \text{(A.12.7)}$$

$$\frac{1}{V}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\tau^2} + V^3\right] = K \qquad \text{(A.12.8)}$$

dengan K merupakan konstanta pemisah. Solusi Pers. (A.12.7) berbentuk $\Phi = K\xi$ dan solusi Pers. (A.12.8) dapat diperoleh melalui langkah berikut ini.

$$\frac{1}{V}\left[\frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\tau^2} + V^3\right] = K$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\tau^2} + V^3 = KV$$

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} = 2\left(KV - V^3\right) = 2V\left(K - V^2\right) \qquad \text{(A.12.9)}$$

Perkalian kedua ruas Pers. (A.12.9) dengan $2\left(dV/d\tau\right)$ dan integrasi kedua ruas terhadap $d\tau$ memberikan

$$\left(\frac{dV}{d\tau}\right)^2 = 2KV^2 - V^4 + C \qquad \text{(A.12.10)}$$

dengan C adalah konstanta integrasi. Dengan menggunakan syarat batas bahwa baik V maupun $dV/d\tau$ akan bernilai nol sebagaimana $|\tau| \to \infty$, diperoleh nilai $C = 0$. Nilai $K = 1/2$ diperoleh menggunakan syarat bahwa pada puncak soliton (*soliton peak*) $\tau = 0$, $V = 1$ dan $dV/d\tau = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai C dan K pada Pers. (A.12.10) diperoleh

$$\frac{dV}{V\sqrt{1-V^2}} = d\tau \qquad \text{(A.12.11)}$$

Integrasi kedua ruas Pers. (A.12.11) menggunakan syarat bahwa pada puncak soliton $\tau = 0$ dan $V = 1$, memberikan $V(\tau) = \operatorname{sech}(\tau)$. Substitusi $V(\tau) = \operatorname{sech}(\tau)$, $\Phi = K\xi$ dan $K = 1/2$ ke dalam Pers. (A.12.1) memberikan

$$q(\xi,\tau) = \operatorname{sech}(\tau)\exp(i\xi/2) \qquad \blacksquare$$

LAMPIRAN B

Pembuktian Rumus-Rumus Subbab 2.2

B.1 Pembuktian Pers. (2.2.5), yakni

$$2\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}+\rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2}+\Gamma\rho=0$$

dan Pers. (2.2.6), yakni

$$\rho^2-\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2=0$$

Bukti :

Dari Pers. (2.2.4), yakni

$$q=\rho\exp(i\sigma)$$

didapat

$$\frac{\partial q}{\partial \xi}=\frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+\frac{\partial q}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}=\exp(i\sigma)\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+i\rho\exp(i\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \xi}=\exp(i\sigma)\left\{\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+i\rho\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\right\} \qquad \text{(B.1.1)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau}=\frac{\partial q}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\frac{\partial q}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}=\exp(i\sigma)\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+i\rho\exp(i\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau}=\exp(i\sigma)\left\{\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+i\rho\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)=\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\exp(i\sigma)\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+i\rho\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)\right\}$$

$$=i\exp(i\sigma)\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+i\rho\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}+\exp(i\sigma)\left\{\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2}+i\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)+i\rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2}\right\}$$

$$= \left\{ i\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right) - \rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} + i\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right) + i\rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} \right\} \exp(i\sigma)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 + i\left(2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} \right) \right\} \exp(i\sigma) \qquad \text{(B.1.2)}$$

$$|q|^2 = \rho^2$$

$$|q|^2 q = \rho^3 \exp(i\sigma) \qquad \text{(B.1.3)}$$

Substitusi Pers. (2.2.4), Pers. (B.1.1), Pers. (B.1.2) dan Pers. (B.1.3) ke dalam Pers. (2.2.1), yakni

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + |q|^2 q = -i\frac{\Gamma}{2}q,$$

dan membagi kedua ruas dengan $\exp(i\sigma)$, akan memberikan

$$i\frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{i}{2}\left(2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} \right) + \rho^3 = -i\frac{\Gamma}{2}\rho$$

$$\left\{ \rho^3 - \rho\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 \right\} + i\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + \frac{\Gamma\rho}{2} \right\} = 0$$

(B.1.4)

Dari Pers. (B.1.4), setelah kedua ruas dikalikan 2, untuk bagian imajiner diperoleh

$$2\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + 2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} + \Gamma\rho = 0 \qquad \blacksquare$$

sedangkan untuk bagian real, setelah kedua ruas dibagi ρ, diperoleh

$$\rho^2 - \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2 = 0 \qquad \blacksquare$$

B.2 Pembuktian Pers. (2.2.10), yakni

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \frac{\Gamma}{2}\rho_0 = 0$$

dan Pers. (2.2.11), yakni

$$\rho_0^2 = k + \tfrac{1}{2}\omega^2$$

Bukti :

Dari Pers. (2.2.7) dan Pers. (2.2.8), yakni

$$\rho = \rho_0(\xi) + [\rho_1(\xi)\exp(-i\Omega\tau) + c.c.]$$

$$\sigma = \sigma_0(\xi,\tau) + [\sigma_1(\xi)\exp(-i\Omega\tau) + c.c.]$$

didapat (tanpa suku *c.c.*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \exp(-i\Omega\tau)\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \tag{B.2.1}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} + \exp(-i\Omega\tau)\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} \tag{B.2.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -i\Omega\rho_1 \exp(-i\Omega\tau) \tag{B.2.3}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} = -\Omega^2\rho_1 \exp(-i\Omega\tau) \tag{B.2.4}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau} - i\Omega\sigma_1 \exp(-i\Omega\tau) \tag{B.2.5}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2} - \Omega^2\sigma_1 \exp(-i\Omega\tau) \tag{B.2.6}$$

Substitusi Pers. (2.2.7), Pers. (B.2.1), Pers. (B.2.3), Pers. (B.2.5) dan Pers. (B.2.6) ke dalam Pers. (2.2.5), yakni

$$2\frac{\partial \rho}{\partial \xi}+2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}+\rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2}+\Gamma\rho=0$$

akan memberikan

$$2\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi}+2\exp(-i\Omega\tau)\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}+2\{-i\Omega\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}\left\{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}-i\Omega\sigma_1\exp(-i\Omega\tau)\right\}$$

$$+\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}\left\{\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2}-\Omega^2\sigma_1\exp(-i\Omega\tau)\right\}$$

$$+\Gamma\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}=0$$

$$2\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi}+\Gamma\rho_0+\rho_0\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2}+\left\{2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}-2i\Omega\rho_1\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}-\rho_0\Omega^2\sigma_1\right.$$

$$\left.+\rho_1\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2}+\Gamma\rho_1\right\}\exp(-i\Omega\tau)-3\Omega^2\rho_1\sigma_1\exp(-2i\Omega\tau)=0 \quad \text{(B.2.7)}$$

