

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai konstruksi reduksi orde model sistem linier waktu diskrit dengan metode SPA dan penerapannya pada masalah konduksi panas serta hasil dari simulasi dengan menggunakan aplikasi MATLAB R2009a.

4.1. Reduksi Orde Model Sistem Linier Waktu Diskrit dengan Metode SPA

Misalkan diberikan suatu sistem linier waktu diskrit (A; B; C; D) berorde n yang stabil asimtotis, terkendali dan terobservasi sebagai berikut.

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (4.2)$$

untuk $k = 0; 1; 2; \dots$, dengan $x(k) \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (state), $u(k) \in \mathbb{R}^p$ dinamakan vektor input, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ dinamakan vektor output dan A; B; C; D masing masing adalah matriks konstan real yang ukurannya bersesuaian.

Selanjutnya, persamaan (4.1) dan persamaan (4.2) akan dinotasikan dengan sistem (A; B; C; D). Fungsi transfer dari sistem (A; B; C; D) dinotasikan $G(z)$ dan didefinisikan sebagai

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (4.3)$$

Oleh karena sistem (A; B; C; D) merupakan sistem yang stabil asimtotis, terkendali dan terobservasi maka berdasarkan Teorema (2.25) dan Teorema (2.27), sistem (A; B; C; D) mempunyai gramian keterkendalian P dan gramian keterobservasian Q yang definit positif dan didefinisikan sebagai berikut.

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^0 (A^0)^k > 0 \quad (4.4)$$

dan

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} (A^0)^k C^0 C A^k > 0: \quad (4.5)$$

Setelah didefinisikan sistem (A; B; C; D) berorde n beserta sifat-sifatnya, langkah pertama yang harus dilakukan untuk reduksi orde model dengan metode SPA adalah membentuk realisasi setimbang dari sistem (A; B; C; D). Berikut ini akan diuraikan realisasi setimbang dari sistem (A; B; C; D).

4.1.1. Realisasi Setimbang Sistem

Realisasi setimbang adalah realisasi yang mentransformasi suatu sistem menjadi sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keterobservasian yang sama dan merupakan matriks diagonal. Misalkan diberikan matriks transformasi $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yang nonsingular dan memenuhi

$$x(k) = T x_{\sim}(k) \quad (4.6)$$

dengan $x(k)$ adalah variabel keadaan dari sistem (A; B; C; D), dan $x_{\sim}(k)$ adalah variabel keadaan dari sistem (A; B; C; D) yang telah setimbang. Berdasarkan persamaan (4.6) maka transformasi untuk variabel keadaan $x(k+1)$ dapat ditulis sebagai

$$x_{\sim}(k+1) = T^{-1} x(k+1) \quad (4.7)$$

Selanjutnya, jika persamaan (4.6) dan persamaan (4.7) disubstitusikan ke dalam sistem (A; B; C; D) diperoleh

$$x_{\sim}(k+1) = T^{-1} A T x_{\sim}(k) + T^{-1} B u(k) \quad (4.8)$$

$$y_{\sim}(k) = C T x_{\sim}(k) + D u(k): \quad (4.9)$$

Dengan demikian, diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ berikut.

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \quad (4.10)$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k) \quad (4.11)$$

dengan

$$\tilde{A} = T^{-1}AT; \tilde{B} = T^{-1}B; \tilde{C} = CT; \tilde{D} = D: \quad (4.12)$$

Selanjutnya, untuk menentukan gramian keterkendalian dan keterobservasian sistem setimbang $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (4.12) ke dalam persamaan (4.4) dan persamaan (4.5) sehingga didapatkan gramian keterkendalian sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ sebagai berikut.

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (T^{-1}AT)^k (T^{-1}B)(T^{-1}B)^0 ((T^{-1}AT)^0)^k \quad (4.13)$$

$$\tilde{P} = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^0 (A^0)^k \right) (T^{-1})^0 \quad (4.14)$$

$$\tilde{P} = T^{-1} P (T^{-1})^0 \quad (4.15)$$

dan gramian keterobservasian sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ sebagai berikut.

