ANALISIS PREFERENSI DENGAN PEMODELAN RANK BERDASARKAN DISTRIBUSI INVERS HYPERGEOMETRIK (IHG)

SKRIPSI

NELY PUSPITANINGRUM

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS AIRLANGGA
SURABAYA

2007

ANALISIS PREFERENSI DENGAN PEMODELAN RANK BERDASARKAN DISTRIBUSI INVERS HYPERGEOMETRIK (IHG)

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh
Gelar Sarjana Sains Bidang Matematika Pada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Airlangga

Oleh :

NELY PUSPITANINGRUM
NIM. 080212564

Tanggal Lulus : 17 Januari 2007

Disetujui Oleh :

Pembimbing I,

Drs. Suliyanto M.Si
NIP. 131 933 016

Pembimbing II,

Toha Saifudin, S.Si, M.Si
NIP. 132 230 838

LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

Judul : ANALISIS PREFERENSI DENGAN PEMODELAN RANK BERDASARKAN DISTRIBUSI INVERS HYPERGEOMETRIK (IHG)

Penyusun : Nely Puspitaningrum

NIM : 080212564

Tanggal Ujian : 17 Januari 2007

Disetujui Oleh :

Pembimbing I,

Drs. Suliyanto M.Si
NIP. 131 933 016

Pembimbing II,

Toha Saifudin, S.Si, M.Si
NIP. 132 230 838

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Airlangga

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL UNIVERSITAS AIRLANGGA JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Moh. Imam Utoyo, M.Si
NIP. 131 801 397

PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan seijin penyusun dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah.

Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

"... Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan ada kemudahan ... "
(Al Insyirah : 5-6)

Benarkah keberadaan manusia di muka bumi ini tanpa rupa, sebab tumbuhan yang berasal dari benih tidak terbenam takkan tumbuh dengan sempurna buahnya. Tidaklah ada musibah yang menimpa seperti keletihan, sakit, susah atau gangguan sekedar tusukan sekalipun, melainkan dihapuskan Allah dari sebagian dosanya.
(Hadist Qudsi)

Teruntuk Ibunda, Ayahanda, dan kakak-kakaku tercinta
Anugrah terindah dan terbaik dalam hidupku
Terima kasih untuk segalanya

Segala Puji bagi Allah. Tuhan Semesta Alam
Dengan rahmat-Nya
Setiap amal kebaikan meskipun berat dan sulit
akan terasa lebih mudah

Ya Allah ....
Jika Engkau meridhoi,
Maka jadikanlah setiap langkah,
Jerih payah, dan amal kebaikan
Yang hamba perbuat, sebagai amal ibadah bagi
Ibunda dan Ayahanda
Karena, ...
hanya ini yang mampu hamba lakukan atas segala
untaian doa mereka yang tak pernah putus
Cinta dan kasih sayang yang hangat dan tulus
Bimbingan dan Arahan yang lurus
Serta, ...
Dari mereka hamba belajar bersyukur
Atas segala apa yang Engkau berikan
Memaknai segala kekurangan dan kelebihan
Tuk belajar sabar dalam doa
Dan tawakal dalam usaha

Ucapan Terima Kasih

- **Allah SWT** atas pertolongan, anugerah dan hidayah-Nya yang diberikan sampai aku dapat menyelesaikan skripsi ini.
- **Rasulullah SAW** semoga aku dapat mengikuti langkahmu.
- **Ayah dan Ibuku** tercinta yang senantiasa memberikan cinta, kasih sayang, perhatian, dan kesabaran yang tiada tara buat ananda, **Mas Novi dan Mba Fitri** makasih banyak sudah membantu adikmu ini untuk selalu semangat nyelesain skripsi ini.
- **Pak Suli dan Pak Toha**, terima kasih telah mrmbimbing dan meluangkan waktu untuk saya, semoga Allah SWT senantiasa menambah ilmu yang bermanfaat buat Bapak. Amiiin….
- **Bu Nur dan Pak Eto** selaku dosen pengujiku, terima kasih atas segala masukan, kritikan dan saran yang membangun.
- **Bu Yayuk, Bu Utami serta Bu Fatma** terima kasih telah menjadi dosen waliku selama kuliah di FMIPA Unair.
- Seluruh **Dosen Matematika Unair** yang telah mendidik dan memberikan ilmu yang bermanfaat buat saya. Terima kasih banyak.
- **Mas Edi, Mas Milan, dan Mas Udin** terima kasih atas bantuan selama ujian.
- Buat Sodara sekaligus sobat aku sejak kecil (**Reni, Nurul, Adhani, Hendrix, Linda, n semuanya**) terima kasih atas segala cinta, kasih sayang, perhatian, semangat dan dorongannya agar aku cepat lulus.
- Buat sahabat karibku tercinta, **Aris, Agus, Reni, dan Amjad**
- Anak** kos Bu Alfianti (**Mba didi, Rheen, kiki, Mba Indri n semuanya**) terima kasih ya untuk supportnya.
- Temen-temen Jurusan Matematika angkatan 2001 (**Mba Erni, Mba Nita, Mas Es, Mas Dhani, n semuanya** terima kasih ya semangatnya) dan temanku seangkatan 2002 (**Devi, Oyot, Irkha, Kokom, Rini, Itha, Dewi n semuanya**) terima kasih atas bantuan, gurauan, dan tetep kompak ya!!!
- Semua pihak yang belum kusebutkan makasih banyak yaa….

KATA PENGANTAR

Puji syukur penyusun panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya, skripsi yang berjudul "*Analisis Preferensi dengan Pemodelan Rank Berdasarkan Distribusi Invers Hypergeometrik (IHG)*" ini bisa terselesaikan dengan baik.

Dalam kesempatan ini, penyusun ingin menyampaikan ucapan terima kasih sebesar – besarnya kepada Drs. Suliyanto, M.Si selaku Pembimbing I dan Toha Saifudin, S.Si, M.Si selaku Pembimbing II yang telah memberikan materi dan dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan kepada penyusun. Penyusun juga mengucapkan terima kasih kepada Nur Chamidah, S.Si, M.Si selaku Penguji I dan Drs Eto Wuryanto, S.Si, M.Si selaku Penguji II atas arahan, masukan, kritik dan sarannya, juga tak lupa terimakasih untuk teman – teman Jurusan Matematika yang telah banyak membantu terselesaikannya skripsi ini.

Dengan segala kerendahan hati penyusun mengakui dan menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, mengingat luasnya permasalahan, terbatasnya waktu dan kemampuan penyusun. Untuk itu penyusun mengharapkan adanya kritik dan saran yang dapat dijadikan acuan untuk penyusunan tugas – tugas selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan bagi yang membacanya.

Surabaya, Januari 2007

Penyusun

Nely Puspitaningrum. 2007. **Analisis Preferensi dengan Pemodelan Rank Berdasarkan Distribusi Invers Hypergeometrik (IHG)**. Skripsi ini dibawah bimbingan Drs. Suliyanto, M. Si dan Toha Saifudin, S. Si, M. Si. Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Airlangga.

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk melakukan analisis preferensi dengan pemodelan rank berdasarkan distribusi Invers Hypergeometrik. Model rank dapat dinyatakan $\Pr(R=r)=\begin{cases}\theta, & ,r=1;\\ c_r\theta(1-\theta)^{r-1}\prod_{s=1}^{r-1}(m-s-1+s\theta)^{-1} & ,r=2,3,\ldots,m;\end{cases}$ untuk m adalah banyaknya item yang diranking. Karena responden yang meranking mempunyai sejumlah variabel bebas (kovariat), maka model diatas digunakan dengan memisalkan $\theta=\frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}$, i = 1, 2, ... , n. Sehingga untuk mengestimasi parameter θ pada model rank yang melibatkan kovariat, terlebih dahulu dilakukan estimasi terhadap parameter β. Dalam skripsi ini digunakan metode MLE, dengan cara menyelesaikan sistem persamaan berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ij}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0\ ,\ j=1,2,\ldots,p$$

Dalam skripsi ini menyelesaikan sistem persamaan tersebut menggunakan metode Newton-Raphson melalui software Mathematica. Berikutnya adalah mengestimasi parameter θ dengan cara menghitung $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n}$

Sebagai contoh penerapan analisis preferensi, dalam skripsi ini digunakan data primer yang merupakan hasil penelitian terhadap tingkat preferensi konsumen pada beberapa jenis produk Yamaha, yaitu Vega-R, Jupiter-MX, Mio, dan Jupiter-Z. Hasil yang diperoleh untuk $\hat{\theta}$ (probabilitas terpilih sebagai pilihan pertama) Vega-R, Jupiter-MX, Mio, dan Jupiter-Z masing-masing adalah 0.243133;0.24611024; 0.15065867; dan 0.3600982.

Kata Kunci : Distribusi Invers Hypergeometrik, Maksimum Likelihood Estimator (MLE), Model Rank, Data Rank, dan Kovariat.

Nely Puspitaningrum. 2007. **Analyse Preferences with Modelling Rank Using Invers Hypergeometric Distribution (IHG)**. This Skripsi in under the guidance by Drs. Suliyanto, M. Si and Toha Saifudin, S. Si, M. Si. Mathematics major subject of Mathematics and Natural Science Faculty Airlangga University.

ABSTRACT

The purpose of this skripsi is to analyse preferences with modelling ranks using the Invers Hypergeometric distribution. Model for ranks can be expressed as $\Pr(R=r)=\begin{cases}\theta, & ,r=1;\\ c_r\theta(1-\theta)^{r-1}\prod_{s=1}^{r-1}(m-s-1+s\theta)^{-1} & ,r=2,3,\ldots,m;\end{cases}$ for m is the number of ranked item. Because responden who ranking have a number of free variabel (covariate), hence this model is used by taking example : $\theta=\frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}$, i = 1, 2, ... , n. So that to estimate the parameter θ on model for ranks entangling covariates, beforehand estimate the parameter β. On this skripsi finish is used by MLE method, by finishing the equation system following :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ij}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0\ ,\ j=1,2,\ldots,p$$

On this skripsi finish the equation system is using by Newton-Raphson method throught software mathematica. The next is estimating the parameter θ by counting : $\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n}$

For applying example of preferences analyses, on this skripsi is used by primary data which is the result of research to level preference consumers at some product types Yamaha, that is Vega-R, Jupiter-MX, Mio, and Jupiter-Z. Obtained result for parameter $\hat{\theta}$ (choosen probability as first choice) Vega-R, Jupiter-MX, Mio, dan Jupiter-Z each is 0.243133; 0.24611024; 0.15065867; dan 0.3600982.

Key Word : Invers Hypergeometric Distribution, Maksimum Likelihood Estimation (MLE), Model for Ranks, Rank Data, dan Covariate.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam beberapa penelitian seringkali responden diminta untuk mengurutkan beberapa item berdasarkan tingkat preferensinya, misalkan anak mengurutkan warna favoritnya, pembeli memutuskan mobil yang akan dibeli, juri merankingkan penampilan atletik, pelajar memilih universitas yang diinginkan, dll. Beberapa contoh diatas merupakan studi tentang preferensi responden terhadap beberapa item.

Akhir-akhir ini studi tentang preferensi tersebut telah meluas dalam berbagai bidang, meliputi : riset pemasaran, ilmu sosial dan politik, penilaian evaluasi kualitas, dll.

