

**PEMODELAN BOD DAN COD DENGAN PENDEKATAN REGRESI  
NONPARAMETRIK BIRESPON PADA DATA LONGITUDINAL  
BERDASARKAN ESTIMATOR POLINOMIAL LOKAL  
(STUDI KASUS: DAERAH AIR MENGALIR SUNGAI SURABAYA  
SEBAGAI BAHAN BAKU AIR PDAM)**

**SKRIPSI**



**PUTRI PANGESTIKA ANASTITI**

**PROGRAM STUDI S1 STATISTIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS AIRLANGGA**

**2016**

ADLN - PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA

**PEMODELAN COD DAN BOD DENGAN PENDEKATAN REGRESI  
NONPARAMETRIK BIRESPON PADA DATA LONGITUDINAL  
BERDASARKAN ESTIMATOR POLINOMIAL LOKAL**

**(STUDI KASUS: DAERAH AIR MENGALIR SUNGAI SURABAYA  
SEBAGAI BAHAN BAKU AIR PDAM)**

**SKRIPSI**

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains**

**Bidang Statistika di Fakultas Sains dan Teknologi**

**Universitas Airlangga**

**Oleh**

**PUTRI PANGESTIKA ANASTITI**

**NIM. 081211832018**

**Tanggal Lulus : 12 Agustus 2016**

**Disetujui Oleh:**

**Pembimbing I**



**Dr. Nur Chamidah, M.Si**  
**NIP. 19720602 199802 2 001**

**Pembimbing II**



**Drs. Eko Tjahjono, M.Si**  
**NIP. 19600706 198601 1 001**

ADLN - PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA  
LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI

**Judul** : **Pemodelan COD dan BOD dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Birespon Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal (Studi Kasus: Daerah Air Mengalir Sungai Surabaya Sebagai Bahan Baku Air PDAM)**

**Penyusun** : **Putri Pangestika Anastiti**

**NIM** : **081211832018**

**Pembimbing I** : **Dr. Nur Chamidah, M.Si**

**Pembimbing II** : **Drs. Eko Tjahjono, M.Si**

**Tanggal Ujian** : **12 Agustus 2016**

Disetujui oleh:

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**



**Dr. Nur Chamidah, M.Si**  
NIP. 19720602 199802 2 001

**Drs. Eko Tjahjono, M.Si**  
NIP. 19600706 198601 1 001

Mengetahui :

**Ketua Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga**

**Koordinator Program Studi  
S-1 Statistika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Airlangga**



**Badrus Zaman, S.Kom., M.Cs**  
NIP. 19780126 200604 1 001



**Drs. Eko Tjahjono, M.Si**  
NIP. 19600706 198601 1 001

## **PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI**

Skripsi ini tidak dipublikasikan, namun tersedia di perpustakaan dalam lingkungan Universitas Airlangga, diperkenankan untuk dipakai sebagai referensi kepustakaan, tetapi pengutipan harus seijin penulis dan harus menyebutkan sumbernya sesuai kebiasaan ilmiah. Dokumen skripsi ini merupakan hak milik Universitas Airlangga.

ADLN - PERPUSTAKAAN UNIVERSITAS AIRLANGGA  
SURAT PERNYATAAN TENTANG ORIGINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Putri Pangestika Anastiti  
NIM : 081211832018  
Program Studi : S1 Statistika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Jenjang : Sarjana (S1)

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan kegiatan plagiat dalam skripsi saya yang berjudul:

Pemodelan BOD dan COD dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Birespon Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal

*(Studi Kasus : Daerah Air Mengalir Sungai Surabaya Sebagai Bahan Baku Air PDAM)*

Apabila suatu saat nanti terbukti melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, Agustus 2016



Putri Pangestika Anastiti  
NIM. 081211832018

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul, “Pemodelan COD dan BOD dengan Pendekatan regresi Nonparametrik Birespon Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal (Studi Kasus: Daerah Air Mengalir Sungai Surabaya Sebagai Bahan Baku Air PDAM)”.

