

BAB IV

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas tentang pengimplementasian *Zero Point Method* untuk menyelesaikan masalah transportasi dan kemudian dilakukan uji optimalitas dengan menggunakan MODI.

Contoh Masalah Transportasi

Contoh 1. Masalah Transportasi Seimbang

Contoh berikut ini diambil dari buku *Introduction To Operations Research, Fifth Edition*, karangan Friedrich S. Hillier dan Gerald J. Lieberman dengan tambahan narasi dari penulis.

Suatu perusahaan P mempunyai tiga daerah penambangan minyak (sumber), yaitu A, B, dan C yang masing-masing menghasilkan minyak 70.000, 170.000, dan 160.000 galon. Minyak tersebut akan dikirim ke empat daerah pemasaran, yaitu DP I, DP II, DP III, dan DP IV yang masing-masing memiliki daya tampung 100.000, 20.000, 130.000, dan 150.000 galon. Biaya pengangkutan per 10.000 galon adalah sebagai berikut (dalam puluhan ribu rupiah):

Tabel 4.1. Tabel biaya transportasi perusahaan P

		Daerah Pemasaran			
		DP I	DP II	DP III	DP IV
Sumber	A	3	2	2	1
	B	4	7	7	9
	C	4	1	3	1

Ke daerah pemasaran mana sajakah minyak didistribusikan sehingga meminimumkan biaya distribusi?

Penyelesaian:

Langkah 1

Dari permasalahan di atas dapat dibuat tabel biaya transportasinya sebagai berikut: (dalam puluhan ribu)

Tabel 4.2. Tabel biaya transportasi perusahaan P serta suplai dan permintaan

		Daerah Pemasaran				Suplai
		DP I	DP II	DP III	DP IV	
Sumber	A	3	2	2	1	7
	B	4	7	7	9	17
	C	4	1	3	1	16
Permintaan		10	2	13	15	

Dari tabel biaya di atas diketahui bahwa jumlah permintaan sama dengan jumlah suplai sehingga masalah transportasi di atas seimbang.

Langkah 2

Langkah selanjutnya mengurangi tiap elemen dalam baris dengan nilai terkecilnya, sehingga diperoleh tabel biaya tereduksi sebagai berikut:

2	1	1	0	7
0	3	3	5	17
3	0	2	0	16
10	2	13	15	

Kemudian dilanjutkan mengurangi tiap elemen dalam kolom dengan nilai terkecilnya dan menghasilkan tabel biaya tereduksi sebagai berikut:

2	1	0	0	7
0	3	2	5	17
3	0	1	0	16
10	2	13	15	

Langkah 3

2	1	0	0	7
0	3	2	5	17
3	0	1	0	16
10	2	13	15	

Dari tabel biaya tereduksi di atas dapat diketahui bahwa:

- Permintaan 1 \leq suplai 2
- Permintaan 2 \leq suplai 3
- Permintaan 3 $>$ suplai 1
- Permintaan 4 \leq suplai 1 + suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan 3 + permintaan 4
- Suplai 2 $>$ permintaan 1
- Suplai 3 \leq permintaan 2 + permintaan 4

Karena syarat pada *Zero Point Method* Langkah 3 belum terpenuhi, maka menuju ke **langkah 4**.

Langkah 4

Semua elemen nol ditutup dengan garis mendatar dan tegak se-minimal mungkin sehingga baris atau/ dan kolom yang belum terpenuhi tidak tertutup garis.