Studi statistik dari preferensi pada dasarnya dikembangkan dengan memfokuskan pada permutasi rank yang mungkin untuk m item **(Marden, 1995).**

Dalam pemodelan rank, telah dikenalkan model parametrik berdasarkan pada variabel random berdistribusi Invers Hypergeometrik (IHG) yang ditujukan sebagai alat untuk mempelajari data preferensi dan untuk menghubungkan tigkat preferensi terhadap karakteristik responden (kovariat)**(D'Elia, 1999).**

Pada dasarnya pendekatan dari pemodelan rank tersebut memuat 2 hal utama, yaitu :

i) modelnya didasarkan pada model probabilistik tertentu

ii) pemodelan rank untuk satu set yang terdiri dari m item dilakukan dengan membuat satu model untuk setiap item, karena difokuskan pada satu item pada satu waktu.

Dalam skripsi ini, penulis tertarik untuk membahas estimasi parameter model rank yang melibatkan kovariat tersebut dengan menggunakan metode *maksimum likelihood* dan menerapkan pemodelan rank tersebut pada kasus preferensi konsumen sepeda motor terhadap preferensi jenis / tipe sepeda motor sebagai studi kasus.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mengestimasi model rank yang melibatkan kovariat dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimator*.
2. Bagaimana membuat algoritma dan program untuk mengestimasi parameter model rank.

1.3 Tujuan

1. Mengestimasi model rank yang melibatkan kovariat dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimator*.
2. Membuat algoritma dan program untuk mengestimasi parameter model rank.
3. Menerapkan hasil yang diperoleh pada contoh kasus yang diambil pada Dealer Yamaha "Timbul Jaya" di Madiun.

1.4 Manfaat

Manfaat dari usulan topik ini adalah :

1. bagi penulis, dapat memperdalam pengetahuan tentang estimasi parameter pada distribusi Invers Hypergeometrik.
2. diharapkan dapat digunakan dalam bidang penerapan seperti riset pemasaran, ilmu sosial dan politik, penilaian evaluasi kualitas, dll.

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada estimasi titik parameter modelnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Invers Hypergeometrik (IHG)

Fungsi kepadatan probabilitas (fkp) dari distribusi IHG adalah sebagai berikut :

$$\Pr(R=r)=\frac{\binom{B+m-1-r}{m-r}}{\binom{B+m-1}{m-1}}=\begin{cases}\dfrac{B}{B+m-1}, & r=1;\\ \dfrac{B}{B+m-1}\displaystyle\prod_{s=1}^{r-1}\dfrac{m-s}{B+m-1-s}, & r=2,\dots,m.\end{cases} \qquad (2.1)$$

Dengan R = {1,2,…,m} adalah urutan terambilnya bola putih yang pertama kali dan B adalah banyaknya bola putih dalam wadah yang memuat bola sebanyak B+m-1.

(D'Elia, 2002)

2.2 Nilai harapan

Definisi 2.1

Misalkan X adalah suatu variabel random dengan distribusi peluang f (x).

Nilai harapan X adalah

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{x} xf(x), & \text{jika X diskrit}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x), & \text{jika X kontinu}\end{cases}$$

(Walpole dan Myers, 1986)

2.3 Maximum Likelihood Estimation (MLE)

Definisi 2.2

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah variabel random dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan probabilitas (fkp) $f(x,\theta)$, untuk $\theta \in \Omega$ dan Ω adalah ruang parameter fkp bersama antara $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)$. Jika fkp bersama tersebut dinyatakan sebagai fungsi terhadap θ maka dinamakan fungsi likelihood yang dinyatakan L atau ditulis :

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)$$

Dengan $\theta \in \Omega$ dan Ω adalah ruang parameter

(Hogg dan Craig, 1995)

Definisi 2.3

Jika statistik $\hat{\theta} = t\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ memaksimumkan fungsi likelihood $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\theta \in \Omega$, maka statistik $\hat{\theta} = t\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dinamakan maximum likelihood estimator dari θ.

(Hogg dan Craig, 1995)

2.4 Model Regresi Logistik Ordinal

Model regresi logistik merupakan salah satu metode regresi yang dapat digunakan untuk mencari hubungan antara variabel respon yang bersifat kategori dengan satu atau lebih kovariat yang berskala kontinu atau kategori. Pada variabel respon dengan kategori yang hanya mampu membedakan dikenal dengan nama Regresi Logistik Nominal. Sedangkan pada variabel respon dengan kategori yang dapat diurutkan dikenal dengan nama Regresi Logistik Ordinal. Atau dengan kata lain Regresi Logistik Ordinal adalah model regresi logistik yang mempertimbangkan variabel respon berskala ordinal.

(Hosmer dan Lemeshow, 1995)

Definisi 2.4

Kovariat adalah suatu variabel independen atau prediktor dalam persamaan regresi.

(Wikipedia, 2006)

2.4.1 Regresi Polikotomus

Untuk variabel respon dikotomus, maka $y_i \in \{0,1\}$, mempunyai model logistik sebagai berikut :

$$\pi_i = \frac{\exp(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta})} \qquad (2.2)$$

Dimana $\pi_i = P(y_i=1|x_i)$

Dalam kasus Multinomial $\pi_i = E(y_i \mid x_i)$ adalah vektor berukuran (qx1), $\pi i = (\pi_{i1},\ldots,\pi_{iq})'$, sehingga model menjadi

$$\pi_i = h(\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}) \qquad (2.3)$$

Dimana h adalah fungsi dari nilai respon. z_i adalah matriks berukuran (qxp) yang dibentuk dari x_i, dan β adalah vektor berukuran px1 dari parameter yang tidak diketahui. Sehingga model multivariat untuk respon multinomial dapat dibentuk dengan dua spesifikasi, yaitu fungsi respon h atau link function $g = h^{-1}$ dan desain matriks yang tergantung dari variabel bebas dan model yang digunakan.

(David Kleinbaum, 1995)

2.4.2 Regresi Logistik Ordinal

Respon ordinal Y dengan k kategori dapat dipandang sebagai k titik pada peubah acak kontinu tak teramati (U), hubungan kedua peubah acak tersebut adalah

$$Y = r \Leftrightarrow \theta_{r-1} < U \leq \theta_r , \qquad r = 1,\ldots,k$$

Dimana $-\infty = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k = \infty$. Diasumsikan variabel U sebagai fungsi linier dari variabel penjelas dengan bentuk :

$$U = x'\gamma + \varepsilon \tag{2.4}$$

Dimana $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_p)$ adalah vektor koefisien, dan ε adalah variabel random dengan distribusi kumulatif F.

Dari asumsi diatas maka akan diperoleh model untuk variabel respon Y sebagai berikut.

$$P(Y \leq r \mid x) = F(\theta_r + x'\gamma) \tag{2.5}$$

Karena sebelah kiri dari persamaan diatas merupakan jumlah dari probabilitas P(Y=1|x)+ ... +P(Y= r|x) maka model (2.9) disebut model kumulatif dengan fungsi distribusi F.

Fungsi distribusi kumulatif yang biasa digunakan adalah fungsi distribusi logistik F(x) = 1/(1+exp(-x)) sehingga model logistik kumulatifnya menjadi :

$$P(Y \leq r \mid x) = \frac{\exp(\theta_r + x'\gamma)}{1 + \exp(\theta_r + x'\gamma)}, \quad r = 1, \ldots ,k-1 \tag{2.6}$$

Maka untuk variabel respon dengan tiga kategori akan terdapat dua buah model logistik kumulatif, yaitu :

$$P(Y \le 1 \mid x) = \frac{\exp(\theta_1 + x'\gamma)}{1 + \exp(\theta_1 + x'\gamma)} \tag{2.7}$$

$$P(Y \le 2 \mid x) = \frac{\exp(\theta_2 + x'\gamma)}{1 + \exp(\theta_2 + x'\gamma)} \tag{2.8}$$

Dari persamaan (2.7) dan (2.8) akan diperoleh dua model logit (link function), yaitu $g_1(x) = \theta_1 + x'\gamma$ dan $g_2(x) = \theta_2 + x'\gamma$ sehingga dengan mudah dapat dicari peluang untuk masing-masing kategori respon, dimana :

$$P(Y \le 1 \mid x) = P(Y = 1 \mid x) = \pi_1(x) = \frac{\exp(g_1(x))}{1 + \exp(g_1(x))}$$

(2.9)

$$P(Y \le 2 \mid x) = P(Y = 1 \mid x) + P(Y = 2 \mid x)$$

$$\frac{\exp(g_2(x))}{1 + \exp(g_2(x))} = \pi_1(x) + \pi_2(x)$$

$$\pi_2(x) = \frac{\exp(g_2(x))}{1 + \exp(g_2(x))} - \frac{\exp(g_1(x))}{1 + \exp(g_1(x))} = \frac{\exp(g_2(x)) - \exp(g_1(x))}{(1 + \exp(g_1(x)))(1 + \exp(g_2(x)))} \tag{2.10}$$

$$\pi_3(x) = 1 - \pi_1(x) - \pi_2(x) = 1 - \frac{\exp(g_2(x))}{1 + \exp(g_2(x))} \tag{2.11}$$

2.4.3 Interpretasi Parameter

Tujuan interpretasi parameter adalah untuk menentukan hubungan fungsional antara variabel bebas dan variabel respon dengan menentukan unit perubahan untuk variabel bebas. Salah satu ukuran yang digunakan dalam menginterpretasikan parameter Odds Ratio.

Jika dua populasi dengan karakteristik masing-masing adalah x_1 dan x_2 dibandingkan maka rasio dari kumulatif odd-nya adalah

$$\frac{P(Y \le r \mid x_1)/P(Y > r \mid x_1)}{P(Y \le r \mid x2)/P(Y > r \mid x_1)} = \exp\{(x_1 - x_2)'\gamma\}$$

Persamaan diatas tidak tergantung pada kategori dari variabel respon. Hal ini berarti rasio dari kumulatif odd dua populasi adalah sama untuk semua kumulatif odd.

2.5 Metode Newton – Raphson

misalkan $g_1(u_1,u_2,u_3) = 0$, $g_2(u_1,u_2,u_3) = 0$ dan $g_3(u_1,u_2,u_3) = 0$ adalah tiga persamaan dengan u_1, u_2, dan u_3 yang tidak diketahui. Langkah-langkah dalam metode Newton-Raphson, sebagai berikut :

1. Asumsikan $u^0 = \begin{bmatrix} u_1^{o} \\ u_2^{0} \\ u_3^{0} \end{bmatrix}$ diketahui sebagai solusi awal atau solusi perkiraan

   dari system tiga persamaan nonlinier dengan tiga variabel yang tidak diketahui :

$$\begin{cases} g_1(u_1, u_2, u_3) = 0 \\ g_2(u_1, u_2, u_3) = 0 \\ g_3(u_1, u_2, u_3) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

2. Menentukan jacobian tiga persamaan (2.12) tersebut.
3. Dengan ekspansi Taylor, diperoleh :

Jacobian $J(\mathbf{u}^k)$ $\mathbf{h}^k$ $-g(\mathbf{u}^k)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{u}^k)}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{u}^k)}{\partial u_2} & \frac{\partial g_1(\mathbf{u}^k)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{u}^k)}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2(\mathbf{u}^k)}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2(\mathbf{u}^k)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_3(\mathbf{u}^k)}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3(\mathbf{u}^k)}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3(\mathbf{u}^k)}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1{}^k \\ h_2{}^k \\ h_3{}^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}^k) \\ g_2(\mathbf{u}^k) \\ g_3(\mathbf{u}^k) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

kemudian mencari nilai $\mathbf{h}^k$ dengan :

$$\mathbf{h}^k = -[\mathbf{J}(\mathbf{u}^k)]^{-1} g(\mathbf{u}^k) \tag{2.14}$$

4. Misalkan perkiraan $\mathbf{u}^k$ diketahui, dimana $\mathbf{u}^k = \{ \mathbf{u}_1{}^k, \mathbf{u}_2{}^k, \mathbf{u}_3{}^k \}$. Untuk $\mathbf{u}^{k+1}$, dilakukan iterasi dimulai dengan k = 0 dan
5. menghentikan proses iterasi ketika diperoleh akurasi yang dikehendaki.