Substitusi Pers. (2.2.7), Pers. (B.2.2), Pers. (B.2.4) dan Pers. (B.2.6) ke dalam Pers. (2.2.6) yakni

$$\rho^2-\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)^2=0$$

akan memberikan

$$\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}^2-\left\{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi}+\exp(-i\Omega\tau)\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi}\right\}-\frac{\Omega^2\rho_1\exp(-i\Omega\tau)}{2\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}-i\Omega\sigma_1\exp(-i\Omega\tau)\right\}^2=0$$

$$\rho_0^2+2\rho_0\rho_1\exp(-i\Omega\tau)+\rho_1^2\exp(-2i\Omega\tau)-\frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi}-\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi}\exp(-i\Omega\tau)$$

$$-\frac{\Omega^2\rho_1\exp(-i\Omega\tau)}{2\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}\right)^2+i\Omega\sigma_1\exp(-i\Omega\tau)\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}$$

$$+\frac{1}{2}\Omega^2\sigma_1^2\exp(-2i\Omega\tau)=0 \quad \text{(B.2.8)}$$

Dengan menggunakan deret Binomial, yakni

$$(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\ldots$$

didapat

$$\frac{1}{\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}}=\frac{1}{\rho_0\left\{1+\frac{\rho_1}{\rho_0}\exp(-i\Omega\tau)\right\}}$$

$$=\frac{1}{\rho_0}\left\{1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\exp(-i\Omega\tau)+\frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}\exp(-2i\Omega\tau)-\ldots\right\}$$

$$\frac{1}{\{\rho_0+\rho_1\exp(-i\Omega\tau)\}}=\frac{1}{\rho_0}-\frac{\rho_1}{\rho_0^2}\exp(-i\Omega\tau)+\frac{\rho_1^2}{\rho_0^3}\exp(-2i\Omega\tau)-\ldots \quad \text{(B.2.9)}$$

Substitusi Pers. (B.2.9) ke dalam Pers. (B.2.8) akan memperoleh

$$\rho_0^2-\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau}\right)^2+\left\{2\rho_0\rho_1-\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}-\frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0}+i\Omega\sigma_1\frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau}\right\}\exp(-i\Omega\tau)$$

$$+\left\{\rho_1^2-\frac{\Omega^2\rho_1^2}{2\rho_0^2}+\frac{1}{2}\Omega^2\sigma_1^2\right\}\exp(-2i\Omega\tau)-\ldots=0 \quad \text{(B.2.10)}$$

Dari Pers. (2.2.9), yakni

$$\sigma_0(\xi,\tau)=k\xi-\omega\tau$$

didapat

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}=k \quad \text{(B.2.11)}$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau}=-\omega \quad \text{(B.2.12)}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2} = 0 \qquad \text{(B.2.13)}$$

Persamaan suku orde nol, yakni $O(e^0)$, untuk Pers. (B.2.7) dan Pers. (B.2.10) dapat dituliskan sebagai

$$2\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \Gamma \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial \tau^2} = 0 \qquad \text{(B.2.14)}$$

$$\rho_0^2 - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau}\right)^2 = 0 \qquad \text{(B.2.15)}$$

Dengan mengingat Pers. (B.2.11), Pers. (B.2.12) dan Pers. (B.2.13), maka Pers. (B.2.14) dan Pers. (B.2.15) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + \frac{\Gamma}{2}\rho_0 = 0 \quad \blacksquare$$

dan

$$\rho_0^2 = k + \tfrac{1}{2}\omega^2 \quad \blacksquare$$

B.3 Pembuktian Pers. (2.2.12), yakni

$$2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \rho_0 \Omega^2 \sigma_1 + \Gamma \rho_1 + 2i\Omega \rho_1 \omega = 0$$

dan Pers. (2.2.13), yakni

$$2\rho_0 \rho_1 - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - \frac{\Omega^2 \rho_1}{2\rho_0} - i\omega\Omega\sigma_1 = 0$$

Bukti :

Dari Pers. (B.2.7) dan Pers. (B.2.10), persamaan suku orde satu, yakni $O\{\exp(-i\Omega\tau)\}$, dapat dituliskan sebagai

$$2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - 2i\Omega\rho_1\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau} - \rho_0\Omega^2\sigma_1 + \rho_1\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial \tau^2} + \Gamma\rho_1 = 0 \qquad \text{(B.3.1)}$$

$$2\rho_0\rho_1 - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - \frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0} + i\Omega\sigma_1\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau} = 0 \qquad \text{(B.3.2)}$$

Dengan mengingat Pers. (B.2.11), Pers. (B.2.12) dan Pers. (B.2.13), maka Pers. (B.3.1) dan Pers. (B.3.2) dapat dituliskan sebagai

$$2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \rho_0\Omega^2\sigma_1 + \Gamma\rho_1 + 2i\Omega\rho_1\omega = 0 \qquad \blacksquare$$

dan

$$2\rho_0\rho_1 - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - \frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0} - i\omega\Omega\sigma_1 = 0 \qquad \blacksquare$$

B.4 Pembuktian Pers. (2.2.15), yakni

$$(Q+\omega\Omega)^2 = \Omega^2\left(\tfrac{1}{4}\Omega^2 - \rho_0^2\right)$$

Bukti :

Mengingat bahwa $\rho_1(\xi) = [\rho_1 \exp(iQ\xi) + c.c]$, $\sigma_1(\xi) = [\sigma_1 \exp(iQ\xi) + c.c]$ dan $\rho_0(\xi) = \rho_0$, Pers. (2.2.12), yakni

$$2\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \rho_0\Omega^2\sigma_1 + \Gamma\rho_1 + 2i\Omega\rho_1\omega = 0$$

dapat dituliskan sebagai (tanpa suku *c.c.*)

$$2iQ\rho_1 \exp(iQ\xi) - \rho_0\Omega^2\sigma_1 \exp(iQ\xi) + 2i\Omega\omega\rho_1 \exp(iQ\xi) = 0 \qquad \text{(B.4.1)}$$

Pembagian ruas kiri dan ruas kanan Pers. (B.4.1) dengan $\exp(iQ\xi)$ memberikan

$$2iQ\rho_1 - \rho_0\Omega^2\sigma_1 + 2i\Omega\omega\rho_1 = 0$$

$$2i(Q+\omega\Omega)\rho_1 = \rho_0\Omega^2\sigma_1$$

$$\frac{\rho_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_0\Omega^2}{2i(Q+\omega\Omega)} \qquad \text{(B.4.2)}$$

Mengingat bahwa $\rho_1(\xi) = [\rho_1 \exp(iQ\xi) + c.c]$, $\sigma_1(\xi) = [\sigma_1 \exp(iQ\xi) + c.c]$ dan $\rho_0(\xi) = \rho_0$, Pers. (2.2.13), yakni

$$2\rho_0\rho_1 - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi} - \frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0} - i\omega\Omega\sigma_1 = 0$$

dapat dituliskan sebagai (tanpa suku *c.c.*)

$$2\rho_0\rho_1 \exp(iQ\xi) - iQ\sigma_1 \exp(iQ\xi) - \frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0}\exp(iQ\xi) - i\omega\Omega\sigma_1 \exp(iQ\xi) = 0 \qquad \text{(B.4.3)}$$