$$\tilde{Q} = \sum_{k=0}^{\infty} ((T^{-1}AT)^0)^k (CT)^0 (CT)(T^{-1}AT)^k \quad (4.16)$$

$$\tilde{Q} = (T^0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^0)^k C^0 C A^k \right) T \quad (4.17)$$

$$\tilde{Q} = T^0 Q T: \quad (4.18)$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan matriks transformasi $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sebagai

$$T = R^0 U: \quad (4.19)$$

dengan $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ dengan $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i(P, Q)}$, U matriks uniter dan R

matriks yang memenuhi $P = R^0 R$ dan $RQR^0 = U \quad {}^2U^0$. Dari sini diperoleh

$$T^{-1} P (T^{-1})^0 = ({}^2U^0 (R^1)^0) (R^0 R) ({}^2U^0 (R^0)^1)^0 = \quad (4.20)$$

$$T^0 Q T = (R^0 U {}^2U^1)^0 Q (R^0 U {}^2U^1) = \quad (4.21)$$

sehingga

$$\tilde{P} = \tilde{Q} = : \quad (4.22)$$

Dengan demikian, sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ merupakan sistem yang setimbang dengan gramian keterkendalian \tilde{P} dan gramian keterobservasian \tilde{Q} dengan $\tilde{P} = \tilde{Q} = .$

4.1.2. Reduksi Orde Model

Setelah diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ dengan gramian keterkendalian dan keterobservasian , selanjutnya sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ dipartisi

sesuai dengan gramian = diag($\tilde{1}; \tilde{2}$) dengan $\tilde{1} = \text{diag}(\tilde{1}; \tilde{2}; \dots ; \tilde{r})$ dan $\tilde{2} = \text{diag}(\tilde{r}+1; \tilde{r}+2; \dots ; \tilde{n})$. Dengan demikian, realisasi sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$

$$\begin{matrix} x_{\tilde{1}}(k+1) \\ x_{\tilde{2}}(k+1) \end{matrix}$$

dapat ditulis sebagai

$$\begin{matrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} x_{\tilde{1}}(k) \\ x_{\tilde{2}}(k) \end{matrix} + \begin{matrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{matrix} u(k) = y(k) = \begin{matrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{matrix} \begin{matrix} x_{\tilde{1}}(k) \\ x_{\tilde{2}}(k) \end{matrix} + d u(k) \quad (4.24)$$

$\tilde{A}_{11} \sim \tilde{A}_{22}$ dengan $x_{\tilde{1}}(k) \in \mathbb{R}^r$ dan $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ bersesuaian dengan gramian \tilde{P}_1 , dan $x_{\tilde{2}}(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$ dan $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ bersesuaian dengan gramian \tilde{P}_2 .

Selanjutnya, didefinisikan $\tilde{x}_1(k + 1)$ sebagai partisi mode lambat dan $\tilde{x}_2(k + 1)$ sebagai partisi mode cepat. Berikutnya, diambil partisi mode cepat sama dengan nol atau $\tilde{x}_2(k + 1) = 0$ sehingga dari persamaan (4.23) dan persamaan (4.24) diperoleh

$$\tilde{x}_1(k + 1) = A_{11}\tilde{x}_1(k) + A_{12}\tilde{x}_2(k) + B_1u(k) \quad (4.25)$$



$$0 = A_{21}x_{\sim 1}(k) + A_{22}x_{\sim 2}(k) + B_2u(k) \quad (4.26)$$

$$y_{\sim}(k) = C_1x_{\sim 1}(k) + C_2x_{\sim 2}(k) + Du(k) \quad (4.27)$$

Kemudian, dengan mengasumsikan $A_{\sim 22}$ adalah matriks nonsingular, dari persamaan

(4.26) didapatkan

$$x_{\sim 2}(k) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_{\sim 1}(k) - A_{22}^{-1}B_2u(k) \quad (4.28)$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (4.28) ke dalam persamaan (4.25) dan persamaan (4.27) sehingga diperoleh

$$x_{\sim 1}(k+1) = A_{11}x_{\sim 1}(k) + A_{12}(-A_{22}^{-1}A_{21}x_{\sim 1}(k) - A_{22}^{-1}B_2u(k)) + B_1u(k) \quad (4.29)$$

$$y_{\sim}(k) = C_1x_{\sim 1}(k) + C_2(-A_{22}^{-1}A_{21}x_{\sim 1}(k) - A_{22}^{-1}B_2u(k)) + Du(k); \quad (4.30)$$

sehingga didapat

$$x_{\sim 1}(k+1) = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_{\sim 1}(k) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u(k) \quad (4.31)$$

$$y_{\sim}(k) = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_{\sim 1}(k) + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u(k); \quad (4.32)$$

Dengan demikian, diperoleh sistem tereduksi berorde r yang bersesuaian dengan gramian \tilde{P}_1 sebagai berikut.