(Anonim)

2.6 Mathematica

Mathematica merupakan suatu sistem aljabar komputer (*CAS, Computer Algebra System*) yang mengintegrasikan kemampuan komputasi (simbolik, numerik), visualisasi (grafik), bahasa pemrograman, dan pengolahan kata (*word processing*) ke dalam suatu lingkungan yang mudah digunakan. Pertama kali diperkenalkan pada tahun 1988. Mathematica merupakan salah satu alat pilihan dalam penelitian, pendidikan, bisnis, dan sebagainya, khususnya digunakan untuk melakukan :

- Komputasi matematik, baik simbolik maupun numerik,

- Pengembangan algoritma dan aplikasi,
- Pemodelan dan simulasi,
- Eksplorasi, analisis, dan visualisasi data.

Sistem Mathematica terdiri dari dua bagian utama, yaitu *front end* dan *kernel*. Front end berupa *interface* dengan lingkungan kerjanya yang disebut *notebook*. User memasukkan perintah-perintah atau melakukan pengolahan kata (*word processing*) pada notebook, sedangkan komputasi matematik dilakukan pada bagian kernel.

(Kutha Ardana, 2003)

BAB III

METODE PENULISAN

Metode penulisan yang berkaitan dengan tujuan penulisan ini adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan model rank Pr(R=r) dengan variabel random R ~ IHG (B,m).
2. Memisalkan $\theta = \Pr(R = 1)$.
3. Menetapkan model rank yang melibatkan kovariat dengan permisalan

   $\theta = \dfrac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
4. Mengestimasi parameter β dari model rank dengan kovariat melalui langkah – langkah sebagai berikut :
   1. Mengestimasi parameter β dengan MLE
      a. Menentukan fungsi likelihood dari variabel random R ~ IHG (θ,m).
      b. Me-log-kan fungsi likelihood tersebut.
      c. Menentukan fungsi log likelihood untuk model dengan kovariat.
      d. Menurunkan fungsi log likelihood terhadap parameter β dan disamadenganankan nol.
      e. Jika pada langkah d nilai yang didapat masih dalam bentuk fungsi implisit, maka untuk mengestimasi parameter β digunakan metode Newton – Raphson.
      f. Mendapatkan estimator dari parameter β.

2. Mendapatkan estimator dari parameter $\hat{\theta}$ sebagai berikut :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum \hat{\theta}_i}{n}, \text{ dengan } \hat{\theta}_i = \frac{e^{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}}, \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n.$$

5. Membuat algoritma untuk mengestimasi parameter pada model rank dengan kovariat berdasarkan langkah-langkah yang telah dibuat.
6. Membuat program berdasarkan algoritma yang dibuat dengan bahasa pemrograman Mathematica
7. Menerapkan hasil yang diperoleh pada suatu contoh kasus yang diambil pada Dealer Yamaha "Timbul Jaya" di Madiun.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas bagaimana mendapatkan model rank dari Distribusi Invers Hypergeometrik (IHG) dengan regresi logistik.

4.1 Pemodelan Rank

Misalkan $\{O_1, \ldots, O_m\}$ adalah kumpulan m item yang dibandingkan tingkat preferensinya berdasarkan karakteristriknya. Anggap O_h adalah item ke-h yang diberikan dan asumsikan terdapat n obyek yang memberikan preferensinya mengenai O_h melalui sebuah rank $R_h = 1, 2, \ldots, m$. Permasalahan diatas merupakan realisasi dari variabel random IHG, dengan fungsi kepadatan probabilitasnya sebagai berikut :

$$\Pr(R=r)=\frac{\binom{B+m-1-r}{m-r}}{\binom{B+m-1}{m-1}}=\begin{cases}\dfrac{B}{B+m-1}, & r=1;\\ \dfrac{B}{B+m-1}\displaystyle\prod_{s=1}^{r-1}\frac{m-s}{B+m-1-s}, & r=2,3,\ldots,m.\end{cases} \tag{4.1}$$

Misalkan $\Pr(R=1)=\dfrac{B}{B+m-1}=\theta$ dan m ditentukan, maka variabel random $R \sim \mathrm{IHG}(B,m)$ sehingga dari persamaan (4.1) didapatkan fungsi kepadatan probabilitasnya sbb :

$$\Pr(R=r)=\frac{B}{B+m-1}\prod_{s=1}^{r-1}\frac{m-s}{B+m-1-s}\;;\; r=2,3,\ldots,m$$

$$\Pr(R=r)=\frac{B}{B+m-1}\,\frac{m-1}{B+m-2}\,\frac{m-2}{B+m-3}\cdots\frac{m-(r-2)}{B+m-(r-1)}\,\frac{m-(r-1)}{B+m-r}$$

$$= \frac{B}{B+m-1} \frac{(m-1)(m-2)\ \dots\ (m-(r-2))(m-(r-1))}{(B+m-2)(B+m-3)\ \dots\ (B+m-(r-1))(B+m-r)}$$

$$= \frac{B}{B+m-1} \frac{\frac{(m-1)!}{(m-r)!}}{(B+m-2)(B+m-3)\ \dots\ (B+m-(r-1))(B+m-r)}$$

$$= \theta\, c_r \prod_{s=1}^{r-1} \frac{1}{B+m-s-1} \tag{4.2}$$

dengan $\theta = \dfrac{B}{B+m-1}$ dan $c_r = \prod_{s=1}^{r-1}(m-s) = \dfrac{(m-1)!}{(m-r)!}$, $r = 2,3,\dots,m.$

oleh karena $\theta = \dfrac{B}{B+m-1}$, maka $\theta B + \theta m - \theta = B$

$$\theta(m-1) = B(1-\theta)$$

$$B = \frac{\theta\,(m-1)}{1-\theta}$$

Sehingga persamaan (4.2) menjadi :

$$\Pr(R=r) = \theta\, c_r \prod_{s=1}^{r-1} \frac{1-\theta}{m-s-1+s\theta}$$

$$= \theta\, c_r (1-\theta)^{r-1} \prod_{s=1}^{r-1} (m-s-1+s\theta)^{-1}\ ;\ r = 2,3,\dots,m$$

Jadi persamaan (4.1) dapat ditulis sebagai :

$$\Pr(R=r) = \begin{cases} \theta, & ,r=1; \\ c_r\theta(1-\theta)^{r-1}\prod_{s=1}^{r-1}(m-s-1+s\theta)^{-1} & ,r=2,3,\dots,m; \end{cases} \tag{4.3}$$

dengan m adalah banyaknya item dan $0 < \theta < 1$

Dari persamaan (4.1) didapatkan :

$$\Pr(R=r+1)=\frac{B}{B+m-1}\prod_{s=1}^{r}\frac{m-s}{B+m-1-s}$$

$$=\frac{B}{B+m-1}\frac{m-1}{B+m-2}\frac{m-2}{B+m-3}\cdots\frac{m-(r-2)}{B+m-(r-1)}\frac{m-(r-1)}{B+m-r}\frac{m-r}{B+m-(r+1)}$$

$$=\Pr(R=r)\frac{m-r}{B+m-(r+1)}$$

$$=\Pr(R=r)\frac{m-r}{\frac{\theta(m-1)}{1-\theta}+m-(r+1)}$$

$$=\Pr(R=r)(1-\theta)\frac{m-r}{m-r-1+r\theta};\qquad r=1,\ldots,m-1. \tag{4.4}$$

Diasumsikan bahwa nilai rank terkecil ditentukan sebagai preferensi item (misalkan R = 1 untuk item yang pertama disuka). Parameter θ merupakan tingkat preferensi terhadap beberapa item yang ditentukan. Secara khusus $\theta > 1/m$, $\theta = 1/m$, dan $\theta < 1/m$ berturut-turut menyatakan suka, biasa dan tidak suka terhadap item O_h. akibatnya analisis preferensi dapat dilakukan dengan pendugaan berdasarkan parameter θ-nya.

Berikut ini dibahas probabilitas dan nilai harapan dari variabel random R yang berdistribusi IHG untuk m =1, 2, ... , 5.

untuk m = 1, dari persamaan (4.1) didapatkan :

P(R = 1) = 1, sehingga $E(R)=r.\Pr(R=1)=1.1=1$

untuk m = 2, dari persamaan (4.1) didapatkan :

P(R = 1) = θ, dan dari persamaan (4.4) didapat $P(R=2)=\theta(1-\theta)\dfrac{2-1}{2-1-1+1.\theta}=1-\theta$, sehingga berdasarkan definisi (2.2) diperoleh :

$$E(R)=\sum_{r=1}^{2} r\Pr(R=r)$$

$$=1.\Pr(R=1)+2.\Pr(R=2)$$

$$=1.\theta+2(1-\theta)=\theta+2(1-\theta)=2-\theta$$

Untuk m = 3, dari persamaan (4.1) didapatkan P(R = 1) = θ, dan dari persamaan (4.4) didapatkan :

$$\Pr(R=2)=\theta(1-\theta)\frac{3-1}{3-1-1+\theta}=\frac{2\theta(1-\theta)}{1+\theta}$$

$$P(R=3)=\frac{2\theta(1-\theta)}{1+\theta}(1-\theta)\frac{3-2}{3-2-1+2\theta}=\frac{2\theta(1-\theta)^2}{2\theta(1+\theta)}=\frac{(1-\theta)^2}{(1+\theta)}$$

Berdasarkan definisi (2.2) diperoleh :

$$E(R)=\sum_{r=1}^{3} r\Pr(R=r)$$

$$=1.\Pr(R=1)+2.\Pr(R=2)+3.\Pr(R=3)$$

$$=1.\theta+2.\frac{2\theta(1-\theta)}{(1+\theta)}+3.\frac{(1-\theta)^2}{(1+\theta)}=\frac{\theta+\theta^2+4\theta-4\theta^2+3-6\theta+3\theta^2}{1-\theta}=\frac{3-\theta}{1-\theta}$$

untuk m = 4, dari persamaan (4.1) didapatkan P(R = 1) = θ, dan dari persamaan (4.4) didapatkan :

$$P(R=2)=\theta(1-\theta)\frac{4-1}{4-1-1+\theta}=\frac{3\theta(1-\theta)}{(2+\theta)}$$

$$P(R=3)=\frac{3\theta(1-\theta)}{2+\theta}(1-\theta)\frac{4-2}{4-2-1+2\theta}=\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(2+\theta)(1+2\theta)}$$

$$P(R=4)=\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(2+\theta)(1+2\theta)}(1-\theta)\frac{4-3}{4-3-1+3\theta}=\frac{6\theta(1-\theta)^3}{3\theta(2+\theta)(1+2\theta)}=\frac{2(1-\theta)^3}{(2+\theta)(1+2\theta)}$$