Pembagian ruas kiri dan ruas kanan Pers. (B.4.3) dengan $\exp(iQ\xi)$ memberikan

$$2\rho_0\rho_1 - iQ\sigma_1 - \frac{\Omega^2\rho_1}{2\rho_0} - i\omega\Omega\sigma_1 = 0$$

$$\left(2\rho_0 - \frac{\Omega^2}{2\rho_0}\right)\rho_1 = i(Q+\omega\Omega)\sigma_1$$

$$\frac{\rho_1}{\sigma_1} = \frac{i(Q+\omega\Omega)}{\left(2\rho_0 - \frac{\Omega^2}{2\rho_0}\right)} \qquad \text{(B.4.4)}$$

Substitusi Pers. (B.4.2) ke dalam Pers. (B.4.4) akan memberikan

$$\frac{\rho_0\Omega^2}{2i(Q+\omega\Omega)} = \frac{i(Q+\omega\Omega)}{\left(2\rho_0 - \frac{\Omega^2}{2\rho_0}\right)}$$

$$-2(Q+\omega\Omega)^2 = \rho_0\Omega^2\left(2\rho_0 - \frac{\Omega^2}{2\rho_0}\right)$$

$$(Q+\omega\Omega)^2 = \Omega^2\left(\tfrac{1}{4}\Omega^2 - \rho_0^2\right) \quad \blacksquare$$

LAMPIRAN C

Pembuktian Rumus-Rumus Bab IV

C.1 Pembuktian bahwa Pers. (4.1.13), yakni

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\xi}^{*}}\right)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\tau}^{*}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^{*}}=0,$$

merupakan persamaan gerak Lagrange bagi Pers. (4.1.1).

Bukti :

Dari Pers. (4.1.12), yakni

$$\mathscr{L}=\frac{i}{2}\left(q^{*}\frac{\partial q}{\partial \xi}-q\frac{\partial q^{*}}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{2}\left(|q|^{4}-\left|\frac{\partial q}{\partial \tau}\right|^{2}\right)$$

dapat diperoleh

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\xi}^{*}}=-\frac{i}{2}q \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\xi}^{*}}\right)=-\frac{i}{2}\frac{\partial q}{\partial \xi} \qquad \text{(C.1.1)}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\tau}^{*}}=-\frac{1}{2}q_{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{\tau}^{*}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2} q}{\partial \tau^{2}} \qquad \text{(C.1.2)}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^{*}}=\frac{i}{2}q_{\xi}+q^{2}q^{*} \qquad \text{(C.1.3)}$$

Substitusi Pers. (C.1.1), (C.1.2) dan (C.1.3) ke dalam Pers. (4.2.13) akan memberikan

$$i\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2} q}{\partial \tau^{2}}+|q|^{2}q=0 \qquad \blacksquare$$

C.2 Pembuktian Pers. (4.2.2), yakni

$$L=\pi\left[-2a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)+2a^2\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)-\rho_0^4+6a^4+4\rho_0^2a^2\cos\left(\phi_a+\phi_b\right)\right]$$

Bukti :

Fungsi coba q yang diberikan oleh Pers. (4.2.1) dapat dituliskan kembali sebagai

$$q=\left[\rho_0+a\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]+a\exp\left[i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\right]\exp\left[i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right] \quad \text{(C.2.1)}$$

dengan konjugat kompleks yang dapat dituliskan sebagai

$$q^*=\left[\rho_0+a\exp\left[-i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]+a\exp\left[-i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\right]\exp\left[-i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right] \quad \text{(C.2.2)}$$

Dengan menggunakan Pers. (C.2.1) dan Pers. (C.2.2) dapat diperoleh q^*q_ξ, qq_ξ^*, $|q_\tau|^2$ dan $|q|^4$ melalui langkah-langkah berikut ini.

$$q_\xi=\left[\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{da}{d\xi}+ia\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{d\phi_a}{d\xi}\right]\exp\left[i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$+\left[\exp\left[i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\frac{da}{d\xi}+ia\exp\left[i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\frac{d\phi_b}{d\xi}\right]\exp\left[i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$+ik\left[\rho_0+a\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]+a\exp\left[i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\right]\exp\left[i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$q_\xi^*=\left[\exp\left[-i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{da}{d\xi}-ia\exp\left[-i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{d\phi_a}{d\xi}\right]\exp\left[-i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$+\left[\exp\left[-i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\frac{da}{d\xi}-ia\exp\left[-i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\frac{d\phi_b}{d\xi}\right]\exp\left[-i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$-ik\left[\rho_0+a\exp\left[-i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]+a\exp\left[-i\left(\phi_b-\Omega\tau\right)\right]\right]\exp\left[-i\left(k\xi-\omega\tau\right)\right]$$

$$q^*q_\xi=\rho_0\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{da}{d\xi}+i\rho_0a\exp\left[i\left(\phi_a+\Omega\tau\right)\right]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+\rho_0\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}+i\rho_0 a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}+a\frac{da}{d\xi}+ia^2\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+a\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}+ia^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}$$

$$+a\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}+ia^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+a\frac{da}{d\xi}+ia^2\frac{d\phi_b}{d\xi}+ik\{\rho_0^2+\rho_0 a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+\rho_0 a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]$$

$$+\rho_0 a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+a^2+a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]$$

$$+\rho_0 a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]+a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]+a^2\}$$

$$q^*q_\xi=2a\frac{da}{d\xi}+ia^2\left[\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right]+\rho_0\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}$$

$$+\rho_0\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}+i\rho_0 a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+i\rho_0 a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}+ia^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+ia^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}+2a\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\frac{da}{d\xi}$$

$$+ik\{\rho_0^2+2a^2+2\rho_0 a\cos(\phi_a+\Omega\tau)+2\rho_0 a\cos(\phi_b-\Omega\tau)$$

$$+2a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\} \qquad \text{(C.2.3)}$$

$$qq_\xi^*=\rho_0\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}-i\rho_0 a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+\rho_0\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}-i\rho_0 a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}+a\frac{da}{d\xi}$$

$$-ia^2\frac{d\phi_a}{d\xi}+a\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}-ia^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}$$

$$+a\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}-ia^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}+a\frac{da}{d\xi}$$

$$-ia^2\frac{d\phi_b}{d\xi}-ik\{\rho_0^2+\rho_0 a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+\rho_0 a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]$$

$$+\rho_0 a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+a^2+a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]$$

$$+\rho_0 a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]+a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]+a^2\}$$

$$qq_\xi^*=2a\frac{da}{d\xi}-ia^2\left[\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right]+\rho_0\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}$$