$$x_{\sim 1}(k+1) = A_{11}x_{\sim 1}(k) + B_1u(k) \quad (4.33)$$

$$y_{\sim}(k) = C_1x_{\sim 1}(k) + Du(k) \quad (4.34)$$

untuk $k = 0; 1; 2; \dots$, dengan $x_{\sim 1}(k) \in \mathbb{R}^r$, $u(k) \in \mathbb{R}^s$, dan $y_{\sim}(k) \in \mathbb{R}^t$ dengan

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ \tilde{B}_1 &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ \tilde{C}_1 &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\ \tilde{D} &= D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{aligned}$$

4.1.3. Kestabilan Sistem Tereduksi

Pada sistem yang telah direduksi dengan metode SPA, sifat kestabilan yang berlaku pada sistem semula juga berlaku pada sistem yang telah direduksi. Berikut akan dibuktikan kestabilan sistem yang telah direduksi.

Sebelum diberikan pembuktian mengenai kestabilan sistem tereduksi dengan metode SPA, berikut diberikan lemma kestabilan sistem tereduksi dengan metode pemotongan setimbang sebagai dasar dari pembuktian yang akan diberikan.

Lemma 4.1 Misalkan $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ adalah sistem yang setimbang dengan gramian $\tilde{P} = \text{diag}(\tilde{p}_1; \tilde{p}_2)$, maka sistem tereduksi dengan metode pemotongan setimbang $(\tilde{A}_{11}; \tilde{B}_1; \tilde{C}_1; \tilde{D}_1)$ merupakan sistem yang setimbang dengan gramian \tilde{P}_1 dan stabil asimtotis.

Adapun teorema kestabilan sistem tereduksi dengan metode SPA diberikan sebagai berikut.

Teorema 4.2 Jika sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ merupakan sistem yang stabil asimtotis, maka sistem tereduksi dengan metode SPA $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ juga merupakan sistem yang stabil asimtotis.

Bukti:

Diketahui bahwa sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ merupakan sistem yang stabil asimtotis sehingga $\rho(\tilde{A}) < 1$. Berdasarkan Lemma 4.1, jika pada sistem $(\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C}; \tilde{D})$ diterapkan reduksi orde model dengan metode pemotongan setimbang maka

akan dihasilkan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{11}; \tilde{B}_1; \tilde{C}_1; \tilde{D}_1)$ yang stabil asimtotis.

Dengan demikian, $\rho(\tilde{A}_{11}) < 1$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema (2.14) didapatkan bahwa nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{11}^{-1} adalah $\frac{1}{\rho(\tilde{A}_{11})}$. Misalkan didefinisikan

$$\hat{A}_{11}^{-1} = \tilde{A}_{11}^{-1} \quad (4.35)$$

dengan menerapkan formula matriks inversi pada Teorema (2.16) ke dalam persamaan (4.35) didapatkan

$$\hat{A}_{11}^{-1} = \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21}^{-1} \quad (4.36)$$

didapatkan $\hat{A}_{11}^{-1} = (\tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21}^{-1})^{-1}$ yang ekuivalen dengan

$$\hat{A}_{11}^{-1} = \tilde{A}_{11}^{-1} \quad (4.37)$$

Dari persamaan (4.35) diperoleh

$$j_i(\hat{A}_{11}) = j_i(\tilde{A}_{11}) = \frac{1}{j_i(\tilde{A}_{11})} :$$

Sedangkan dari persamaan (4.37) diperoleh

$$j_i(\hat{A}_{11}) = j_i(\tilde{A}_{11}) < 1 :$$

Dengan demikian, terbukti bahwa sistem $(A; B; C; D)$ merupakan sistem yang stabil asimtotis. ■

4.2. Studi Kasus

Pada subbab ini akan dibahas penerapan reduksi orde model sistem linier waktu diskrit dengan metode SPA pada masalah konduksi panas. Model konduksi panas yang berupa Persamaan Diferensial Parsial didiskritkan menggunakan metode beda hingga. Berikut akan diberikan model konduksi panas beserta hasil simulasinya menggunakan aplikasi MATLAB R2009a.

4.2.1. Model Konduksi Panas

Misalkan sebatang kawat lurus dengan panjang l , diberi sumber panas disalah satu ujungnya dengan koefisien konduksi panas k . Dengan menotasikan t sebagai waktu dan x sebagai posisi sepanjang kawat serta $U(x; t)$ sebagai panas yang

mengalir pada kawat pada saat t di posisi x . Persamaan konduksi panas dalam bentuk persamaan diferensial parsial didefinisikan sebagai berikut.

$$U_t = \kappa U_{xx} \quad (4.38)$$

dengan $0 < x < l$; $t > 0$, U_t adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap waktu dan U_{xx} adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap posisi sepanjang kawat. Selanjutnya untuk memudahkan penulisan, $U(x; t)$ akan dinotasikan dengan U .