2	1	0	0	7
0	3	2	5	17
3	0	1	0	16
10	2	13	15	

2	1	0	0	7
0	3	2	5	17
3	0	1	0	16
10	2	13	15	

Langkah 5

Dari penutupan elemen nol di atas, dapat dibentuk tabel perbaikan sebagai berikut:

4	1	0	0	7
0	1	0	3	17
5	0	1	0	16
10	2	13	15	

Kemudian kembali ke **langkah 3**, yaitu mengecek kolom permintaan dan baris suplai, didapatkan:

- Permintaan $1 \leq$ suplai 2

- Permintaan $2 \leq$ suplai 3
- Permintaan $3 \leq$ suplai 1 + suplai 2
- Permintaan $4 \leq$ suplai 1 +suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan 3 + permintaan 4
- Suplai 2 \leq permintaan 1 + permintaan 3
- Suplai 3 \leq permintaan 2 + permintaan 4

Karena tabel perbaikan tersebut sudah memenuhi syarat, maka dilakukan pengalokasian pada variabel basis, di mana variabel basisnya adalah kotak-kotak pada tabel perbaikan yang biaya tereduksinya nol.

Langkah 6

Langkah selanjutnya memilih kotak dengan biaya tereduksi terbesar pada tabel perbaikan, yaitu biaya tereduksi 5 pada (3,1).

Langkah 7

Selanjutnya, pengisian pertama adalah pada kotak-kotak yang terletak pada baris ke-3 atau/ dan kolom ke-1. Pada kolom ke-1 terlihat hanya memiliki satu elemen nol sehingga pada (2,1) dialokasikan 10. Selanjutnya, pada baris ke-3 terdapat dua elemen nol, tetapi pada kolom ke-2 hanya terdapat satu elemen nol, sehingga pada (3,2) dialokasikan 2 dan pada (3,4) dialokasikan $(16 - 2) = 14$. Pengisian selanjutnya dengan mencari biaya tereduksi terbesar selanjutnya dan dengan cara yang sama diperoleh tabel pegalokasian sebagai berikut:

			6	1	7
10			7		17
	2			14	16
	10	2	13	15	

Tabel di atas merupakan solusi awal dari masalah transportasi yang diberikan.

Dari solusi awal tersebut diuji optimalitas dengan MODI.

					u_i
	3	2	2	1	7
	4	7	7	9	17
	4	1	3	1	16
	10	2	13	15	
v_j	-1	-1	2	1	

Variabel non basis:

$$z_{11} - c_{11} = 0 + (-1) - 3 = -4$$

$$z_{12} - c_{12} = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$z_{22} - c_{22} = 5 + 1 - 7 = -1$$

$$z_{24} - c_{24} = 5 + 2 - 7 = 0$$

$$z_{31} - c_{31} = 0 + (-1) - 4 = -5$$

$$z_{32} - c_{32} = 0 + 2 - 3 = -1$$

Karena semua nilai $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$, maka solusi awal tersebut sudah optimal sehingga solusi awal tersebut merupakan solusi optimal dari masalah transportasi yang diberikan.

Jadi, kesimpulan dari masalah perusahaan P untuk meminimumkan biaya pengangkutan adalah sebagai berikut:

- Sumber A mengirimkan minyak sebanyak **60.000** galon ke DP III
- Sumber A mengirimkan minyak sebanyak **10.000** galon ke DP IV
- Sumber B mengirimkan minyak sebanyak **100.000** galon ke DP I
- Sumber B mengirimkan minyak sebanyak **70.000** galon ke DP III
- Sumber C mengirimkan minyak sebanyak **20.000** galon ke DP II
- Sumber C mengirimkan minyak sebanyak **140.000** galon ke DP IV

Dengan biaya total = **Rp 1.180.000,-**

Contoh 2. Masalah Transportasi Tidak Seimbang

Contoh berikut ini diambil dari buku *Operations Research: Applications and Algorithms, Fourth Edition*, karangan Wayne L. Winston dengan tambahan narasi dari penulis.

Sebuah perusahaan sepeda memiliki tiga pabrik produksi, yaitu pabrik 1, 2, dan 3 berencana untuk mengirimkan produksinya ke tiga daerah distribusi, yaitu daerah distribusi A, B, dan C. pabrik 1, 2, dan 3 dapat memproduksi sepeda masing-masing 150, 175, dan 375 unit. Sedangkan daerah distribusi A, B, dan C dapat menampung produksi sepeda masing-masing sebanyak 200, 100, dan 300 unit.