$$+\rho_0\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{da}{d\xi}-i\rho_0 a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$-i\rho_0 a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}-ia^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$-ia^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]\frac{d\phi_b}{d\xi}+2a\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\frac{da}{d\xi}$$

$$-ik\{\rho_0^2+2a^2+2\rho_0 a\cos(\phi_a+\Omega\tau)+2\rho_0 a\cos(\phi_b-\Omega\tau)$$

$$+2a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\} \qquad \text{(C.2.4)}$$

$$q_\tau=[i\Omega a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]-i\Omega a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]]\exp[i(k\xi-\omega\tau)]$$

$$-i\omega[\rho_0+a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]]\exp[i(k\xi-\omega\tau)]$$

$$q_\tau^*=[-i\Omega a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+i\Omega a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]]\exp[-i(k\xi-\omega\tau)]$$

$$+i\omega[\rho_0+a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]]\exp[-i(k\xi-\omega\tau)]$$

$$|q_\tau|^2=q_\tau^* q_\tau$$

$$|q_\tau|^2 = \{i\Omega a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]-i\Omega a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\}\{-i\Omega a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]$$
$$+i\Omega a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\}+i\omega\{i\Omega a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]$$
$$-i\Omega a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\}\{\rho_0+a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\}$$
$$-i\omega\{\rho_0+a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\}$$
$$\{-i\Omega a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+i\Omega a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\}+\omega^2\{\rho_0$$
$$+a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]\}\{\rho_0+a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]$$
$$+a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]\}$$

$$|q_\tau|^2 = \Omega^2a^2-\Omega^2a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]-\Omega^2a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]$$
$$+\Omega^2a^2+i\omega\{i\rho_0a\Omega\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]-i\rho_0a\Omega\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]+i\Omega a^2$$
$$-i\Omega a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]+i\Omega a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]-i\Omega a^2\}$$
$$-i\omega\{-i\rho_0a\Omega\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+i\rho_0a\Omega\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]-i\Omega a^2$$
$$+i\Omega a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]-i\Omega a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]+i\Omega a^2\}$$
$$+\omega^2\{\rho_0^2+\rho_0a\exp[-i(\phi_a+\Omega\tau)]+\rho_0a\exp[-i(\phi_b-\Omega\tau)]$$
$$+\rho_0a\exp[i(\phi_a+\Omega\tau)]+a^2+a^2\exp[i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]$$
$$\rho_0a\exp[i(\phi_b-\Omega\tau)]+a^2\exp[-i(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)]+a^2\}$$

$$|q_\tau|^2 = 2\Omega^2a^2-2\Omega^2a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)+i\omega\{2i\rho_0a\Omega\cos(\phi_a+\Omega\tau)$$
$$-2i\rho_0a\Omega\cos(\phi_b-\Omega\tau)\}+\omega^2\{\rho_0^2+2a^2+2\rho_0a\cos(\phi_a+\Omega\tau)$$
$$+2\rho_0a\cos(\phi_b-\Omega\tau)+2a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\} \qquad \text{(C.2.5)}$$

$$|q|^2 = q^*q$$

$$|q|^2 = \rho_0^2 + \rho_0 a\exp[-i(\phi_a + \Omega\tau)] + \rho_0 a\exp[-i(\phi_b - \Omega\tau)]$$
$$+ \rho_0 a\exp[i(\phi_a + \Omega\tau)] + a^2 + a^2\exp[i(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)]$$
$$+ \rho_0 a\exp[i(\phi_b - \Omega\tau)] + a^2\exp[-i(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)] + a^2$$

$$|q|^2 = \rho_0^2 + 2a^2 + 2\rho_0 a\cos(\phi_a + \Omega\tau) + 2\rho_0 a\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 2a^2\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)$$

$$|q|^4 = |q|^2|q|^2$$

$$|q|^4 = \{\rho_0^2 + 2a^2 + 2\rho_0 a\cos(\phi_a + \Omega\tau) + 2\rho_0 a\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 2a^2\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)\}\{\rho_0^2 + 2a^2 + 2\rho_0 a\cos(\phi_a + \Omega\tau)$$
$$+ 2\rho_0 a\cos(\phi_b - \Omega\tau) + 2a^2\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)\}$$

$$|q|^4 = \rho_0^4 + 2\rho_0^2 a^2 + 2\rho_0^3 a\cos(\phi_a + \Omega\tau) + 2\rho_0^3 a\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 2\rho_0^2 a^2\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau) + 2\rho_0^2 a^2 + 4a^4 + 4\rho_0 a^3\cos(\phi_a + \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0 a^3\cos(\phi_b - \Omega\tau) + 4a^4\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau) + 2\rho_0^3 a\cos(\phi_a + \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0 a^3\cos(\phi_a + \Omega\tau) + 4\rho_0^2 a^2\cos^2(\phi_a + \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0^2 a^2\cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0 a^3\cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau) + 2\rho_0^3 a\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0 a^3\cos(\phi_b - \Omega\tau) + 4\rho_0^2 a^2\cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_b - \Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0^2 a^2\cos^2(\phi_b - \Omega\tau) + 4\rho_0 a^3\cos(\phi_b - \Omega\tau)\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)$$
$$+ 2\rho_0^2 a^2\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau) + 4a^4\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)$$
$$+ 4\rho_0 a^3\cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)$$

$$+4\rho_0 a^3\cos(\phi_b-\Omega\tau)\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)+4a^4\cos^2(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)$$

$$|q|^4=\rho_0^4+4\rho_0^2a^2+4a^4+4\rho_0^3a\cos(\phi_a+\Omega\tau)+4\rho_0^3a\cos(\phi_b-\Omega\tau)$$

$$+8\rho_0a^3\cos(\phi_a+\Omega\tau)+8\rho_0a^3\cos(\phi_b-\Omega\tau)+4\rho_0^2a^2\cos^2(\phi_a+\Omega\tau)$$

$$+4\rho_0^2a^2\cos^2(\phi_b-\Omega\tau)+8\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\Omega\tau)\cos(\phi_b-\Omega\tau)$$

$$+4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)+8a^4\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)$$

$$+8\rho_0a^3\cos(\phi_a+\Omega\tau)\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)$$

$$+8\rho_0a^3\cos(\phi_b-\Omega\tau)\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)+4a^4\cos^2(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau) \qquad \text{(C.2.6)}$$

Fungsi Lagrange untuk persamaan Schrödinger taklinear yang diberikan oleh Pers. (4.1.14) dapat dituliskan kembali sebagai

$$L=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(q^*q_\xi-qq_\xi^*)d\tau+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|q|^4d\tau-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|q_\tau|^2d\tau \qquad \text{(C.2.7)}$$