Berdasarkan definisi (2.2) diperoleh :

$$E(R)=\sum_{r=1}^{4} r\Pr(R=r)$$

$$=1.\Pr(R=1)+2.\Pr(R=2)+3.\Pr(R=3)+4.\Pr(R=4)$$

$$=1.\theta+2.\frac{3\theta(1-\theta)}{(2+\theta)}+3.\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(2+\theta)(1+2\theta)}+4\frac{2(1-\theta)^3}{(2+\theta)(1+2\theta)}$$

$$=\frac{\theta(2+\theta)(1+2\theta)+6\theta(1-\theta)+18\theta(1-\theta)^2+8(1-\theta)^3}{(2+\theta)(1+2\theta)}$$

$$=\frac{2\theta+5\theta^2+2\theta^3+6\theta+6\theta^2-12\theta^3+18\theta-36\theta^2+18\theta^3+8-24\theta+24\theta^2-8\theta^3}{(2+\theta)(1+2\theta)}$$

$$=\frac{8+2\theta-\theta^2}{(2+\theta)(1+2\theta)}=\frac{(4-\theta)(2+\theta)}{(2+\theta)(1+2\theta)}=\frac{4-\theta}{1+2\theta}$$

untuk m = 5, dari persamaan (4.1) didapatkan $P(R = 1) = \theta$, dan berdasarkan persamaan (4.4) didapatkan :

$$P(R=2)=\theta(1-\theta)\frac{5-1}{5-1-1+\theta}=\frac{4\theta(1-\theta)}{(3+\theta)}$$

$$P(R=3)=\frac{4\theta(1-\theta)}{3+\theta}(1-\theta)\frac{5-2}{5-2-1+2\theta}=\frac{12\theta(1-\theta)^2}{2(1+\theta)(3+\theta)}=\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(1+\theta)(3+\theta)}$$

$$P(R=4)=\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(1+\theta)(3+\theta)}(1-\theta)\frac{5-3}{5-3-1+3\theta}=\frac{12\theta(1-\theta)^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$$

$$P(R=5)=\frac{12\theta(1-\theta)^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}(1-\theta)\frac{5-4}{5-4-1+4\theta}=\frac{3(1-\theta)^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$$

Berdasarkan definisi (2.2) diperoleh :

$$E(R) = \sum_{r=1}^{5} r\Pr(R = r)$$

$$= 1.\Pr(R=1) + 2.\Pr(R=2) + 3.\Pr(R=3) + 4.\Pr(R=4) + 5.\Pr(R=5)$$

$$= 1.\theta + 2.\frac{4\theta(1-\theta)}{(3+\theta)} + 3.\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(1+\theta)(3+\theta)} + 4.\frac{12\theta(1-\theta)^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + 5.\frac{3(1-\theta)^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$$

$$= \frac{\theta(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{8\theta(1-\theta)(1+\theta)(1+3\theta)}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{18\theta(1-\theta)^2(1+3\theta)}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{48\theta(1-\theta)^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{15(1-\theta)^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$$

$$= \frac{3\theta + 13\theta^2 + 13\theta^3 + 3\theta^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{8\theta + 24\theta^2 - 8\theta^3 - 24\theta^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{18\theta + 18\theta^2 - 90\theta^3 + 54\theta^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{48\theta - 144\theta^2 + 144\theta^3 - 48\theta^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} + \frac{15 - 60\theta + 90\theta^2 - 60\theta^3 + 15\theta^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$$

$$= \frac{15 + 17\theta + \theta^2 - \theta^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} = \frac{(5-\theta)(3+\theta)(1+\theta)}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)} = \frac{5-\theta}{1+3\theta}$$

Secara ringkas hasilnya dapat disajikan pada tabel 1 sebagai berikut :

Tabel 1. Distribusi probabilitas dan nilai mean untuk variabel random IHG dengan m = 1, 2,..., 5

	m =1	m = 2	m =3	m = 4	m =5
Pr(R = 1)	1	θ	θ	θ	θ
Pr(R = 2)		$1-\theta$	$\frac{2\theta(1-\theta)}{(1+\theta)}$	$\frac{3\theta(1-\theta)}{(2+\theta)}$	$\frac{4\theta(1-\theta)}{(3+\theta)}$
Pr(R = 3)			$\frac{(1-\theta)^2}{(1+\theta)}$	$\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(2+\theta)(1+2\theta)}$	$\frac{6\theta(1-\theta)^2}{(1+\theta)(3+\theta)}$

Pr(R = 4)				$\frac{2(1-\theta)^3}{(2+\theta)(1+2\theta)}$	$\frac{12\theta(1-\theta)^3}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$
Pr(R = 5)					$\frac{3(1-\theta)^4}{(1+\theta)(1+3\theta)(3+\theta)}$
E(R)	1	2-θ	$\frac{3-\theta}{1+\theta}$	$\frac{4-\theta}{1+2\theta}$	$\frac{5-\theta}{1+3\theta}$

4.2 Model Statistik untuk Rank dengan Kovariat

Misalkan **X** adalah matrik kovariat dengan ukuran $[n \times (p+1)]$, dengan kolom pertamanya $1 = (1, 1, \ldots, 1)'$ dan $x_{i,h}$ adalah nilai pengamatan dari kovariat ke h pada obyek ke i $(h = 1,2,\ldots,p;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, dan $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ adalah vektor dari koefisien kovariat.

Karena $\Pr(R = 1) = \theta$, maka odds dari $(R = 1)$ versus $(R \neq 1)$ adalah $\frac{\theta}{(1-\theta)}$ dengan :

$$\theta = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i\beta}} = \frac{e^{\mathbf{x}_i\beta}}{1+e^{\mathbf{x}_i\beta}}, \qquad (4.5)$$

$\mathbf{x}_i\beta \in (-\infty, \infty), \theta \in [0, 1]$

4.3 Estimasi Parameter

Langkah-langkah dalam mengestimasi parameter dapat ditulis sebagai berikut:

1. Estimasi Parameter β (Parameter Model Rank dengan Kovariat) dengan MLE.

Dari definisi (2.2) didapatkan fungsi likelihood dari sampel random $R_i \sim \text{IHG}(\theta, m)$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah

$$L(\theta, r) = P(R = r_1)P(R = r_2)\ldots P(R = r_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(R = r_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left\{ c_{r_i} \theta (1-\theta)^{r_i - 1} \prod_{s=1}^{r_i - 1} (m - s - 1 + s\theta)^{-1} \right\} \qquad (4.6)$$

Selanjutnya dihitung fungsi log-likelihoodnya yaitu

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln P(R = r_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ c_{r_i} \theta (1-\theta)^{r_i - 1} \prod_{s=1}^{r_i - 1} (m - s - 1 + s\theta)^{-1} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln c_{r_i} + \ln\theta + (r_i - 1)\ln(1-\theta) + \sum_{s=1}^{r_i - 1} \ln(m - s - 1 + s\theta)^{-1} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln c_{r_i} + \ln\theta + (r_i - 1)\ln(1-\theta) - \sum_{s=1}^{r_i - 1} \ln(m - s - 1 + s\theta) \right\}$$

Dengan mensubstitusikan $\theta = \dfrac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}}$ dari persamaan (4.6) didapatkan

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln c_{r_i} + \ln\left(\frac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}}\right) + (r_i - 1)\ln\left(1 - \frac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}}\right) - \sum_{s=1}^{r_i - 1} \ln\left(m - s - 1 + s\left(\frac{e^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}}\right)\right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln c_{r_i} + \mathbf{x}_i\beta - \ln\left(1 + e^{x_i\beta}\right) + (r_i - 1)\ln\left(1 + e^{x_i\beta}\right)^{-1} - \sum_{s=1}^{r_i - 1} \ln\left(\frac{(m - s - 1)\left(1 + e^{x_i\beta}\right) + se^{x_i\beta}}{1 + e^{x_i\beta}} \right) \right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln c_{r_i}+x_i\beta-\ln\left(1+e^{x_i\beta}\right)-\left(r_i-1\right)\ln\left(1+e^{x_i\beta}\right)-\sum_{s=1}^{r_i-1}\ln\left(\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(r_i-1\right)\ln\left(1+e^{x_i\beta}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln c_{r_i}+x_i\beta-\ln\left(1+e^{x_i\beta}\right)-\sum_{s=1}^{r_i-1}\ln\left(\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)\right\} \tag{4.7}$$

Dengan menggunakan definisi 2.3 akan dicari estimator ML $\hat{\beta}$ dari parameter β pada persamaan (4.7) sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{\left(m-s-1\right)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}}{\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\} \tag{4.8}$$

dan

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{i1}-\frac{x_{i1}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{\left(m-s-1\right)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}}{\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}$$

$$\vdots \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_p}=\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ip}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{\left(m-s-1\right)x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}$$

Persamaan (4.9) secara umum dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ij}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{\left(m-s-1\right)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}}{\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\},\ j=1,2,\ldots,p \tag{4.10}$$

Estimator MLE untuk parameter β_j, j = 0, 1, ... , p diperoleh dengan cara menyamadengankan nol pada persamaan (4.9) dan (4.10), sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{\left(m-s-1\right)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}}{\left(m-s-1\right)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0 \tag{4.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ij}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0\ ,\ j=1,2,\ldots,p \qquad (4.12)$$

Persamaan (4.11) dan (4.12) tidak dapat diselesaikan secara analitis karena masih dalam bentuk fungsi implisit. Oleh karena itu diperlukan metode lain untuk menyelesaikannya, dalam kasus ini akan digunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimasi parameter β melalui Software Mathematica.

Untuk menyelesaikan dalam metode Newton-Raphson maka persamaan (4.8) sampai dengan (4.10) didifferensialkan terhadap k = 0, 1, ... , p sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{&\frac{e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\\&-\sum_{s=1}^{r_i-1}\Bigg(\frac{\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\\&-\frac{\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\Bigg)\Bigg\}\end{aligned} \qquad (4.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{&\frac{x_{i1}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i1}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\\&-\sum_{s=1}^{r_i-1}\Bigg(\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\\&-\frac{\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\Bigg)\Bigg\}\end{aligned}$$

(4.14)

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_p}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{ip}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{ip}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{ip}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

Persamaan (4.14) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{ij}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{ij}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right. \tag{4.15}$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\},$$
$$j=1,2,\ldots,p$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i1}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i1}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right. \tag{4.16}$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i1}x_{i1}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i1}x_{i1}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i1}x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}x_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

.
.
.

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_p}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i1}x_{ip}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i1}x_{ip}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i1}x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{i1}x_{ip}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{ip}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\} \tag{4.17}$$

Persamaan (4.17) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i1}x_{ij}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i1}x_{ij}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i1}x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{i1}x_{ij}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right. \tag{4.18}$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i2}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i2}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i2}e^{x_i\beta}+sx_{i2}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right. \tag{4.19}$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i2}e^{x_i\beta}+sx_{i2}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i2}x_{i1}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i2}x_{i1}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i2}x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i2}x_{i1}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i2}e^{x_i\beta}+sx_{i2}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{i1}e^{x_i\beta}+sx_{i1}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

.

. (4.20)

.