Biaya pengiriman per unit ke masing-masing daerah distribusi adalah sebagai berikut:

Tabel 4.3. Tabel biaya transportasi pabrik sepeda

		Tujuan		
		A	B	C
Sumber	1	\$6	\$8	\$10
	2	\$7	\$11	\$11
	4	\$4	\$5	\$12

Ke daerah mana sajakah sepeda didistribusikan sehingga meminimumkan biaya distribusi?

Penyelesaian:

Langkah 1

Dari permasalahan di atas dapat dibuat tabel transportasi sebagai berikut:

Tabel 4.4. Tabel biaya transportasi pabrik sepeda serta suplai dan permintaan

		Tujuan			Suplai
		A	B	C	
Sumber	1	6	8	10	150
	2	7	11	11	175
	4	4	5	12	375
Permintaan		200	100	300	

Dari tabel biaya di atas diketahui bahwa jumlah suplai > jumlah permintaan sehingga masalah transportasi di atas tidak seimbang. Oleh karena itu, harus diseimbangkan terlebih dahulu dengan menambah permintaan *dummy* dan tabel transportasi seimbang sebagai berikut:

Tabel 4.5. Tabel biaya transportasi pabrik sepeda yang diseimbangkan serta suplai dan permintaan

		Tujuan				Suplai
		A	B	C	D (<i>Dummy</i>)	
Sumber	1	6	8	10	0	150
	2	7	11	11	0	175
	3	4	5	12	0	375
Permintaan		200	100	300	100	

Langkah 2

Langkah selanjutnya mengurangi tiap elemen dalam baris dengan nilai terkecilnya, sehingga diperoleh tabel biaya tereduksi.

6	8	10	0	150
7	11	11	0	175
4	5	12	0	375
200	100	300	100	

Kemudian dilanjutkan mengurangi tiap elemen dalam kolom dengan nilai terkecilnya dan tabel biaya tereduksinya sebagai berikut:

2	3	0	0	150
3	6	1	0	175
0	0	2	0	375
200	100	300	100	

Langkah 3

2	3	0	0	150
3	6	1	0	175
0	0	2	0	375
200	100	300	100	

Dari tabel biaya tereduksi di atas dapat diketahui bahwa:

- Permintaan A \leq suplai 3
- Permintaan B \leq suplai 3
- Permintaan C $>$ suplai 1
- Permintaan D \leq suplai 1 + suplai 2 + suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan C + permintaan D
- Suplai 2 $>$ permintaan D
- Suplai 3 \leq permintaan A + permintaan B + permintaan D

Karena syarat pada *Zero Point Method* Langkah 3 belum terpenuhi, maka menuju ke **langkah 4**.

Langkah 4

Semua elemen nol ditutup dengan garis mendatar dan tegak se-minimal mungkin sehingga baris atau/ dan kolom yang belum terpenuhi tidak tertutup garis.

2	3	0	0	150
3	6	1	0	175
0	0	2	0	375
200	100	300	100	

2	3	0	0	150
3	6	1	0	175
0	0	2	0	375
200	100	300	100	

Langkah 5

Dari penutupan elemen nol di atas, dapat dibentuk tabel perbaikan sebagai berikut:

2	3	0	1	150
2	5	0	0	175
0	0	2	1	375
200	100	300	100	

Kemudian kembali ke **langkah 3**, yaitu mengecek kembali kolom permintaan dan baris suplai dan didapatkan:

- Permintaan A \leq suplai 3
- Permintaan B \leq suplai 3
- Permintaan C \leq suplai 1 + suplai 2
- Permintaan D \leq suplai 2
- Suplai 1 \leq permintaan C
- Suplai 2 \leq permintaan C + permintaan D
- Suplai 3 $>$ permintaan A + permintaan B

Karena syarat pada *Zero Point Method* **Langkah 3** masih belum terpenuhi, maka dilakukan penutupan semua elemen nol lagi dengan garis mendatar dan tegak se-minimal mungkin sehingga baris atau/ dan kolom yang belum terpenuhi tidak tertutup garis.