Integrasi setiap suku Pers. (C.2.7) dapat dilakukan dengan mengambil batas integral $0\le\tau<2\pi$ sehingga nilai ω dan Ω terkuantisasi, yakni $\omega,\Omega=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Untuk $\Omega=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ diperoleh

$$\int_0^{2\pi}\cos(\phi_a+\Omega\tau)d\tau=0 \qquad \text{(C.2.8a)}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(\phi_b-\Omega\tau)d\tau=0 \qquad \text{(C.2.8b)}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)d\tau=0 \qquad \text{(C.2.8c)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_b - \Omega\tau)d\tau = \pi\cos(\phi_a + \phi_b) \qquad \text{(C.2.8d)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_a + \Omega\tau)d\tau = \pi \qquad \text{(C.2.8e)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_b - \Omega\tau)d\tau = \pi \qquad \text{(C.2.8f)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)d\tau = \pi \qquad \text{(C.2.8g)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_a + \Omega\tau)\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)d\tau = 0 \qquad \text{(C.2.8h)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_b - \Omega\tau)\cos(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)d\tau = 0 \qquad \text{(C.2.8i)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi_a + \Omega\tau)d\tau = 0 \qquad \text{(C.2.8j)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi_b - \Omega\tau)d\tau = 0 \qquad \text{(C.2.8k)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi_a - \phi_b + 2\Omega\tau)d\tau = 0 \qquad \text{(C.2.8l)}$$

Dengan menggunakan Pers. (C.2.3) dan Pers. (C.2.4), integrasi suku pertama Pers. (C.2.7) dapat dilakukan melalui langkah-langkah berikut ini.

$$q^* q_\xi - q q_\xi^* = 2ia^2\left[\frac{d\phi_a}{d\xi} + \frac{d\phi_b}{d\xi}\right] + 2i\rho_0 \sin(\phi_a + \Omega\tau)\frac{da}{d\xi}$$

$$+ 2i\rho_0 \sin(\phi_b - \Omega\tau)\frac{da}{d\xi} + 2i\rho_0 a\cos(\phi_a + \Omega\tau)\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+2i\rho_0 a\cos(\phi_b-\Omega\tau)\frac{d\phi_b}{d\xi}+2ia^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\frac{d\phi_a}{d\xi}$$

$$+2ia^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\frac{d\phi_b}{d\xi}+ik\{2\rho_0^2+4a^2$$

$$+4\rho_0 a\cos(\phi_a+\Omega\tau)+4\rho_0 a\cos(\phi_b-\Omega\tau)$$

$$+4a^2\cos(\phi_a-\phi_b+2\Omega\tau)\} \qquad \text{(C.2.9)}$$

Dengan mengingat hasil integrasi pada Pers. (C.2.8**a**), Pers. (C.2.8**b**), Pers. (C.2.8**c**), Pers. (C.2.8**j**) dan Pers. (C.2.8**k**), hasil integrasi Pers. (C.2.9) dapat dituliskan sebagai

$$\int_0^{2\pi}(q^*q_\xi-qq_\xi^*)d\tau=2\pi\left[2ia^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)+2ik\rho_0^2+4ika^2\right]$$

$$\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(q^*q_\xi-qq_\xi^*)d\tau=\pi\left[-2a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)-2k\rho_0^2-4ka^2\right]$$

$$\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(q^*q_\xi-qq_\xi^*)d\tau=-2\pi a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)-2\pi k(\rho_0^2+2a^2) \qquad \text{(C.2.10)}$$

Dengan mengingat bahwa $k=\rho_0^2-\frac{1}{2}\omega^2$, Pers. (C.2.10) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(q^*q_\xi-qq_\xi^*)d\tau=-2\pi a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)-2\pi\rho_0^2(\rho_0^2+2a^2)+\omega^2\pi(\rho_0^2+2a^2)$$

(C.2.11)

Dengan menggunakan Pers. (C.2.6) dan hasil integrasi pada Pers. (C.2.8**a**) – (C.2.8**i**), hasil integrasi suku kedua Pers. (C.2.7) dapat dituliskan sebagai

$$\int_0^{2\pi}|q|^4d\tau=2\pi[\rho_0^4+4\rho_0^2a^2+4a^4]+\pi[4\rho_0^2a^2+4\rho_0^2a^2+8\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)$$

$$+4a^4\Big]$$

$$\int_0^{2\pi}|q|^4 d\tau = 2\pi\left[\rho_0^4 + 4\rho_0^2a^2 + 4a^4\right] + \pi\left[8\rho_0^2a^2 + 4a^4 + 8\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|q|^4 d\tau = \pi\left[\rho_0^4 + 4\rho_0^2a^2 + 4a^4\right] + \pi\left[4\rho_0^2a^2 + 2a^4 + 4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|q|^4 d\tau = \pi\left[\rho_0^4 + 8\rho_0^2a^2 + 6a^4 + 4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right] \qquad \text{(C.2.12)}$$

Dengan menggunakan Pers. (C.2.5) dan hasil integrasi pada Pers. (C.2.8**a**) – Pers. (C.2.8**c**), hasil integrasi suku ketiga Pers. (C.2.7) dapat dituliskan sebagai

$$\int_0^{2\pi}|q_\tau|^2 d\tau = 2\pi\left[2\Omega^2a^2 + \omega^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|q_\tau|^2 d\tau = \pi\left[2\Omega^2a^2 + \omega^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right)\right] \qquad \text{(C.2.13)}$$

Substitusi Pers. (C.2.11), Pers. (C.2.12) dan Pers. (C.2.13) ke dalam Pers. (C.2.7) akan memberikan

$$L = -2\pi a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi} + \frac{d\phi_b}{d\xi}\right) - 2\pi\rho_0^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right) + \omega^2\pi\left(\rho_0^2 + 2a^2\right) + \pi\left[\rho_0^4 + 8\rho_0^2a^2 + 6a^4 + 4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right] - \pi\left[2\Omega^2a^2 + \omega^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right)\right]$$

$$L = -2\pi a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi} + \frac{d\phi_b}{d\xi}\right) - 2\pi\rho_0^4 - 4\pi a^2\rho_0^2 + \pi\omega^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right) + \pi\rho_0^4 + 8\pi\rho_0^2a^2 + 6\pi a^4 + 4\pi\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b) - 2\pi\Omega^2a^2 - \pi\omega^2\left(\rho_0^2 + 2a^2\right)$$

$$L = -2\pi a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi} + \frac{d\phi_b}{d\xi}\right) - \pi\rho_0^4 + 4\pi\rho_0^2a^2 + 6\pi a^4 - 2\pi\Omega^2a^2$$

$$+4\pi\rho_0^2 a^2\cos(\phi_a+\phi_b)$$

$$L=\pi\left[-2a^2\left(\frac{d\phi_a}{d\xi}+\frac{d\phi_b}{d\xi}\right)+2a^2\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)-\rho_0^4+6a^4+4\rho_0^2a^2\cos(\phi_a+\phi_b)\right]$$

■

C.3 Pembuktian bahwa Pers. (4.2.7), yakni

$$\frac{d\phi}{d\xi}=\left(2\rho_0^2-\Omega^2\right)+2\rho_0^2\cos(\phi)$$

memiliki solusi yang diberikan oleh Pers. (4.2.8), yakni

$$\phi=2\arctan\left\{\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{\Omega^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)\right\}$$

Bukti :

Persamaan (4.2.7) dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk

$$\frac{d\phi}{d\xi}=A+B\cos(\phi)$$

$$\frac{d\phi}{A+B\cos(\phi)}=d\xi \qquad \text{(C.3.1)}$$

dengan $A=2\rho_0^2-\Omega^2$ dan $B=2\rho_0^2$.