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_p}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i2}x_{ip}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i2}x_{ip}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i2}x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{i2}x_{ip}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i2}e^{x_i\beta}+sx_{i2}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ip}e^{x_i\beta}+sx_{ip}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

Persamaan (4.20) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_{i2}x_{ij}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{i2}x_{ij}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+\right.$$
$$-\sum_{s=1}^{r_i-1}\left(\frac{\left((m-s-1)x_{i2}x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{i2}x_{ij}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+\right. \quad (4.21)$$
$$\left.\left.-\frac{\left((m-s-1)x_{i2}e^{x_i\beta}+sx_{i2}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\right)\right\}$$

Berdasarkan persamaan (4.15), (4.16), dan (4.21) dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_j\partial\beta_k} = \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{ & \frac{x_{ij}x_{ik}e^{x_i\beta}\left(1+e^{x_i\beta}\right)-x_{ij}x_{ik}e^{x_i\beta}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)^2}+ \\
& -\sum_{s=1}^{r_i-1}\Bigg(\frac{\left((m-s-1)x_{ij}x_{ik}e^{x_i\beta}+sx_{ij}x_{ik}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}+ \\
& -\frac{\left((m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}\right)\left((m-s-1)x_{ik}e^{x_i\beta}+sx_{ik}e^{x_i\beta}\right)}{\left((m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}\right)^2}\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\text{dengan } j,k = 1,2,\ldots,p \tag{4.22}$$

2. Estimasi Parameter θ (Parameter Model Rank).

Dari persamaan (4.5), maka didapatkan $\hat{\theta}_i$ sebanyak n buah. Sehingga perlu mengestimasi parameter θ untuk mencari rata-rata dari $\hat{\theta}_i$, yaitu :

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n} \tag{4.23}$$

4.4 Algoritma untuk memperoleh estimator parameter θ dari Model Rank dengan Kovariat.

Untuk memperoleh estimator parameter θ dari model rank sebuah item / obyek yang diinginkan dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Memperoleh estimator parameter β
   a. Mendapatkan nilai awal $\underset{\sim}{\beta}^0$ dengan regresi logistik menggunakan SPSS berdasarkan data primer.
   b. Mendapatkan nilai astimator $\underset{\sim}{\beta}$ dengan menggunakan algoritma Newton – Raphson melalui langkah sebagai berikut :

1. Memasukkan data primer (data tingkat preferensi konsumen terhadap produk yamaha).
2. Memasukkan nilai awal parameter $\underset{\sim}{\beta}^h$ dengan mengambil h = 0 yang diperoleh melalui software SPSS, dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\underset{\sim}{\beta}^0 = \begin{pmatrix} \beta_0^0 \\ \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_P^0 \end{pmatrix}$$

3. Menghitung

$$F\left(\beta^h\right) = \begin{pmatrix} F0\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ F1\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ F2\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ . \\ . \\ . \\ Fp\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \beta_2} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \beta_p} \end{pmatrix} \qquad (4.24)$$

Dengan $\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta_0}$ dan $\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta_j}$, j = 1, 2, ... , p masing-masing dihitung seperti pada persamaan (4.8) dan (4.10)

4. Menentukan Jacobian untuk iterasi ke-h :

$$J\left(\underset{\sim}{\beta}^{j}\right)=\begin{bmatrix} F00\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F01\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F02\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & \cdots & F0p\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ F10\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F11\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F12\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & & F1p\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ F20\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F21\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & F22\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & \cdots & F2p\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\ & & & \vdots & \\ Fp0\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & Fp1\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & Fp2\left(\underset{\sim}{\beta}\right) & \cdots & Fpp\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_p} \\ \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_1\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} & & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_1\partial\beta_p} \\ \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_2\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_2\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_2\partial\beta_p} \\ & & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_p\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_p\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_p\partial\beta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_p\partial\beta_p} \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

Dengan $\frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_0}$, $\frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_0\partial\beta_j}=\frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_j\partial\beta_0}$, dan $\frac{\partial^2 l\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial\beta_j\partial\beta_k}$ untuk j, k = 1, 2,...,p masing-masing dihitung seperti pada persamaan (4.13), (4.15), dan (4.22)

5. Menghitung nilai $\underset{\sim}{\beta}^{h+1}$ dengan rumus :

$$\underset{\sim}{\beta}^{h+1} = \underset{\sim}{\beta}^{h} - J\left(\underset{\sim}{\beta}^{h}\right)^{-1} . \underset{\sim}{F}\left(\underset{\sim}{\beta}^{h}\right) \tag{4.26}$$

6. Jika diperoleh nilai $\max\left|\underset{\sim}{\beta}^{h+1} - \underset{\sim}{\beta}^{h}\right| < \varepsilon$ (dengan ε yang ditentukan), maka dilanjutkan ke langkah berikutnya, tapi jika tidak maka proses diulang ke langkah (3) dengan mengambil $h = h + 1$.

2. Memperoleh estimator parameter θ untuk tiap item dengan menggunakan software mathematica .

a. Menghitung $\hat{\theta}_i = \dfrac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}}$, , $i = 1, 2, \ldots, n$ (4.27)

b. Menghitung

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i}{n} \tag{4.28}$$

4.5 Program Mathematica Berdasarkan Algoritma

Terdapat dua bentuk program untuk software mathematica yang diperoleh berdasarkan algoritma yang telah dibuat yaitu :

1. Program untuk mendapatkan nilai estimator β (Lihat **lampiran 3b**)
2. Program untuk mendapatkan nilai estimator θ (Lihat **lampiran 3c**)

4.6 Penerapan

Penerapan model rank dengan kovariat dari variabel acak R yang berdistribusi IHG dilakukan dengan mengambil data tentang tingkat preferensi konsumen terhadap beberapa produk Yamaha. Kasus ini merupakan suatu kasus yang menarik didalam penelitian analisis preferensi. Setiap konsumen mempunyai alasan masing-masing dalam meranking beberapa produk Yamaha sesuai dengan kesukaannya. Didalam memilih produk, biasanya dipengaruhi oleh karakter dari masing-masing konsumen seperti umur, jenis kelamin, penghasilan dll. Didalam penelitian ini sebanyak $n = 100$ konsumen diminta meranking $m = 4$ jenis produk Yamaha dari yang paling disuka ($r = 1$) sampai yang terakhir disuka ($r = 4$).

Pada **tabel** (dapat dilihat pada **lampiran 2**) terdapat variabel tak bebas yaitu probabilitas terpilih pertama (y_1). Sedangkan kovariatnya adalah jenis kelamin konsumen x_2 (0 = perempuan, 1 = laki-laki), usia konsumen x_3, pendidikan terakhir x_4 (1 = SD, 2 = SLTP atau sederajat, 3 = SMU atau sederajat, 4 = akademi/D1/D2/D3, 5 = sarjana, 6 = S2, 7 = S3), pekerjaan x_5 (1 = pegawai negeri/TNI, 2 = pegawai swasta, 3 = pegawai BUMN, 4 = wiraswasta, 5 = lain-lain), dan pendapatan total x_6 (1 = < dari Rp 500.000, 2 = Rp 500.000 sampai < dari Rp 1.000.000, 3 = Rp 1.000.000 sampai < dari Rp 1.500.000, 4 = Rp 1.500.000 sampai < dari Rp 2.000.000, 5 = lebih dari Rp 2.000.000). Disamping itu, juga terdapat dua variabel tambahan yaitu hasil perkalian dari variabel dummy ($x_3 = D_1$ dan $x_4 = D_2$) dengan x_2, masing-masing variabel tambahan tersebut dinamakan x_6 dan x_7.

4.7 Analisis Data

Dalam contoh kasus ini, dilakukan analisis untuk tingkat preferensi konsumen terhadap kovariat yang telah ditentukan. Hasil analisis untuk terpilih pertama kali dari masing-masing produk Yamaha dilakukan dengan mencari nilai estimator $\hat{\theta}$ berdasarkan langkah - langkah sebagai berikut :

a. Mendapatkan nilai awal parameter $\underset{\sim}{\beta}^{0}$.

Nilai awal parameter dapat diperoleh dengan regresi logistik melalui software SPSS. Disini diambil α = 0.20. Pada output pertama (lihat **Lampiran 3a**) didapatkan variabel yang signifikan adalah umur, pendidikan, dan pekerjaan. Berikutnya dilakukan regresi kembali tanpa mengikutsertakan variabel yang tidak signifikan tersebut. Pada output kedua dengan melibatkan variabel umur, pendidikan, dan pekerjaan maka diperoleh bahwa ketiga variabel tersebut telah signifikan sehingga didapatkan nilai awal parameternya sebagai berikut :

Tabel 2 : Nilai awal estimator parameter β_k^0

β_k^0	Nilai Awal
β_0^0	0.028
β_1^0	0
β_2^0	0.131
β_3^0	0.092
β_4^0	0.103
β_5^0	0

Dengan mengambil dummy berdasarkan hasil output SPSS di atas didapatkan dua variabel tambahan yaitu hasil perkalian dari variabel dummy ($x_3 = D_1$ dan x_4

= D_2) dengan x_2, yaitu variabel x_6 dan x_7. Kemudian dilakukan regresi kembali dengan mengikut sertakan dua variabel tambahan diatas didapatkan bahwa variabel x7 signifikan. Sehingga untuk nilai awal diambil berdasarkan output ketiga SPSS untuk variabel x_2, x_4, dan x_7, didapatkan nilai awal parameternya sebagai berikut :

Tabel 3 : Nilai awal estimator parameter β_k^0

β_k^0	Nilai Awal
β_0^0	5.821
β_1^0	0
β_2^0	-0.298
β_3^0	0
β_4^0	-2.761
β_5^0	0
β_6^0	0
β_7^0	0.096

b. Mendapatkan nilai estimator $\underset{\sim}{\beta}$.

Memasukkan nilai awal parameter β_k^0 (pada **tabel 3**) ke dalam program mathematica (lihat **Lampiran 3b**) untuk memperoleh nilai estimator parameter $\hat{\beta}$. Maka, dengan menggunakan metode Newton – Raphson melalui software mathematica diperoleh nilai estimatornya sebagai berikut :

Tabel 4 : Nilai Estimator Parameter $\hat{\beta}_k$ untuk Vega-R

$\hat{\beta}_k$	Nilai Estimator
$\hat{\beta}_0$	-4.56373
$\hat{\beta}_1$	0.250871
$\hat{\beta}_2$	0.0656642
$\hat{\beta}_3$	-0.029801
$\hat{\beta}_4$	0.868652
$\hat{\beta}_5$	-0.233276
$\hat{\beta}_6$	0.00816528
$\hat{\beta}_7$	-0.016255

Untuk mengetahui kebenaran nilai estimator parameter $\hat{\beta}$ yang diperoleh melalui software mathematica, maka nilai estimator parameter yang didapat harus dimasukkan ke dalam persamaan (4.11) dan (4.12) dan nilainya harus mendekati nol. Terlihat pada **lampiran 3b** bahwa hasil perhitungan dari persamaan (4.11) dan (4.12) mendekati nol untuk semua nilai estimator parameter $\hat{\beta}_k$.

c. Mendapatkan estimator parameter θ

Berdasarkan hasil analisis dari contoh kasus tingkat preferensi konsumen terhadap keempat produk yamaha maka bentuk model regresi logistiknya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-4.56373+0.0656642x_{i2}+0.868652x_{i4}-0.016255x_{i7}}}{1+e^{-4.56373+0.0656642x_{i2}+0.868652x_{i4}-0.016255x_{i7}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (4.29)$$

Berdasarkan persamaan (4.28) dapat diperoleh nilai estimasi θ dengan software mathematica sebagai berikut :

$$\hat{\theta} = P(R=1) = 0.243133$$

Berdasarkan jenis pekerjaan konsumen, persamaan (4.29) dapat dibedakan menjadi 5 persamaan yaitu :

1. Persamaan regresi untuk kosumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai negeri / TNI

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-3.695078+0.0494092x_{i2}}}{1+e^{-3.695078+0.0494092x_{i2}}}$$

2. Persamaan regresi untuk kosumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai swasta

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-2.826426+0.0331542x_{i2}}}{1+e^{-2.826426+0.0331542x_{i2}}}$$

3. Persamaan regresi untuk kosumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai BUMN

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-1.957774+0.0169142x_{i2}}}{1+e^{-1.957774+0.0169142x_{i2}}}$$

4. Persamaan regresi untuk kosumen produk Yamaha yang bekerja sebagai wiraswasta

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-1.089122+0.000644x_{i2}}}{1+e^{-1.089122+0.000644x_{i2}}}$$

5. Persamaan regresi untuk kosumen produk Yamaha yang bekerja selain keempat kategori diatas

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-0.22047+0.0156108x_{i2}}}{1+e^{-0.22047+0.0156108x_{i2}}}$$

Berdasarkan kelima persamaan diatas untuk seorang responden berusia 30 tahun dan berprofesi sebagai pegawai negeri / TNI maka peluang memilih Vega-R sebagai pilihan pertama adalah 0.09861. Jika konsumen yang bekerja sebagai pegawai swasta mempunyai peluang sebesar 0.13802. Jika konsumen bekerja sebagai pegawai BUMN mempunyai peluang sebesar 0.18995. Jika konsumen bekerja sebagai wiraswasta mempunyai peluang sebesar 0.25544. Dan jika konsumen bekerja selain keempat kategori diatas maka mempunyai peluang sebesar 0.56165. Jadi Konsumen yang berprofesi sebagai pegawai negeri/TNI mempunyai peluang terkecil untuk memilih Vega-R sebagai pilihan pertama dan konsumen yang berprofesi selain keempat kategori diatas mempunyai peluang terbesar untuk memilih Vega-R sebagai pilihan pertama.