2	3	0	1	150
2	5	0	0	175
0	0	2	1	375
200	100	300	100	

2	3	0	1	150
2	5	0	0	175
0	0	2	1	375
200	100	300	100	

Sehingga terbentuk tabel perbaikan sebagai berikut:

3	4	0	1	150
3	6	0	0	175
0	0	1	0	375
200	100	300	100	

Kemudian kembali ke langkah 3, yaitu mengecek baris suplai dan kolom permintaan.

- Permintaan A \leq suplai 3
- Permintaan B \leq suplai 3
- Permintaan C \leq suplai 1 + suplai 2

- Permintaan $D \leq$ suplai 2 + suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan C
- Suplai 2 \leq permintaan C + permintaan D
- Suplai 3 \leq permintaan A + permintaan B + permintaan D

Karena tabel perbaikan tersebut sudah memenuhi syarat, maka dilakukan pengalokasian pada variabel basis, di mana variabel basisnya adalah kotak-kotak pada tabel perbaikan yang biaya tereduksinya nol.

Langkah 6

Langkah selanjutnya memilih kotak dengan biaya tereduksi terbesar pada tabel perbaikan, yaitu biaya tereduksi 6 pada (2,2).

Langkah 7

Pengisian pertama adalah pada kotak-kotak yang terletak pada baris ke-2 atau/ dan kolom ke-2. Pada kolom ke-2 terlihat hanya memiliki satu elemen nol sehingga pada (3,2) dialokasikan 100. Karena pada kolom ke-3 dan ke-4 masing-masing memiliki lebih dari satu elemen nol, maka pada baris ke-2 belum bisa dialokasikan. Pengisian selanjutnya dengan mencari biaya tereduksi terbesar selanjutnya dan dengan cara yang sama diperoleh tabel pengalokasian sebagai berikut:

			150	150	
			150	25	175
200	100			75	375
	200	100	300	100	

Tabel di atas merupakan solusi awal dari masalah transportasi yang diberikan.

Dari solusi awal tersebut diuji optimalitas dengan MODI.

					u_i	
	6	8	10	0	150	0
	7	11	11	0	175	1
	4	5	12	0	375	1
	200	100	300	100		
v_j	3	4	10	-1		

Variabel non basis:

$$z_{11} - c_{11} = 0 + 3 - 6 = -3$$

$$z_{12} - c_{12} = 0 + 4 - 8 = -4$$

$$z_{14} - c_{14} = 0 + (-1) - 0 = -1$$

$$z_{21} - c_{21} = 1 + 3 - 7 = -3$$

$$z_{22} - c_{22} = 1 + 4 - 11 = -6$$

$$z_{33} - c_{33} = 1 + 10 - 12 = -1$$

Karena semua nilai $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$, maka solusi awal tersebut sudah optimal sehingga solusi awal tersebut merupakan solusi optimal dari masalah transportasi yang diberikan.

Jadi, kesimpulan penyelesaian permasalahan perusahaan yang memproduksi sepeda dalam pengiriman sepeda ke daerah distribusi adalah sebagai berikut:

- Pabrik 1 mengirimkan **150** unit sepeda ke daerah distribusi C
- Pabrik 2 mengirimkan **150** unit sepeda ke daerah distribusi C
- Pabrik 2 mengirimkan **25** unit sepeda ke daerah distribusi D
- Pabrik 3 mengirimkan **200** unit sepeda ke daerah distribusi A
- Pabrik 3 mengirimkan **100** unit sepeda ke daerah distribusi B
- Pabrik 3 mengirimkan **75** unit sepeda ke daerah distribusi D

Dengan biaya total = **\$4.450**

Contoh 3. Masalah Transportasi dengan Suatu Sumber Tidak Dapat Mensuplai Suatu Tujuan

Contoh berikut ini diambil dari buku *Introduction To Operations Research, Fifth Edition*, karangan Friedrich S. Hillier dan Gerald J. Lieberman dengan tambahan narasi dan sedikit modifikasi angka dari penulis.