Persamaan diferensial (C.3.1) dapat dipecahkan dengan memisalkan $\tan(\phi/2)=y$ sehingga

$$\cos(\phi)=2\cos^2(\phi/2)-1$$

$$\cos(\phi)=\frac{1-y^2}{1+y^2} \qquad \text{(C.3.2a)}$$

$$d\phi=\frac{2}{1+y^2}dy \qquad \text{(C.3.2b)}$$

Substitusi Pers. (C.3.2a) dan Pers. (C.3.2b) ke dalam Pers. (C.3.1) akan memberikan

$$\frac{\frac{2}{1+y^2}dy}{A+B\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)}=d\xi$$

$$\frac{2dy}{(B+A)-(B-A)y^2}=d\xi$$

$$\frac{2}{(B-A)}\frac{dy}{\left[\left(\frac{B+A}{B-A}\right)-y^2\right]}=d\xi \qquad \text{(C.3.3)}$$

Integrasi suku ruas kiri dan suku ruas kanan Pers. (C.3.3) memberikan

$$\frac{2}{(B-A)}\int\frac{dy}{\left(\frac{B+A}{B-A}\right)-y^2}=\int d\xi$$

$$\frac{2}{(B-A)}\sqrt{\frac{B-A}{B+A}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{B-A}{B+A}}y\right)=\xi$$

$$\frac{2}{\sqrt{B^2-A^2}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{B-A}{B+A}}y\right)=\xi$$

$$\left(\sqrt{\frac{B-A}{B+A}}y\right)=\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{2}\xi\right)$$

$$y=\sqrt{\frac{B+A}{B-A}}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{2}\xi\right)$$

$$y=\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B-A}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{2}\xi\right) \qquad \text{(C.3.4)}$$

Dengan mengingat bahwa $\tan(\phi/2)=y$ dan

$$B^2 - A^2 = \left(2\rho_0^2\right)^2 - \left(2\rho_0^2 - \Omega^2\right)^2$$

$$= 4\rho_0^4 - \left(4\rho_0^4 - 4\rho_0^2\Omega^2 + \Omega^4\right) = 4\rho_0^2\Omega^2 - \Omega^4$$

$$B^2 - A^2 = \Omega^2\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right) \qquad \text{(C.3.5a)}$$

$$B - A = 2\rho_0^2 - \left(2\rho_0^2 - \Omega^2\right)$$

$$B - A = \Omega^2 \qquad \text{(C.3.5b)}$$

maka Pers. (C.3.4) dapat dituliskan sebagai

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{\Omega^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)$$

atau

$$\phi = 2\arctan\left\{\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{\Omega^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)\right\} \quad \blacksquare$$

C.4 Pembuktian bahwa Pers. (4.2.6), yakni

$$\frac{da}{d\xi} = \rho_0^2 a\sin(\phi)$$

memiliki solusi untuk kasus $4\rho_0^2 - \Omega^2 < 0$ yang diberikan oleh Pers. (4.2.9), yakni

$$a(\xi) \sim \sqrt{1 - \frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2 - 4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)}$$

dan untuk kasus $4\rho_0^2 - \Omega^2 > 0$ diberikan oleh Pers. (4.2.10), yakni

$$a(\xi) \sim \sqrt{1 + \frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)}$$

Bukti :

Persamaan (4.2.8) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = A\tanh(B\xi) \qquad \text{(C.4.1)}$$

dengan

$$A = \frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{\Omega^2} \qquad \text{(C.4.2a)}$$

$$B = \frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2 - \Omega^2\right)\Omega^2}}{2} \qquad \text{(C.4.2b)}$$

Dengan demikian, dapat diperoleh

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{A\tanh(B\xi)}{\sqrt{1 + A^2\tanh^2(B\xi)}}$$

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2\tanh^2(B\xi)}}$$

$$\sin(\phi) = 2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sin(\phi) = \frac{2A\tanh(B\xi)}{1 + A^2\tanh^2(B\xi)} \qquad \text{(C.4.3)}$$

Persamaan (4.2.6) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\frac{da}{a} = C\sin(\phi)d\xi \qquad \text{(C.4.4)}$$

dengan $C = \rho_0$. Persamaan diferensial (C.4.4) dapat dipecahkan dengan melakukan integrasi pada suku ruas kiri dan suku ruas kanan persamaan tersebut yang memberikan solusi umum

$$a = C_0 \exp\left\{C\int \sin(\phi)d\xi\right\} \qquad \text{(C.4.5)}$$

dengan C_0 adalah suatu konstanta. Penentuan hasil integral pada suku ruas kanan Pers. (C.4.5) dapat dilakukan melalui langkah-langkah berikut ini.

$$\int \sin(\phi)\,d\xi = \int \frac{2A\tanh(B\xi)}{1+A^2\tanh^2(B\xi)}\,d\xi \qquad \text{(C.4.6)}$$

Misalkan

$$y = \tanh(B\xi) \qquad \text{(C.4.7a)}$$

$$dy = B\,\mathrm{sech}^2(B\xi)\,d\xi$$

dan melalui identitas fungsi hiperbolik $\tanh^2(B\xi)+\mathrm{sech}^2(B\xi)=1$, diperoleh

$$dy = B(1-y^2)\,d\xi$$

$$d\xi = \frac{dy}{B(1-y^2)} \qquad \text{(C.4.7b)}$$

Dengan menggunakan Pers. (C.4.7a) dan Pers. (C.4.7b), Pers. (C.4.6) dapat dituliskan sebagai

$$\int \sin(\phi)\,d\xi = \frac{2A}{B}\int \frac{y\,dy}{(1-y^2)(1+A^2y^2)}$$

$$= \frac{2A}{B(2+2A^2)}\int\left\{\frac{dy}{(1-y)} - \frac{dy}{(1+y)} + \frac{2A^2y\,dy}{(1+A^2y^2)}\right\}$$

$$= \frac{A}{B(1+A^2)}\left\{-\ln(1-y) - \ln(1+y) + \ln(1+A^2y^2)\right\}$$

$$\int \sin(\phi)\,d\xi = \frac{A}{B(1+A^2)}\ln\left[\frac{1+A^2y^2}{(1-y)(1+y)}\right] \qquad \text{(C.4.8)}$$