Diasumsikan bahwa sisi-sisi batang kawat dan salah satu ujung sisi dari batang kawat terisolasi sempurna, serta pada sisi ujung yang lain diberi sumber panas yang dipertahankan konstan U untuk semua $t > 0$. Hal ini berarti bahwa persamaan konduksi panas tersebut mempunyai syarat awal dan syarat batas sebagai berikut.

$$U_x(0; t) = 0 \quad (4.39)$$

$$U(l; t) = 0 \quad (4.40)$$

$$U(x; 0) = f(x); \quad (4.41)$$

untuk $0 < x < l$ dan $0 < t < \infty$. Konduksi panas pada batang kawat beserta kondisi syarat batas dan syarat awal dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.1 Konduksi Panas pada Batang Kawat

Selanjutnya, dilakukan pendiskritan persamaan konduksi panas dengan metode beda hingga yang terdiri dari metode beda mundur dan metode beda

maju. Terdapat dua pendiskritan yakni pendiskritan terhadap posisi dan pendiskritan terhadap waktu. Pendiskritan terhadap posisi dilakukan dengan metode beda maju sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_i = \frac{u(x_{i+1}; t) - u(x_i; t)}{\Delta x} \quad (4.42)$$

Kemudian dilakukan

pendiskritan beda mundur dari persamaan (4.42) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_i = \frac{1}{\Delta x^2} (u(x_{i-1}; t_k) - 2u(x_i; t_k) + u(x_{i+1}; t_k)) \quad (4.43)$$

Selanjutnya, pendiskritan terhadap waktu dilakukan dengan metode beda pusat sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{i;k} = \frac{u(x_i; t_{k+1}) - u(x_i; t_k)}{\Delta t} \quad (4.44)$$

Dengan demikian, persamaan (4.38) dapat ditulis sebagai

$$\frac{u(x_i; t_{k+1}) - u(x_i; t_k)}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u(x_{i-1}; t_k) - 2u(x_i; t_k) + u(x_{i+1}; t_k)) \quad (4.45)$$

Dari sini diperoleh

$$u(x_i; t_{k+1}) = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u(x_{i-1}; t_k) - 2u(x_i; t_k) + u(x_{i+1}; t_k)) + u(x_i; t_k) \quad (4.46)$$

Misalkan $\Delta x = \Delta x$, i menunjukkan posisi dan k menyatakan waktu. Persamaan (4.46) dapat ditulis menjadi

$$u_{i;k+1} = (u_{i-1;k} - 2u_{i;k} + u_{i+1;k}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + u_{i;k} \quad (4.47)$$

Selanjutnya dengan memilih $x(k) = (U_1; U_2; \dots; U_{N-1})^T$ sebagai vektor keadaan, $y(k) = (y_1; y_2; \dots; y_p)^T$ sebagai vektor pengukuran. Sistem yang berbentuk persamaan beda hingga pada persamaan (4.46) dapat ditulis dalam bentuk sistem ruang keadaan yang invarian terhadap waktu sebagai berikut.

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{4.48}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{4.49}$$

dengan matriks-matriks A dan B dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & \vdots & 7 \\ 6 & \vdots & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

dan C matriks koefisien yang ukurannya bersesuaian.

4.2.2. Hasil Simulasi

Pada simulasi ini diambil $\Delta t = 0:45$ dan panjang kawat dipartisi menjadi 15 bagian. Dari simulasi diperoleh sistem awal (A; B; C; D) dengan matriks-matriks sistemnya sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0:55 & 0:45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0:45 & 0:1 & 0:45 \end{bmatrix}$$

6
6 0 0 0 0 0 0 0:45 0:1 7
7

4

5



dari sistemsetimbang (A; B; C; D) diperoleh matriks dari sistem tereduksi (A_r; B_r; C_r; D_r) sebagai berikut.