Berdasarkan analisis diatas dapat disimpulkan bahwa peluang Vega-R terpilih sebagai pilihan pertama untuk konsumen yang bekerja sebagai pegawai swasta adalah 1.4 lebih besar dari konsumen yang bekerja sebagai pegawai negeri/TNI. Untuk konsumen yang bekerja sebagai pegawai BUMN adalah 1.9 lebih besar dari konsumen yang bekerja sebagai pegawai negeri/TNI. Untuk konsumen yang bekerja sebagai wiraswasta adalah 2.6 lebih besar dari konsumen yang bekerja sebagai pegawai negeri/TNI. sedangkan konsumen yang bekerja selain keempat kategori diatas adalah 5.7 lebih besar dari konsumen yang bekerja sebagai pegawai negeri/TNI.

Tabel 10. Distribusi Probabilitas Rank Produk Yamaha

Jenis Produk Yamaha	**P(R = 1)**
Vega-R	0.243133
Jupiter-MX	0.24611024
Mio	0.15065867
Jupiter-Z	0.3600982
$\sum P(R = r) = 1$	1

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada Bab IV Hasil dan Pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Estimasi parameter model rank dengan kovariat berdistribusi IHG menggunakan metode MLE dapat diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut :

   a. menyelesaikan sistem persamaan berikut :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)e^{x_i\beta}+se^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{x_{ij}-\frac{x_{ip}e^{x_i\beta}}{\left(1+e^{x_i\beta}\right)}-\sum_{s=1}^{r_i-1}\frac{(m-s-1)x_{ij}e^{x_i\beta}+sx_{ij}e^{x_i\beta}}{(m-s-1)\left(1+e^{x_i\beta}\right)+se^{x_i\beta}}\right\}=0\ ,\ j=1,2,\ldots,p$$

   b. menghitung

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n},\ \text{dengan}\ \hat{\theta}_i=\frac{e^{x_i\beta}}{1+e^{x_i\beta}},\quad \text{untuk } i=1,2,\ldots,n$$

2. Dari penerapan program pada data kasusnya diperoleh bahwa nilai estimator $\hat{\theta}$ (probabilitas terpilih sebagai pilihan pertama) untuk Vega-R, Jupiter-MX, Mio, dan JupiterZ masing-masing adalah 0.243133;0.24611024; 0.15065867; dan 0.3600982.

3. Bentuk persamaan Regresi Logistik yang didapatkan dari data tingkat preferensi konsumen produk Yamaha adalah :

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-4.56373+0.0656642x_{i2}+0.868652x_{i4}-0.016255x_{i7}}}{1+e^{-4.56373+0.0656642x_{i2}+0.868652x_{i4}-0.016255x_{i7}}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Berdasarkan jenis pekerjaan konsumen, persamaan regresi logistik untuk konsumen produk Yamaha dapat dibedakan menjadi 4 persamaan, yaitu :

1. Persamaan regresi untuk konsumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai negeri / TNI

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-3.695078+0.0494092x_{i2}}}{1+e^{-3.695078+0.0494092x_{i2}}}$$

2. Persamaan regresi untuk konsumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai swasta

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-2.826426+0.0331542x_{i2}}}{1+e^{-2.826426+0.0331542x_{i2}}}$$

3. Persamaan regresi untuk konsumen produk Yamaha yang bekerja sebagai pegawai BUMN

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-1.957774+0.0169142x_{i2}}}{1+e^{-1.957774+0.0169142x_{i2}}}$$

4. Persamaan regresi untuk konsumen produk Yamaha yang bekerja sebagai wiraswasta

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-1.089122+0.000644x_{i2}}}{1+e^{-1.089122+0.000644x_{i2}}}$$

5. Persamaan regresi untuk konsumen produk Yamaha yang bekerja selain keempat kategori diatas

$$\hat{\theta}_i = \frac{e^{-0.22047+0.0156108x_{i2}}}{1+e^{-0.22047+0.0156108x_{i2}}}$$

4. Berdasarkan kelima persamaan tingkat preferensi konsumen terhadap produk Yamaha didapatkan bahwa peluang memilih Vega-R sebagai pilihan pertama untuk konsumen yang berprofesi sebagai pegawai negeri/TNI mempunyai peluang terkecil untuk memilih Vega-R sebagai pilihan pertama dan konsumen yang berprofesi selain keempat kategori diatas mempunyai peluang terbesar untuk memilih Vega-R sebagai pilihan pertama.

5.2 Saran

Pembahasan dapat dilanjutkan untuk kasus model multivariat pada data rank.

DAFTAR PUSTAKA

Agresti, A., 1990, *Categorical Data Analysis*, John Willey and Sons. Inc., Canada

Anonim, http:/130.179.64.208/intermath/136212/presentcourse/corrections/multi VariableNewtonRaphson.htm, access 13 Oktober 2006.

D'Elia A, 1999, A proposal for Ranks Statistical Modelling. In Friedl H, Berghold A, Kauermann G eds. *Statistical Modelling*. Graz, 468-71.

D'Elia A., 2002, Modelling Ranks using the Invers Hypergeometric Distribution, *Statistical Modelling : An International Journal*, Forthcoming, 3, 65-78.

Hogg, R. V. and Craig, A. T., 1995, *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition, Prentice-Hall, Inc.,New Jersey.

Hosmer and Lemeshow, 1995, *Applied Logistic Regression*, John Wiley and Sons, Inc, New York,

Kleinbaum, 1995, *Logistik Regression*, Springer-Verlog, Inc, New York.

Kutha Ardana, N.K., 2003, *Panduan Penggunaan Mathematica*, Edisi pertama, Matematika, IPB, Bogor.

Marden JI,1995, *Analyzing and Modelling Rank Data*. London : Chapmann & Hall.

Walpole, RE and Myers, 1986, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Terbitan Kedua, Institut Teknologi bandung, Bandung.

Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/covariate. access 2 November 2006

Lampiran 1

KUISIONER

No responden :……….

Responden yang terhormat,

Perkenankan saya memohon kesediaan anda untuk mengisi daftar kuisioner ini. Tujuan dari kuisioner ini adalah untuk penelitian dalam rangka penyusunan skripsi untuk memperoleh gelar sarjana di fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Airlangga.

Data dari kuisioner ini sepenuhnya akan digunakan untuk penelitian, oleh karena itu saya menjamin kerahasiaan seluruh isi/data kuisioner ini. Akhirnya atas segala bantuan serta kesediaannya saya ucapkan terima kasih.

Identitas Responden

1. Nama : ………………………………………
2. Jenis kelamin : ………………………………………
3. Alamat : ………………………………………
4. Usia : ………………………………………
5. Pendidikan Terakhir :
   a. SD
   b. SLTP atau sederajat
   c. SMU atau sederajat
   d. Akademi / D1 / D2 / D3
   e. sarjana (S1)
   f. master (S2)
   g. Doktor (S3)
6. Pekerjaan :
   a. pegawai negeri / ABRI
   b. pegawai swasta
   c. pegawai BUMN
   d. wiraswasta
   e. lain-lain, sebutkan ……………

7. Pendapatan total perbulan :
    a. kurang dari Rp 500.000
    b. Rp 500.000 hingga kurang dari Rp1.000.000
    c. Rp 1.000.000 hingga kurang dari Rp 1.500.000
    d. Rp 1.500.000 hingga kurang dari Rp 2.000.000
    e. lebih dari Rp 2.000.000

Silahkan anda urutkan dari keempat pilihan produk sepeda motor Yamaha dibawah ini dari 1 sampai 4 dengan kualifikasi sebagai berikut :

1 = urutan pertama anda suka

2 = urutan kedua anda suka

3 = urutan ketiga anda suka

4 = urutan keempat anda suka

	Jenis-jenis sepeda motor			
	Vega-R 110cc	**Jupiter-MX135lc**	**Mio**	**Jupiter-Z**
Urutkan 1 sampai 4				

Lampiran 2 : Data Tingkat Preferensi Konsumen Terhadap 4 Jenis Produk Yamaha

No	y	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	3	1	0	25	4	2	2	100	50
2	2	1	1	21	4	4	3	84	84
3	2	1	1	39	6	1	4	234	39
4	4	1	1	19	3	2	5	57	38
5	4	1	0	27	4	2	2	108	54
6	1	1	0	23	5	2	2	115	46
7	4	1	1	42	4	1	3	168	42
8	1	1	1	41	3	4	2	123	164
9	3	1	0	25	3	2	3	75	50
10	4	1	0	35	5	1	4	175	35
11	4	1	1	29	3	4	2	87	116
12	3	1	0	27	3	5	4	81	135
13	3	1	0	32	4	2	2	128	64
14	4	1	0	23	3	4	1	69	92
15	3	1	0	24	4	2	2	96	48
16	1	1	1	23	3	2	1	69	46
17	1	1	0	36	4	4	3	144	144
18	4	1	1	30	3	2	1	90	60
19	1	1	0	37	5	1	4	185	37
20	1	1	1	42	2	4	3	84	168
21	4	1	0	25	5	2	2	125	50
22	2	1	1	28	5	2	4	140	56
23	4	1	1	25	5	2	4	125	50
24	2	1	1	25	3	2	2	75	50
25	1	1	1	37	4	2	3	148	74
26	2	1	1	29	5	2	2	145	58
27	4	1	1	30	5	2	2	150	60
28	2	1	1	29	3	4	3	87	116
29	3	1	0	45	2	4	2	90	180
30	2	1	0	22	4	4	3	88	88
31	1	1	1	35	3	5	3	105	175
32	1	1	1	36	3	5	2	108	180
33	4	1	1	33	3	4	4	99	132
34	1	1	1	37	3	4	2	111	148
35	2	1	1	34	3	4	3	102	136
36	2	1	1	29	5	4	3	145	116
37	1	1	0	28	4	4	3	112	112
38	2	1	1	32	3	4	3	96	128
39	1	1	1	37	5	3	4	185	111