Substitusi Pers. (C.4.8) ke dalam Pers. (C.4.5) memberikan

$$a = C_0 \exp\left\{\frac{CA}{B(1+A^2)}\ln\left[\frac{1+A^2y^2}{(1-y)(1+y)}\right]\right\}$$

$$a = C_0\left[\frac{1+A^2y^2}{(1-y)(1+y)}\right]^{\frac{CA}{B(1+A^2)}} \qquad \text{(C.4.9)}$$

Dengan menggunakan Pers. (C.4.7**a**), Pers. (C.4.9) dapat dituliskan sebagai

$$a = C_0\left[\frac{1+A^2\tanh^2(B\xi)}{1-\tanh^2(B\xi)}\right]^{\frac{CA}{B(1+A^2)}}$$

$$= C_0\left[\frac{(1+A^2)\tanh^2(B\xi)+\operatorname{sech}^2(B\xi)}{\operatorname{sech}^2(B\xi)}\right]^{\frac{CA}{B(1+A^2)}}$$

$$a = C_0\left[1+(1+A^2)\sinh^2(B\xi)\right]^{\frac{CA}{B(1+A^2)}} \qquad \text{(C.4.10)}$$

Dengan mengingat bahwa

$$1+A^2 = 1+\frac{(4\rho_0^2-\Omega^2)\Omega^2}{\Omega^4} = \frac{\Omega^4+4\rho_0^2\Omega^2-\Omega^4}{\Omega^4}$$

$$1+A^2 = \frac{4\rho_0^2}{\Omega^2} \qquad \text{(C.4.11a)}$$

$$\frac{CA}{B(1+A^2)} = \rho_0^2\frac{\sqrt{(4\rho_0^2-\Omega^2)\Omega^2}}{\Omega^2}\frac{2}{\sqrt{(4\rho_0^2-\Omega^2)\Omega^2}}\frac{\Omega^2}{4\rho_0^2}$$

$$\frac{CA}{B(1+A^2)} = \frac{1}{2} \qquad \text{(C.4.11b)}$$

Pers. (C.4.10) dapat dituliskan sebagai

$$a = C_0\sqrt{1+\frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{(4\rho_0^2-\Omega^2)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \qquad \text{(C.4.12)}$$

Untuk kasus $4\rho_0^2-\Omega^2<0$ didapat

$$\sinh\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)=\sinh\left(\frac{i\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{i\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)-\exp\left(\frac{-i\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)\right\}$$

$$=i\sin\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)$$

$$\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)=-\sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right) \qquad \text{(C.4.13)}$$

sehingga diperoleh

$$a(\xi)=C_0\sqrt{1-\frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \qquad \text{(C.4.14)}$$

Dengan mengingat bahwa C_0 merupakan suatu konstanta, Pers. (C.4.14) dapat juga dituliskan sebagai

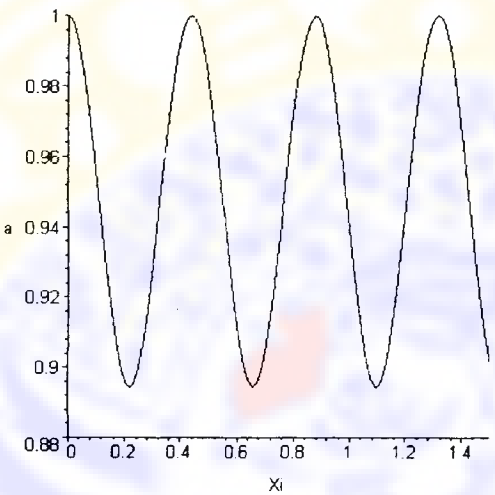
$$a(\xi)\sim\sqrt{1-\frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sin^2\left(\frac{\sqrt{\left(\Omega^2-4\rho_0^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \quad \blacksquare$$

Sedangkan untuk kasus $4\rho_0^2-\Omega^2>0$, Pers. (C.4.12) tidak mengalami perubahan dan dengan mengingat bahwa C_0 merupakan suatu konstanta, didapatkan solusi

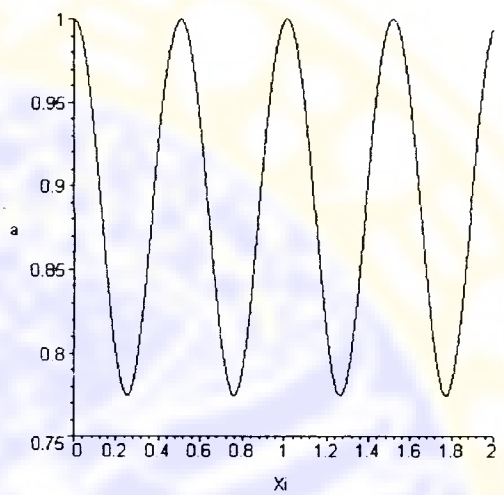
$$a(\xi)\sim\sqrt{1+\frac{4\rho_0^2}{\Omega^2}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\left(4\rho_0^2-\Omega^2\right)\Omega^2}}{2}\xi\right)} \quad \blacksquare$$

LAMPIRAN D

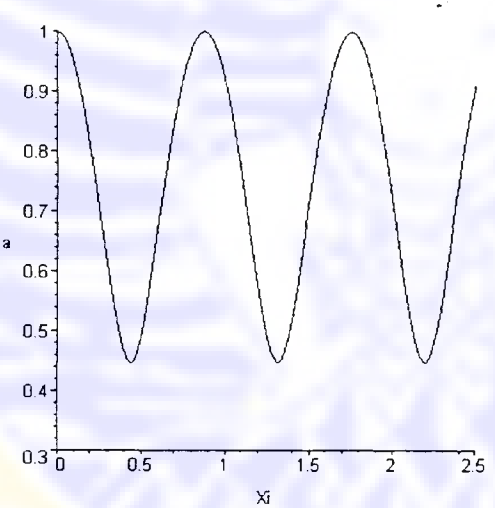
Grafik-Grafik Subbab 4.2



Gambar D.1(a)

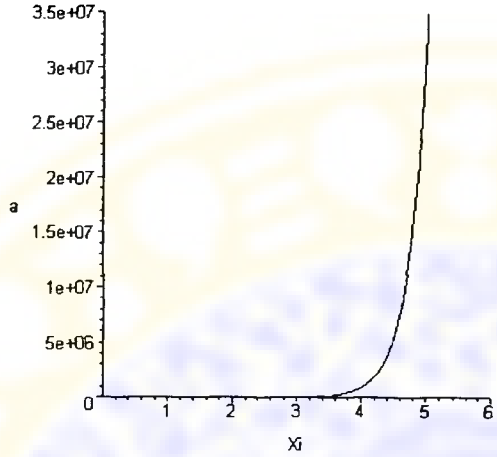


Gambar D.1(b)