Skripsi ini telah disusun dengan maksimal dan tidak sedikit hambatan yang dialami, berkat petunjuk dan saran yang diberikan oleh semua pihak skripsi ini dapat selesai dengan baik. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua tercinta, Bapak Estiwiyono dan Ibu Kasiati yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang serta dukungan dan memberikan cinta yang tulus dan ikhlas kepada penulis sejak kecil.
2. Ibu Dr. Nur Chamidah, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I dan Bapak Drs. Eko Tjahjono, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang dengan sabar memberikan nasehat, bimbingan serta dukungan selama pembuatan skripsi.
3. Bapak Drs. H. Sediono, M. Si selaku dosen wali, segenap dosen Program Studi Statistika, serta staff Departemen Matematika.
4. Sahabat „REDAKSI“: Milasari, Inesia meitasari, Arina Dini, Risky Febrina, Andini Elsa, Dian Nastiti dan Intan Utami yang telah menjadi sahabat seperjuangan dan seperjalanan selama kuliah.
5. Sahabat SD hingga SMA yang selalu menyemangati saya dan memberikan banyak bantuan.
6. Pejuang September Statistika, khususnya Manja, Muiz, dan Adit yang telah menghabiskan waktu dan usaha bersama dalam mengerjakan skripsi selama semester 8 ini.
7. Statistika UNAIR 2012 yang telah banyak memberikan pengalaman dan kenangan indah.

Semoga segala bantuan yang telah diberikan mendapat balasan yang berlipat ganda dari Allah SWT. Demi perbaikan selanjutnya, saran dan kritik akan penulis terima dengan senang hati. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis, dan bagi kita semua dalam rangka menambah wawasan pengetahuan dan pemikiran.

Surabaya, Agustus 2016

Penulis

Putri Pangestika Anastiti, 2016. **Pemodelan COD dan BOD dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Birespon Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal (*Studi Kasus: Daerah Air Mengalir Sungai Surabaya Sebagai Bahan Baku Air PDAM*)**. Skripsi ini dibawah bimbingan Dr. Nur Chamidah, M.Si. dan Drs. Eko Tjahjono, M.Si., Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga, Surabaya.

---

### ABSTRAK

Fungsi Sungai Surabaya adalah sebagai penyedia air bersih, komunikasi, dan sebagai konservasi alam. Disamping itu, fungsi fitral Sungai Surabaya pada kota Surabaya sebagai bahan baku air PDAM Surabaya. Peranannya sebagai tempat penampungan limbah industri dan limbah domestik menyebabkan penurunan kualitas air di bagian hilir Sungai Surabaya. Pada tahun 2015 sebanyak 62% pencemaran sungai di Surabaya diakibatkan oleh limbah domestik rumah tangga, sedangkan 38% sisanya limbah industri dan limbah lainnya. Beberapa variabel kualitas air yang digunakan dalam menentukan tercemarnya sungai, sesuai dengan peraturan Dewan Pemerintahan Jawa Timur nomor 2 tahun 2002, yaitu antara lain *Dissolve Oxygen (DO)*, *Chemical Oxygen Demand (COD)*, dan *Biochemical Oxygen Demand (BOD)*. BOD dan COD merupakan variabel kualitas air yang juga dapat dipantau dari kadar DO yang ada di aliran sungai. Skripsi ini menggunakan regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal berdasarkan estimator polinomial lokal. Skripsi ini menggunakan 8 subjek Daerah Air Mengalir yaitu, Dam Cangu bridge, Dam Pening bridge, Dam Jrebeng bridge, Dam Cangkir Tambangan, Dam Bambe Tambangan, Dam Jembatan Sepanjang, Dam Gunungsari, dan Dam Jagir. Setiap subyek memiliki 12 observasi yang diteliti dari Januari sampai Desember 2015. Model terbaik dengan menggunakan estimator polinomial lokal dengan orde pada BOD yaitu satu dan COD yaitu dua. Hasil estimasi menjelaskan bahwa. Ketika DO menurun maka BOD dan COD akan meningkat hal ini berarti ekosistem yang ada di sungai menjadi tidak sehat. Pada Dam Jagir observasi BOD dan COD menjauhi kurva estimasi, hal ini disebabkan karena Jagir merupakan bagian hilir dari Sungai Surabaya yang menjadi tempat penumpukan limbah yang berasal dari hulu sungai.