Suatu perusahaan Z mempunyai tiga daerah penambangan minyak (sumber), yaitu A, B, dan C yang masing-masing menghasilkan minyak 70.000, 170.000, dan 160.000 galon. Minyak tersebut akan dikirim ke empat daerah pemasaran, yaitu DP I, DP II, DP III, dan DP IV yang masing-masing memiliki daya tampung 100.000, 20.000, 130.000, dan 150.000 galon. Namun Sumber B tidak mengirimkan minyak ke DP I. Biaya pengangkutan per 10.000 galon adalah sebagai berikut: (dalam puluhan ribu rupiah)

Tabel 4.6. Tabel transportasi perusahaan Z

		Daerah Pemasaran			
		DP I	DP II	DP III	DP IV
Sumber	A	3	2	2	1
	B	M	7	7	9
	B	4	1	3	1

Ke daerah pemasaran mana sajakah minyak didistribusikan sehingga meminimumkan biaya distribusi?

Penyelesaian:

Langkah 1

Dari permasalahan di atas dapat dibuat tabel biaya transportasinya sebagai berikut: (dalam puluhan ribu)

Tabel 4.7. Tabel transportasi perusahaan Z serta suplai dan permintaan

		Daerah Pemasaran				Suplai
		DP I	DP II	DP III	DP IV	
Sumber	A	3	2	2	1	7
	B	M	7	7	9	17
	C	4	1	3	1	16
Permintaan		10	2	13	15	

Dari tabel biaya di atas diketahui bahwa jumlah permintaan sama dengan jumlah suplai sehingga masalah transportasi di atas seimbang.

Langkah 2

Langkah selanjutnya mengurangi tiap elemen dalam baris dengan nilai terkecilnya, sehingga diperoleh tabel biaya tereduksi sebagai berikut:

2	1	1	0	7
M	0	0	2	17
3	0	2	0	16
10	2	13	15	

Kemudian dilanjutkan mengurangi tiap elemen dalam kolom dengan nilai terkecilnya dan menghasilkan tabel biaya tereduksi sebagai berikut:

0	1	1	0	7
M	0	0	2	17
1	0	1	0	16
10	2	13	15	

Langkah 3

0	1	1	0	7
M	0	0	2	17
1	0	1	0	16
10	2	13	15	

Dari tabel biaya tereduksi di atas dapat diketahui bahwa:

- Permintaan 1 > suplai 1
- Permintaan 2 \leq suplai 2 + suplai 3

- Permintaan $3 \leq$ suplai 2
- Permintaan $4 \leq$ suplai 1 + suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan 1 + permintaan 4
- Suplai 2 $>$ permintaan 2 + permintaan 3
- Suplai 3 \leq permintaan 2 + permintaan 4

Karena syarat pada *Zero Point Method* Langkah 3 belum terpenuhi, maka menuju ke **langkah 4**.

Langkah 4

Semua elemen nol ditutup dengan garis mendatar dan tegak se-minimal mungkin sehingga baris atau/ dan kolom yang belum terpenuhi tidak tertutup garis.

0	1	1	0	7
M	0	0	2	17
1	0	1	0	16
10	2	13	15	

0			0	7
M	0	0	2	17
1	0	1	0	16
10	2	13	15	

Langkah 5

Dari penutupan elemen nol di atas, dapat dibentuk tabel perbaikan sebagai berikut:

0	2	2	1	7
M	0	0	2	17
0	0	2	0	16
10	2	13	15	

Kemudian kembali ke **langkah 3**, yaitu mengecek kembali kolom permintaan dan baris suplai dan didapatkan:

- Permintaan 1 \leq suplai 1 + suplai 3
- Permintaan 2 \leq suplai 2 + suplai 3
- Permintaan 3 \leq suplai 2
- Permintaan 4 \leq suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan 1
- Suplai 2 $>$ permintaan 2 + permintaan 3
- Suplai 3 \leq permintaan 1 + permintaan 2 + permintaan 4

Karena syarat pada *Zero Point Method* **Langkah 3** masih belum terpenuhi, maka dilakukan penutupan semua elemen nol lagi dengan garis mendatar dan tegak se-minimal mungkin sehingga baris atau/ dan kolom yang belum terpenuhi tidak tertutup garis.