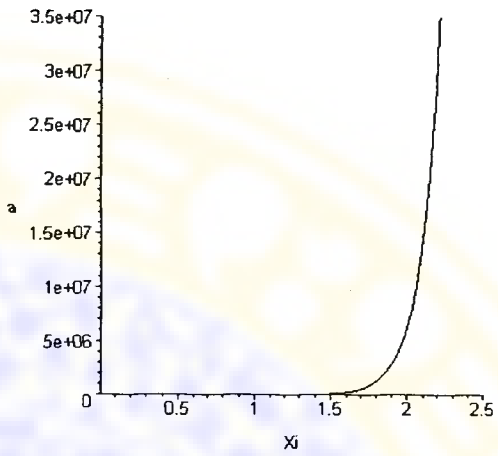


Gambar D.1(c)

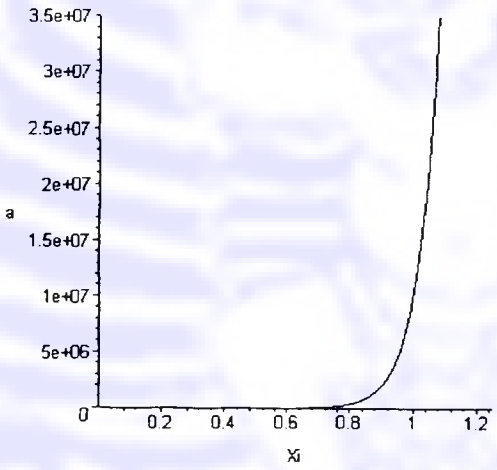
Gambar D.1 Grafik Pers. (4.2.9) dengan $\Omega = 4$. (a) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$. (b) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$. (c) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$.



Gambar D.2(a)

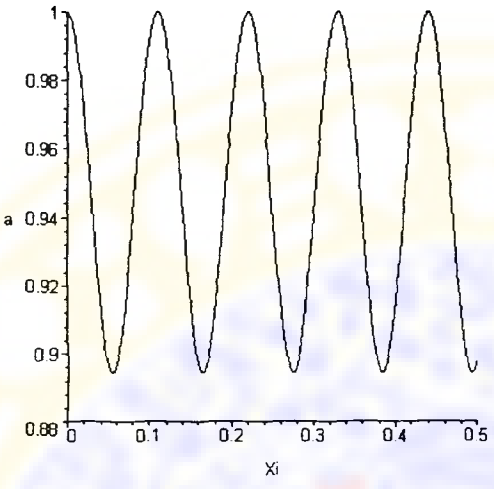


Gambar D.2(b)

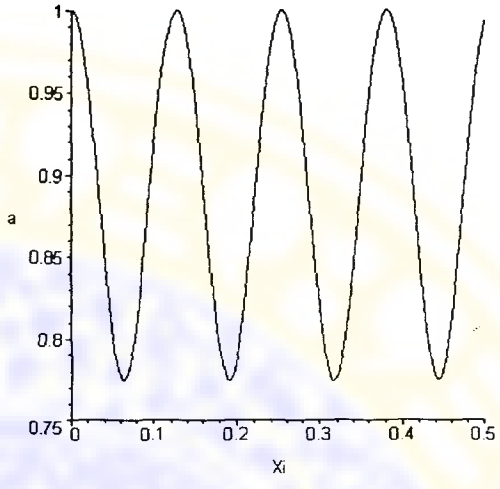


Gambar D.2(c)

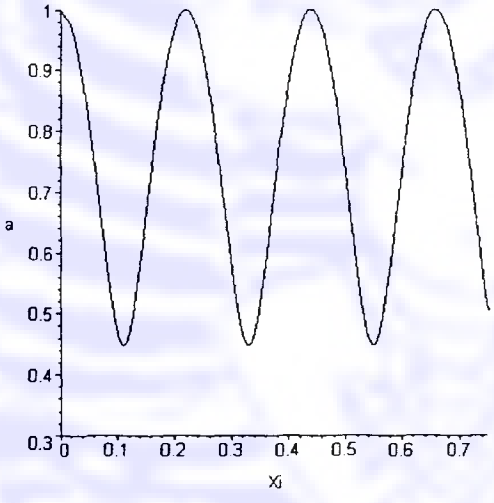
Gambar D.2 Grafik Pers. (4.2.10) dengan $\Omega = 4$. (a) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$. (b) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$. (c) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$.



Gambar D.3(a)

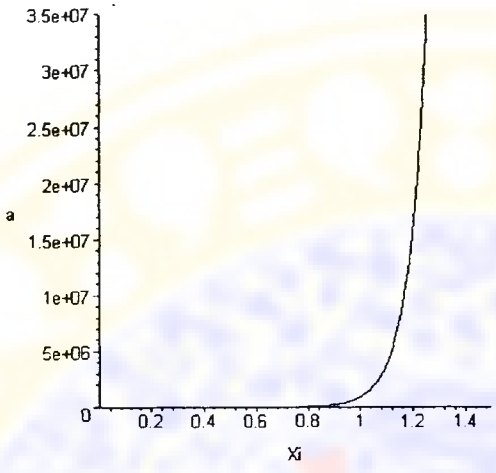


Gambar D.3(b)

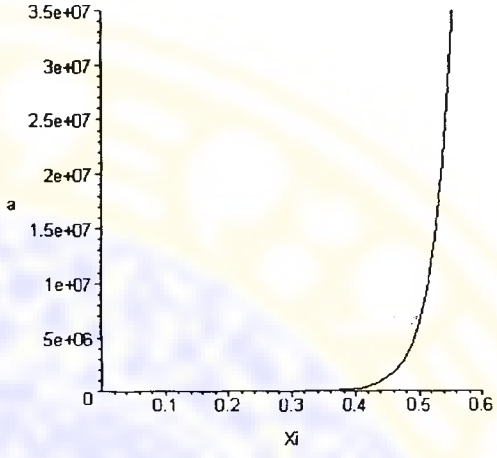


Gambar D.3(c)

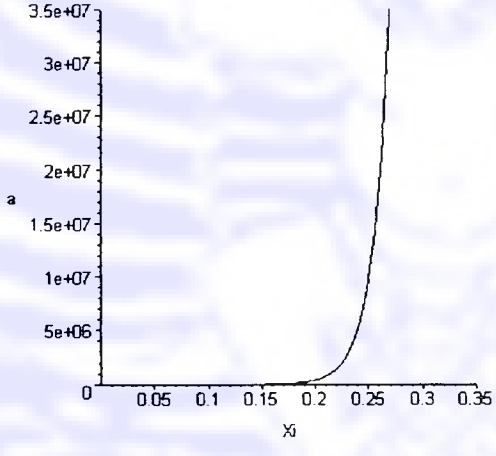
Gambar D.3 Grafik Pers. (4.2.9) dengan $\Omega = 8$. (a) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}2$. (b) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}4$. (c) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 0{,}8$.



Gambar D.4(a)



Gambar D.4(b)



Gambar D.4(c)

Gambar D.4 Grafik untuk Pers. (4.2.10) dengan $\Omega = 8$. (a) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 1{,}2$. (b) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 2$. (c) Grafik $a - \xi$ untuk $4\rho_0^2/\Omega^2 = 5$.