**Kata Kunci:** *Sungai Surabaya, Birespon, Data Longitudinal, Polinomial Lokal, Dissolve Oxygen (DO), Biochemical Oxygen Demand (BOD), Chemical Oxygen Demand (COD)*



Putri Pangestika Anastiti, 2016. **Modeling of BOD and COD with Bi Response Nonparametric Regression approach for Longitudinal Data Based Polynomial Local Estimator (Case Study: Surabaya River's Watersheds as Raw materials water of PDAM)**. This *Skripsi* is under advised by Dr. Nur Chamidah, M.Si. and Drs. Eko Tjahjono, M.Si., Mathematics Departemen, Faculty of Science and Technology, Airlangga University, Surabaya.

---

### ABSTRACT

Surabaya river functions are source of clean water, communication, and for conservation of nature. Vital function Surabaya river for this city is as the raw water materials for PDAM Surabaya. The role of this river as aquifer of industrial waste and domestic waste cause a decrease of the quality. In 2015 river pollution in Surabaya 62% cause by household domestic waste, and another 38% caused by industrial waste and others. Determination of pollution in river can predict by some parameter. Based of peraturan Dewan Pemerintahan Jawa Timur nomor 2 tahun 2002 there are Dissolve Oxygen (DO), Chemical Oxygen Demand (COD), and Biochemical Oxygen Demand (BOD). COD and BOD are the water quality variables that can be measured on DO in watersheds. In this study used regression nonparametric biresponse for longitudinal data based on polynomial local estimator. Polynomial local have an advantage over than other estimator to estimates the function at any point so the model obtained closer to the actual data patterns and this estimator does not require large amounts of data. This study used 8 subyek, there are Dam Canggü bridge, Dam Pening bridge, Dam Jrebeng bridge, Dam Cangkir Tambangan, Dam Bambe Tambangan, Dam Jembatan Sepanjang, Dam Gunungsari, and lasty Dam Jagir. In each subject there are 12 observation start from January until December 2015. The result of this study is the best model that obtained based polinomyal local estimator with order for BOD is one and COD is two. Estimation result explains three things about Surabaya river. First, when DO numbers are decrease then BOD and COD numbers will increase. Second, BOD and COD has positive correlation, because BOD estimation curve and COD estimation curve conjunction to down when DO numbers increase. Third are subject observation BOD and COD of Jagir is move away from estimation result curve, this is due to Jagir as downstream of Surabaya river became pileup's place from headwater that in Mojokerto until Dam Gunungsari.

**Keywords:** *Surabaya River, Biresponse, Longitudinal Data, Polynomial Local, Dissolve Oxygen (DO), Biochemical Oxygen Demand (BOD), Chemical Oxygen Demand (COD)*

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	ii
ABSTRAK .....	iv
<i>ABSTRACT</i> .....	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR GAMBAR .....	viii
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR LAMPIRAN.....	x
DAFTAR SINGKATAN .....	xi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan.....	7
1.4 Manfaat.....	8
1.5 Batasan Masalah.....	8
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Wilayah Sungai Brantas (WS Brantas) .....	9
2.1.1 Sungai Surabaya .....	10
2.2 Pencemaran Air .....	11
2.3 <i>Biochemical Oxygen Demand</i> (BOD) .....	11
2.4 <i>Chemical Oxygen Demand</i> (COD).....	12
2.5 <i>Dissolve Oxygen</i> (DO).....	13
2.6 Aljabar Matriks.....	14
2.7 Data Longitudinal.....	18
2.8 Regresi Nonparametrik.....	19
2.9 Regresi Birespon .....	20
2.10 Fungsi Kernel .....	21
2.11 Pemilihan <i>Bandwidth</i> Optimal .....	22
2.12 Estimator Polinomial Lokal untuk Satu Variabel Respon.....	23