0	2	2	1	7
M	0	0	2	17
0	0	2	0	16
10	2	13	15	

0	2	2	1	7
M	0	0	2	17
0	0	2	0	16
10	2	13	15	

Sehingga terbentuk tabel perbaikan sebagai berikut:

0	4	4	1	7
M	0	0	0	17
0	2	4	0	16
10	2	13	15	

Kemudian kembali ke langkah 3, yaitu mengecek baris suplai dan kolom permintaan.

- Permintaan 1 \leq suplai 1 + suplai 3
- Permintaan 2 \leq suplai 2
- Permintaan 3 \leq suplai 2
- Permintaan 4 \leq suplai 2 + suplai 3
- Suplai 1 \leq permintaan 1
- Suplai 2 \leq permintaan 2 + permintaan 3 + permintaan 4
- Suplai 3 \leq permintaan 1 + permintaan 4

Karena tabel perbaikan tersebut sudah memenuhi syarat, maka dilakukan pengalokasian pada variabel basis, di mana variabel basisnya adalah kotak-kotak pada tabel perbaikan yang biaya tereduksinya nol.

Langkah 6

Langkah selanjutnya memilih kotak dengan biaya tereduksi terbesar pada tabel perbaikan, yaitu biaya tereduksi M pada (2,1).

Langkah 7

Pengisian pertama adalah pada kotak-kotak yang terletak pada baris ke-2 atau/ dan kolom ke-1. pada baris ke-2 terdapat tiga elemen nol sehingga pengisian untuk kotak (2,2) adalah 2, kotak (2,3) adalah 13, dan kotak (2,4) adalah 2. Sedangkan pada kolom ke-1 terdapat dua elemen nol dengan pengisian untuk kotak (1,1) adalah 7 dan kotak (3,1) adalah 3. Pengisian selanjutnya dengan mencari biaya tereduksi terbesar selanjutnya dan dengan cara yang sama diperoleh tabel pengalokasian sebagai berikut:

7				7
	2	13	2	17
3			13	16
10	2	13	15	

Tabel di atas merupakan solusi awal dari masalah transportasi yang diberikan.

Dari solusi awal tersebut diuji optimalitas dengan MODI.

					u_i	
	3	2	2	1	7	0
	M	7	7	9	17	9
	4	1	3	1	16	1
	10	2	13	15		
v_j	3	-2	-2	0		

Variabel non basis:

$$z_{12} - c_{12} = 0 + (-2) - 2 = -4$$

$$z_{13} - c_{13} = 0 + (-2) - 2 = -4$$

$$z_{14} - c_{14} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$z_{21} - c_{21} = 9 + 3 - M = -M$$

$$z_{32} - c_{32} = 1 + (-2) - 1 = -2$$

$$z_{33} - c_{33} = 1 + (-2) - 3 = -4$$

Karena semua nilai $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$, maka solusi awal tersebut sudah optimal sehingga solusi awal tersebut merupakan solusi optimal dari masalah transportasi yang diberikan.

Jadi, kesimpulan dari masalah perusahaan Z untuk meminimumkan biaya pengangkutan adalah sebagai berikut:

- Sumber A mengirimkan minyak sebanyak **70.000** galon ke DP I
- Sumber B mengirimkan minyak sebanyak **20.000** galon ke DP II
- Sumber B mengirimkan minyak sebanyak **130.000** galon ke DP III
- Sumber B mengirimkan minyak sebanyak **20.000** galon ke DP IV
- Sumber C mengirimkan minyak sebanyak **30.000** galon ke DP I

- Sumber C mengirimkan minyak sebanyak **130.000** galon ke DP IV

Dengan biaya total = **Rp 1.690.000,-**