No	y	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
40	4	1	0	35	2	5	3	70	175
41	1	1	0	23	5	2	2	115	46
42	4	1	1	42	4	1	3	168	42
43	1	1	1	41	3	4	2	123	164
44	3	1	0	25	3	2	3	75	50
45	4	1	0	35	5	1	4	175	35
46	4	1	0	34	5	4	3	170	136
47	4	1	1	29	5	2	3	145	58
48	4	1	1	38	3	5	3	114	190
49	4	1	1	30	3	4	2	90	120
50	1	1	0	35	3	5	3	105	175
51	2	2	1	29	4	2	3	116	58
52	4	1	0	29	4	2	2	116	58
53	3	1	0	29	5	1	3	145	29
54	1	1	0	29	5	2	3	145	58
55	3	1	0	29	4	2	3	116	58
56	4	1	0	42	3	2	2	126	84
57	3	1	0	29	3	2	2	87	58
58	3	1	0	23	3	2	2	69	46
59	4	1	0	34	3	2	2	102	68
60	1	1	1	25	5	1	4	125	25
61	2	1	1	29	3	2	2	87	58
62	4	1	1	35	4	4	3	140	140
63	3	1	0	28	3	2	2	84	56
64	4	1	0	36	3	4	3	108	144
65	3	1	1	27	5	2	2	135	54
66	3	1	0	27	5	2	3	135	54
67	3	1	0	27	4	2	2	108	54
68	1	1	0	32	4	2	2	128	64
69	1	1	1	41	3	5	3	123	205
70	1	1	1	34	3	5	2	102	170
71	1	1	1	27	4	2	2	108	54
72	2	1	0	31	4	1	2	124	31
73	4	1	1	25	4	2	2	100	50
74	4	1	1	26	5	4	3	130	104
75	4	1	0	34	3	4	2	102	136
76	2	1	0	27	5	3	3	135	81
77	2	1	1	29	5	2	4	145	58
78	1	1	1	34	5	2	3	170	68
79	3	1	0	42	2	4	2	84	168
80	2	1	1	29	4	1	3	116	29
81	3	1	1	22	5	2	3	110	44
82	1	1	1	25	5	2	3	125	50

No	y	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	D_1	D_2
83	3	1	0	23	4	2	2	92	46
84	2	1	1	32	4	4	4	128	128
85	1	1	0	34	3	4	3	102	136
86	4	1	1	27	5	1	4	135	27
87	2	1	1	33	5	4	3	165	132
88	4	1	1	31	5	2	3	155	62
89	1	1	1	35	3	4	3	175	140
90	3	1	0	28	5	2	2	140	56
91	3	1	0	30	5	1	1	150	30
92	2	1	0	23	5	4	5	115	92
93	1	1	1	29	5	2	4	145	58
94	4	1	1	40	3	4	5	120	160
95	4	1	1	20	3	2	3	60	40
96	2	1	1	19	3	4	3	57	76
97	4	1	0	24	3	2	3	72	48
98	1	1	1	49	5	1	4	245	49
99	1	1	1	29	5	2	3	145	58
100	2	1	1	31	3	4	3	93	93

Keterangan :

y_1 : pertama disuka

dengan pilihan sebagai berikut :

1 = Vega-R

2 = Jupiter-MX

3 = Mio

4 = Jupiter-Z

x_0 : 1

x_1 : jenis kelamin konsumen

0 = perempuan

1 = laki-laki

x_2 : usia konsumen

x_3 : pendidikan terakhir konsumen ($x_3 = D_1$)

1 = SD

2 = SLTP atau sederajat

3 = SMU atau sederajat

4 = akademi/D1/D2/D3

5 = sarjana (S1)

6 = master (S2)

7 = Doktor (S3)

x_4 : pekerjaan konsumen ($x_4 = D_2$)

1 = pegawai negeri/TNI

2 = pegawai swasta

3 = pegawai BUMN

4 = wiraswasta

5 = lain-lain

x_5 : pendapatan total konsumen

1 = kurang dari Rp 500.000

2 = Rp 500.000 hingga kurang dari Rp 1.000.000

3 = Rp 1.000.000 hingga kurang dari Rp 1.500.000

4 = Rp 1.500.000 hingga kurang dari Rp 2.000.000

5 = lebih dari Rp 2.000.000

x_6 : Perkalian dari variabel dummy D_1 dengan x_2

x_7 : Perkalian dari variabel dummy D_2 dengan x_2

Lampiran 3 : Estimasi parameter untuk pertama disuka terhadap 4 jenis produk Yamaha

a. Menentukan Nilai awal β^0 dengan regresi logistik menggunakan SPSS Versi-12

Output ke-1 :

Parameter Estimates

terpilih pertama kali		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% Confidence Interval for Exp(B) Lower Bound	Upper Bound
vega-R	Intercept	-6,071	2,731	4,944	1	,026			
	SEX	,360	,572	,395	1	,530	1,433	,467	4,398
	UMUR	7,953E-02	,049	2,670	1	,102	1,083	,984	1,191
	PENDDKAN	,784	,404	3,765	1	,052	2,191	,992	4,837
	PKERJAAN	,491	,277	3,147	1	,076	1,634	,950	2,811
	PDAPATAN	-,451	,372	1,464	1	,226	,637	,307	1,322
Jupiter-MX	Intercept	-2,911	2,698	1,165	1	,281			
	SEX	1,237	,710	3,034	1	,082	3,446	,856	13,868
	UMUR	-9,03E-02	,056	2,630	1	,105	,914	,819	1,019
	PENDDKAN	,608	,404	2,262	1	,133	1,836	,832	4,055
	PKERJAAN	,553	,309	3,188	1	,074	1,738	,947	3,187
	PDAPATAN	,124	,358	,119	1	,730	1,131	,561	2,284
Mio	Intercept	5,457	2,993	3,324	1	,068			
	SEX	-2,438	,862	8,009	1	,005	8,733E-02	1,614E-02	,473
	UMUR	-7,29E-02	,062	1,404	1	,236	,930	,824	1,049
	PENDDKAN	-,273	,453	,363	1	,547	,761	,313	1,849
	PKERJAAN	-,352	,361	,949	1	,330	,703	,346	1,428
	PDAPATAN	-,432	,435	,986	1	,321	,649	,277	1,523

Output ke-2 :

Parameter Estimates

terpilih pertama kali		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% Confidence Interval for Exp(B) Lower Bound	Upper Bound
vega-R	Intercept	-6,021	2,735	4,845	1	,028			
	UMUR	7,054E-02	,047	2,283	1	,131	1,073	,979	1,176
	PENDDKAN	,616	,365	2,846	1	,092	1,852	,905	3,788
	PKERJAAN	,440	,269	2,661	1	,103	1,552	,915	2,632
Jupiter-MX	Intercept	-1,750	2,689	,423	1	,515			
	UMUR	-8,39E-02	,056	2,246	1	,134	,920	,824	1,026
	PENDDKAN	,595	,384	2,407	1	,121	1,814	,855	3,848
	PKERJAAN	,535	,296	3,260	1	,071	1,707	,955	3,052
Mio	Intercept	3,922	2,461	2,540	1	,111			
	UMUR	-7,03E-02	,052	1,805	1	,179	,932	,841	1,033
	PENDDKAN	-,334	,381	,770	1	,380	,716	,339	1,510
	PKERJAAN	-,408	,322	1,606	1	,205	,665	,354	1,250

Output ke -3 dengan Dummy :

Parameter Estimates

terpilih pertama kali		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% Confidence Interval for Exp(B) Lower Bound	Upper Bound
vega-R	Intercept	5,821	7,847	,550	1	,458			
	SEX	,173	,593	,085	1	,771	1,189	,372	3,800
	UMUR	-,298	,244	1,486	1	,223	,743	,460	1,198
	PENDDKAN	-,338	1,323	,065	1	,799	,713	5,336E-02	9,537
	PKERJAAN	-2,761	1,770	2,434	1	,119	6,321E-02	1,968E-03	2,030
	PDAPATAN	-,424	,370	1,315	1	,251	,655	,317	1,351
	D1	3,971E-02	,041	,928	1	,335	1,041	,960	1,128
	D2	9,561E-02	,052	3,323	1	,068	1,100	,993	1,219
Jupiter-MX	Intercept	-6,766	8,009	,714	1	,398			
	SEX	1,480	,780	3,598	1	,058	4,391	,952	20,258
	UMUR	4,604E-02	,269	,029	1	,864	1,047	,619	1,772
	PENDDKAN	,195	1,551	,016	1	,900	1,215	5,814E-02	25,406
	PKERJAAN	2,634	1,354	3,784	1	,052	13,934	,980	198,060
	PDAPATAN	,109	,369	,088	1	,767	1,116	,542	2,298
	D1	1,108E-02	,053	,044	1	,834	1,011	,912	1,121
	D2	-7,08E-02	,043	2,679	1	,102	,932	,856	1,014
Mio	Intercept	3,068	13,125	,055	1	,815			
	SEX	-2,718	,937	8,415	1	,004	6,599E-02	1,051E-02	,414
	UMUR	1,279E-02	,459	,001	1	,978	1,013	,412	2,493
	PENDDKAN	2,712	2,432	1,243	1	,265	15,056	,128	1770,829
	PKERJAAN	-3,308	2,610	1,606	1	,205	3,660E-02	2,197E-04	6,099
	PDAPATAN	-,240	,484	,246	1	,620	,786	,305	2,030
	D1	-,101	,087	1,327	1	,249	,904	,762	1,073
	D2	8,602E-02	,086	1,008	1	,315	1,090	,921	1,289

b. Menentukan nilai estimator $\hat{\beta}$ dengan menggunakan algoritma Newton - Raphson

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`

y={3,2,2,4,4,1,4,1,3,4,4,3,3,4,3,1,1,4,1,1,4,2,4,2,1,2,4,2,3,2,1,1
,4,1,2,2,1,2,1,4,1,4,1,3,4,4,4,4,4,1,2,4,3,1,3,4,3,3,4,1,2,4,3,4,3
,3,3,1,1,1,1,2,4,4,4,2,2,1,3,2,3,1,3,2,1,4,2,4,1,3,3,2,1,4,4,2,4,1
,1,2}

x={{1,0,25,4,2,2,100,50},{1,1,21,4,4,3,84,84},{1,1,39,6,1,4,234,39
},{1,1,19,3,2,5,57,38},{1,0,27,4,2,2,108,54},{1,0,23,5,2,2,115,46}
,{1,1,42,4,1,3,168,42},{1,1,41,3,4,2,123,164},{1,0,25,3,2,3,75,50}
,{1,0,35,5,1,4,175,35},{1,1,29,3,4,2,87,116},{1,0,27,3,5,4,81,135}
,{1,0,32,4,2,2,128,64},{1,0,23,3,4,1,69,92},{1,0,24,4,2,2,96,48},{
1,1,23,3,2,1,69,46},{1,0,36,4,4,3,144,144},{1,1,30,3,2,1,90,60},{1
,0,37,5,1,4,185,37},{1,1,42,2,4,3,84,168},{1,0,25,5,2,2,125,50},{1
,1,28,5,2,4,140,56},{1,1,25,5,2,4,125,50},{1,1,25,3,2,2,75,50},{1,
1,37,4,2,3,148,74},{1,1,29,5,2,2,145,58},{1,1,30,5,2,2,150,60},{1,
1,29,3,4,3,87,116},{1,0,45,2,4,2,90,180},{1,0,22,4,4,3,88,88},{1,1
,35,3,5,3,105,175},{1,1,36,3,5,2,108,180},{1,1,33,3,4,4,99,132},{1
,1,37,3,4,2,111,148},{1,1,34,3,4,3,102,136},{1,1,29,5,4,3,145,116}
,{1,0,28,4,4,3,112,112},{1,1,32,3,4,3,96,128},{1,1,37,5,3,4,185,11
1},{1,0,35,2,5,3,70,175},{1,0,23,5,2,2,115,46},{1,1,42,4,1,3,168,4
2},{1,1,41,3,4,2,123,164},{1,0,25,3,2,3,75,50},{1,0,35,5,1,4,175,3
5},{1,0,34,5,4,3,170,136},{1,1,29,5,2,3,145,58},{1,1,38,3,5,3,114,
190},{1,1,30,3,4,2,90,120},{1,0,35,3,5,3,105,175},{1,1,29,4,2,3,11
6,58},{1,0,29,4,2,2,116,58},{1,0,29,5,1,3,145,29},{1,0,29,5,2,3,14
5,58},{1,0,29,4,2,3,116,58},{1,0,42,3,2,2,126,84},{1,0,29,3,2,2,87
,58},{1,0,23,3,2,2,69,46},{1,0,34,3,2,2,102,68},{1,1,25,5,1,4,125,
25},{1,1,29,3,2,2,87,58},{1,1,35,4,4,3,140,140},{1,0,28,3,2,2,84,5
6},{1,0,36,3,4,3,108,144},{1,1,27,5,2,2,135,54},{1,0,27,5,2,2,135,
54},{1,0,27,4,2,3,108,54},{1,0,32,4,2,2,128,64},{1,1,41,3,5,3,123,
205},{1,1,34,3,5,2,102,170},{1,1,27,4,2,3,108,54},{1,0,31,4,1,4,12
4,31},{1,1,25,4,2,3,100,50},{1,1,26,5,4,2,130,104},{1,0,34,3,4,3,1
02,136},{1,0,27,5,3,3,135,81},{1,1,29,5,2,3,145,58},{1,1,34,5,2,2,
170,68},{1,0,42,2,4,4,84,168},{1,1,29,4,1,3,116,29},{1,1,22,5,2,3,
110,44},{1,1,25,5,2,3,125,50},{1,0,23,4,2,2,92,46},{1,1,32,4,4,4,1
28,128},{1,0,34,3,4,3,102,136},{1,1,27,5,1,4,135,27},{1,1,33,5,4,3
,165,132},{1,1,31,5,2,3,155,62},{1,1,35,3,4,3,175,140},{1,0,28,5,2
,2,140,56},{1,0,30,5,1,1,150,30},{1,0,23,5,4,5,115,92},{1,1,29,5,2
,4,145,58},{1,1,40,3,4,5,120,160},{1,1,20,3,2,3,60,40},{1,1,19,3,4
,3,57,76},{1,0,24,3,2,3,72,48},{1,1,49,5,1,4,245,49},{1,1,29,5,2,3
,145,58},{1,1,31,3,4,3 ,93,93}};MatrixForm[x]