2.13 Regresi Nonparametrik dengan Estimator Polinomial Lokal untuk Birespon.....	24
2.14 Regresi Nonparametrik Polinomial Lokal Birespon pada Data Longitudinal .....	26
2.15 Heteroskedastisitas dan Homoskedastisitas.....	27
2.16 Uji Korelasi <i>Pearson</i> .....	29
2.17 <i>Weighted Least Square</i> .....	30
2.18 OSS – R .....	31
BAB III METODE PENELITIAN	
3.1 Data dan Sumber Data .....	34
3.2 Variabel Penelitian.....	35
3.3 Langkah Analisis Data.....	35
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1 Deskriptif Variabel – Variabel yang Digunakan dalam Menentukan Kualitas Air Sungai.....	39
4.2 Estimasi COD dan BOD Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Birespon pada Data Longitudinal .....	42
4.23 Analisis dan Intepretasi Kandungan COD dan BOD Pada Sungai Surabaya dengan Menggunakan Regresi Nonparametrik Birespon Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal pada Data Longitudinal .....	49
BAB V KESIMPULAN	
5.1 Kesimpulan .....	56
5.2 Saran .....	57
DAFTAR PUSTAKA .....	58
LAMPIRAN.....	59

### DAFTAR GAMBAR

<b>Nomor</b>	<b>Judul Gambar</b>	<b>Halaman</b>
4.1	BOD pada Setiap Dam di Sungai Surabaya	39
4.2	COD pada Setiap Dam di Sungai Surabaya	40
4.3	DO pada Setiap Dam di Sungai Surabaya	41
4.4	Plot Observasi BOD dan DO	42
4.5	Plot Observasi COD dan DO	43
4.6	Plot <i>Bandwidth</i> terhadap GCV	45
4.7	Plot Hasil Estimasi dan Data Observasi BOD pada Dam di Sungai Surabaya	50
4.8	Plot Hasil Estimasi dan Data Observasi COD pada Dam di Sungai Surabaya	50
4.9	Hasil Estimasi BOD dan COD	51
4.10	Estimasi dan Observasi BOD dan COD pada masing – masing Dam di Sungai Surabaya	52 - 54

**DAFTAR TABEL**

<b>Nomor</b>	<b>Judul Tabel</b>	<b>Halaman</b>
3.1	Daftar daerah Air Mengalir Sungai Surabaya	34
3.2	Variable Penelitian	35
4.1	Kombinasi Orde Polinomial dan <i>bandwidth</i> Optimal	45

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Nomor</b>	<b>Judul Lampiran</b>
1	Data COD dan BOD Pada Dam Sungai Surabaya
2	Daftar Aliran Sungai Brantas
3	Program Membuat Plot BOD terhadap DO dan COD terhadap DO
4	Program Uji Korelasi pearson
5	Program Estimasi Model Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Terboboti
6	Output OSS – R Uji Korelasi Pearson
7	Output OSS-R Penentuan <i>bandwidth</i> Optimal
8	Output OSS – R Estimasi Model Regresi Nonparametrik Birespon pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Terboboti
9	Hasil Estimasi BOD dan COD pada Dam di Sungai Surabaya
10	Model estimasi BOD dan COD pada Dam di Sungai Surabaya

## DAFTAR SINGKATAN

<b>Singkatan</b>	<b>Keterangan</b>
BLH	Badan Lingkungan Hidup
BOD	<i>Biochemical Oxygen Demand</i>
BTKL	Balai Teknik Kesehatan Lingkungan
COD	<i>Chemical Oxygen Demand</i>
DAM	Daerah Air Mengalir
DAS	Daerah Aliran Sungai
DO	<i>Dissolve Oxygen</i>
GCV	<i>Generalized Cross validation</i>
PJT	Perum Jasa Tirta
PU	Pekerjaan Umum
WS	Wilayah Sungai