$$A_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0.995 & 0.016 & 0.025 & 0.1 & 0.129 & 0.05 & 0.143 \\ 6 & 0.145 & 0.016 & 0.068 & 0.035 & 0.070 & 0.019 & 0.018 & 0.036 \\ 6 & 0 & 0 & 0.958 & 0.0004 & 0.022 & 0.033 & 0.012 & 0.035 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0.886 & 0.027 & 0.063 & 0.020 & 0.064 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.782 & 0.027 & 0.006 & 0.025 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.650 & 0.051 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.496 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0.0449 \\ 0.268 \\ 0.074 \\ 0.164 \\ 0.09 \\ 0.173 \\ 0.452 \\ 0.251 \end{bmatrix}$$

C_r = [0.237 0.541 0.214 0.499 0.106 0.439 0.286 0.192] ; D_r = [0] dengan A 2

R^{8 8} , B 2 R^{8 1} C 2 R^{1 8} dan D 2 R^{1 1} .

Adapun nilai eigen matriks A_r adalah sebagai berikut.

Tabel 4.2 Nilai Eigen Matriks A_r

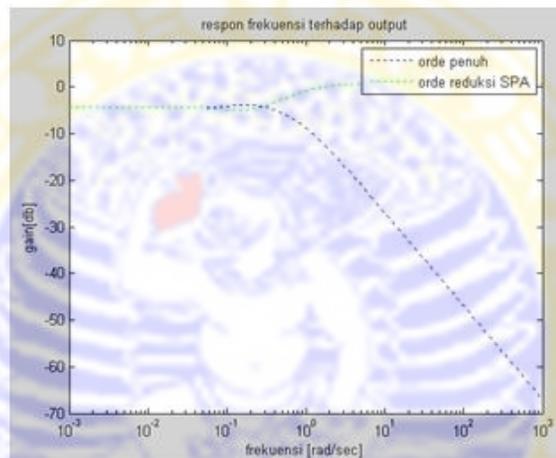
i	λ _i
1	0.145
2	0.995
3	0.958
4	0.886
5	0.782
6	0.352
7	0.650
8	0.496

Dengan demikian, sistem tereduksi (A_r; B_r; C_r; D_r) merupakan sistem yang

stabil asimtotis dan rank matriks keterkendalian dan keterobservasian sistem $(A_r; B_r; C_r; D_r)$ sama dengan 8 sehingga sistem $(A_r; B_r; C_r; D_r)$ juga bersifat terkendali dan terobservasi.

Selanjutnya, respon frekuensi dari sistem setimbang $(A; B; C; D)$ terhadap

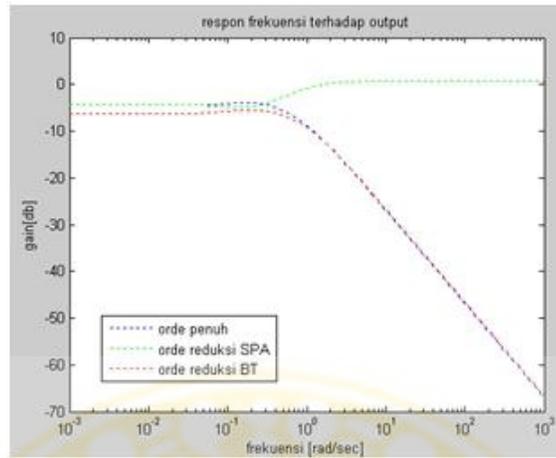
sistem $(A_r; B_r; C_r; D_r)$ diberikan pada gambar berikut. Respon frekuensi adalah representasi dari respon sistem terhadap input sinusoidal pada frekuensi yang bervariasi.



Gambar 4.2 Respon Frekuensi Orde Penuh dan Orde Tereduksi SPA Terhadap Output

Dari Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa sistem berorde penuh dan sistem yang telah direduksi dengan metode SPA mempunyai respon frekuensi yang cenderung sama pada saat frekuensi rendah. Sedangkan pada frekuensi tinggi sistem berorde penuh dan sistem tereduksi dengan metode SPA mempunyai respon frekuensi yang cenderung berbeda.

Adapun Perbandingan respon frekuensi antara sistem berorde penuh, sistem tereduksi dengan metode SPA, dan sistem tereduksi dengan metode pemotongan setimbang(BT) diberikan pada gambar berikut.



Gambar 4.3 Respon Frekuensi dari Orde Tereduksi SPA dan BT Terhadap Output

Dari Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa pada frekuensi rendah sistem berorde penuh mempunyai respon frekuensi yang cenderung sama dengan sistem yang direduksi dengan metode SPA. Sedangkan pada frekuensi tinggi sistem berorde penuh mempunyai respon frekuensi yang cenderung sama dengan sistem yang direduksi dengan metode BT.