β={5.821,0,-0.298,0,-2.761,0,0,0.096};MatrixForm[β]
```

$$\begin{pmatrix} 5.821 \\ 0 \\ -0.298 \\ 0 \\ -2.761 \\ 0 \\ 0 \\ 0.096 \end{pmatrix}$$

```
F0[β_] := Sum[(1- (Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
        + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
      (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
        + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) -
    Sum[((m - s - 1) (Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
          x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) +
       s Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
          + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
     ((m - s - 1)
        (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
           + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) +
      (s Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
           + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]])),
     {s, 1, y[[i]] - 1}]), {i, 1, n}]
```

(The sums are printed as $\sum_{i=1}^{n}$ and $\sum_{s=1}^{y[[i]]-1}$.)

```
betawal={5.821,0,-0.298,0,-2.761,0,0,0.096}

betawal
 {5.821,0,-0.298,0,-2.761,0,0,0.096}

n=100
 100

m=4
 4

F0[betawal]
41.3241
```

```
F1[β_] :=
 n
 Σ (x[[i, 2]] -
i=1
   (x[[i, 2]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
       x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
    (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
       + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) -
   y[[i]]-1
     Σ   (((m - s - 1) x[[i, 2]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] +
    s=1
          x[[i, 4]] β[[4]] + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]]
          + x[[i, 8]] β[[8]]] +
       s x[[i, 2]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
          x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
     ((m - s - 1) (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
            x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) +
       s Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
          + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]))
   )

F1[betawal]
  24.2118

F2[β_] :=
 n
 Σ (x[[i, 3]] -
i=1
   (x[[i, 3]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
       x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
    (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
       + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) -
   y[[i]]-1
     Σ   (((m - s - 1) x[[i, 3]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] +
    s=1
          x[[i, 4]] β[[4]] + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]]
          + x[[i, 8]] β[[8]]] +
       s x[[i, 3]] Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
          x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) /
     ((m - s - 1) (1 + Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]] +
            x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]) +
       s Exp[β[[1]] + x[[i, 2]] β[[2]] + x[[i, 3]] β[[3]] + x[[i, 4]] β[[4]]
          + x[[i, 5]] β[[5]] + x[[i, 6]] β[[6]] + x[[i, 7]] β[[7]] + x[[i, 8]] β[[8]]]))
   )

F2[betawal]
  1318.7
```

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F3}[\beta\_] := \\
&\sum_{i=1}^{n}\Bigg(x[[i,4]] - \\
&\quad (x[[i,4]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) / \\
&\quad (1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] \\
&\qquad + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) - \\
&\quad \sum_{s=1}^{y[[i]]-1} (((m-s-1)\,x[[i,4]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + \\
&\qquad\quad x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] \\
&\qquad\quad + x[[i,8]]\,\beta[[8]]] + \\
&\qquad s\,x[[i,4]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) / \\
&\qquad ((m-s-1)\,(1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) + \\
&\qquad s\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] \\
&\qquad\quad + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]))\Bigg)
\end{aligned}
$$

```
F3[betawal]
165.519
```

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F4}[\beta\_] := \\
&\sum_{i=1}^{n}\Bigg(x[[i,5]] - \\
&\quad (x[[i,5]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) / \\
&\quad (1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + \\
&\qquad x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) - \\
&\quad \sum_{s=1}^{y[[i]]-1} (((m-s-1)\,x[[i,5]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + \\
&\qquad\quad x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]] + \\
&\qquad s\,x[[i,5]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) / \\
&\qquad ((m-s-1)\,(1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) + \\
&\qquad s\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + \\
&\qquad\quad x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]))\Bigg)
\end{aligned}
$$

```
F4[betawal]
120.759
```

$$
\begin{aligned}
&F5[\beta\_] := \\
&\sum_{i=1}^{n}\Bigg(x[[i,6]] - \\
&\quad (x[[i,6]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) \,/ \\
&\quad (1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + \\
&\qquad x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) - \\
&\quad \sum_{s=1}^{y[[i]]-1} (((m-s-1)\,x[[i,6]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + \\
&\qquad\quad x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]] + \\
&\qquad s\,x[[i,6]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) \,/ \\
&\qquad ((m-s-1)\,(1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) + \\
&\qquad s\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + \\
&\qquad\quad x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]))\Bigg)
\end{aligned}
$$

```
F5[betawal]
  112.541
```

$$
\begin{aligned}
&F6[\beta\_] := \\
&\sum_{i=1}^{n}\Bigg(x[[i,7]] - \\
&\quad (x[[i,7]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) \,/ \\
&\quad (1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] \\
&\qquad + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) - \\
&\quad \sum_{s=1}^{y[[i]]-1} (((m-s-1)\,x[[i,7]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + \\
&\qquad\quad x[[i,4]]\,\beta[[4]] + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] \\
&\qquad\quad + x[[i,8]]\,\beta[[8]]] + \\
&\qquad s\,x[[i,7]]\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\quad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) \,/ \\
&\qquad ((m-s-1)\,(1 + \mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] + \\
&\qquad\qquad x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]) + \\
&\qquad s\,\mathrm{Exp}[\beta[[1]] + x[[i,2]]\,\beta[[2]] + x[[i,3]]\,\beta[[3]] + x[[i,4]]\,\beta[[4]] \\
&\qquad\quad + x[[i,5]]\,\beta[[5]] + x[[i,6]]\,\beta[[6]] + x[[i,7]]\,\beta[[7]] + x[[i,8]]\,\beta[[8]]]))\Bigg)
\end{aligned}
$$

```
F6[betawal]
  5271.25
```

```
F7[β_] :=
 n
 ∑ (x[[i,8]] -
i=1
  (x[[i,8]] Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] + x[[i,4]] β[[4]] +
      x[[i,5]] β[[5]] + x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]]) /
   (1 + Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] + x[[i,4]] β[[4]] + x[[i,5]] β[[5]] +
      x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]]) -
  y[[i]]-1
   ∑   (((m-s-1) x[[i,8]] Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] +
  s=1
        x[[i,4]] β[[4]] + x[[i,5]] β[[5]] + x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]] +
      s x[[i,8]] Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] + x[[i,4]] β[[4]] +
        x[[i,5]] β[[5]] + x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]]) /
    ((m-s-1) (1 + Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] + x[[i,4]] β[[4]] +
          x[[i,5]] β[[5]] + x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]]) +
      s Exp[β[[1]] + x[[i,2]] β[[2]] + x[[i,3]] β[[3]] + x[[i,4]] β[[4]] + x[[i,5]] β[[5]] +
        x[[i,6]] β[[6]] + x[[i,7]] β[[7]] + x[[i,8]] β[[8]]])))

F7[betawal]
  3783.73

Clear[β]

FindRoot[{F0[β]==0,F1[β]==0,F2[β]==0,F3[β]==0,F4[β]==0,F5[β]==0,F6[β]
==0,F7[β]==0},{β,betawal}]

{β→{-4.56373,0.250871,0.0656642,-0.029801,0.868652,-0.233276,0.00816528,-0.016255}}

β={-4.56373,0.250871,0.0656642,-0.029801,0.868652,-
  0.233276,0.00816528,-0.016255}
 {-4.56373,0.250871,0.0656642,-0.029801,0.868652,-0.233276,
  0.00816528,-0.016255}
```

F0[β]

-1.5099×10^{-14}

F1[β]

-1.35447×10^{-14}

F2[β]

-4.70735×10^{-13}

F3[β]

-6.57252×10^{-14}

F4[β]

-4.55191×10^{-14}

```
F3[β]
  -6.57252×10^-14
F4[β]
  -4.55191×10^-14
F5[β]
  -3.9968×10^-14

F6[β]
 -1.54188×10^-12
 F7[β]
 -1.20082×10^-12
Tetha[i_]:=1/(1+Exp[β[[1]]+x[[i,2]]β[[2]]+x[[i,3]]β[[3]]+x[[i,4]]β[[4]]+x[[i,5]]β[[5]]+x[[i,6]]β[[6]]+x[[i,7]]β[[7]]+x[[i,8]]β[[8]]])(Exp[β[[1]]+x[[i,2]]β[[2]]+x[[i,3]]β[[3]]+x[[i,4]]β[[4]]+x[[i,5]]β[[5]]+x[[i,6]]β[[6]]+x[[i,7]]β[[7]]+x[[i,8]]β[[8]]])
```

$$\text{Tetha} = \frac{\sum_{i=1}^{100} \text{Tetha}[i]}{100}$$

0.243133

SENTRAL YAMAHA
MBUL JAYA MAKMUR
Jl. TRUNOJOYO 122 Telp. (0351) 497222
MADIUN

Touching Your Heart
YAMAHA

Madiun, Oktober 2006

Nomor : -

Lampiran : -

Perihal : Surat keterangan telah
melakukan penelitian / riset

Saya yang bertanda tangan dibawah ini Pemimpin Dealer Yamaha "Timbul Jaya Makmur" Madiun menerangkan bahwa :

Nama : Nely Puspitaningrum

Nim : 080212564

Fakultas : MIPA

Jurusan : Matematika

Telah melakukan penelitian / riset pada Dealer Yamaha "Timbul Jaya Makmur" Madiun dengan judul skripsi "Analisis Preferensi dengan Pemodelan Rank yang Berdistribusi Invers Hypergeometrik" mulai 5 Juli 2006 sampai dengan 27 Oktober 2006.

Demikian surat keterangan ini saya buat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Pimpinan Dealer

No. 122 Madiun
(0351) 497222

Fery Kurniawan