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **1.1 Latar Belakang**

Sungai merupakan bagian atau komponen yang sangat dibutuhkan oleh manusia, sehingga jika sungai tidak tersedia atau tersedia dengan kualitas yang buruk maka akan menjadi hal yang buruk bagi manusia. Sungai sendiri memiliki fungsi yang sangat vital, yaitu sebagai penyedia bahan baku kebutuhan air minum, sumber air bersih, komunikasi, dan juga konservasi alam. Sungai Surabaya sendiri merupakan bagian dari Daerah Aliran Sungai (DAS) Brantas yang mengalir 42 km dari Dam Jembatan canggu Mojokerto, melewati Gresik, dan berakhir di Dam Jagir Surabaya (Perum Jasa Tirta I, 2015). Peranannya sebagai tempat penampungan limbah industri dan limbah domestik menyebabkan penurunan kualitas air di bagian hilir Sungai Surabaya. Permasalahan sungai ini perlu mendapat perhatian khusus dikarenakan Sungai Surabaya merupakan sumber bahan baku dari PDAM (Perusahaan Daerah Air Minum) Kota Surabaya. Perum Jasa Tirta I (PJT I) merupakan Badan Usaha Milik Negara (BUMN) yang memiliki tugas untuk menyelenggarakan pemanfaatan umum atas air dan sumber-sumber air yang bermutu dan memadai bagi pemenuhan hajat hidup orang banyak, serta melaksanakan tugas-tugas tertentu yang diberikan pemerintah dalam pengolahan daerah aliran sungai (Hidayati, 2012). PJT I secara rutin melaksanakan kegiatan pemantauan dan



evaluasi kualitas sungai dan waduk, air buangan limbah industri, domestik (saluran sanitasi umum, rumah sakit dan hotel setiap bulan dan disaat waktu-waktu tertentu) (PJT I, 2015). Selain itu peran PJT adalah sebagai penyedia dan pengelolah Sungai Surabaya menjadi bahan baku air bersih PDAM untuk didistribusikan kepada masyarakat.

Tercemarnya sungai saat ini membutuhkan pemetaan kualitas dari pemerintah atau badan air untuk mendapatkan rekomendasi pengolahan solusi dari permasalahan ini. PJT I (2015) menyatakan bahwa sebanyak 62% pencemaran sungai di Surabaya diakibatkan oleh limbah domestik rumah tangga, sedangkan 38% sisanya limbah industri dan limbah lainnya. Menurut Kementrian Pekerjaan Umum dan Perumahan Rakyat (2011) Sungai Surabaya merupakan sumber utama air baku IPAM PDAM Kota Surabaya. Disamping sebagai sumber utama air baku, juga digunakan sebagai saluran drainase dan *outlet* saluran pembuangan limbah pertanian, domestik, dan industri. Limbah industri yang masuk ke Sungai Surabaya sudah sangat memprihatinkan kondisinya. Perkembangan industri dan pertumbuhan penduduk di Jawa Timur khususnya di daerah aliran Sungai Surabaya berdampak terhadap penurunan kualitas sungai. Adanya kegiatan industri dan domestik yang melakukan kegiatannya di sepanjang daerah aliran sungai Sungai Surabaya, diperkirakan akan menambah beban pencemaran Sungai Surabaya (Purwatiningsih, 2005). Lebih dari 100 pabrik skala kecil dan besar semuanya membuang limbahnya ke Sungai Surabaya. Menurut BTKL (Balai Teknik Kesehatan Lingkungan) injeksi pencemaran terbesar di Sungai Surabaya berasal dari Sungai Tengah

daerah Driyorejo dimana banyak industri besar membuang limbahnya. Disamping itu bahan pencemar yang terbawa dari aliran Sungai Brantas dan dari aliran anak sungai (Sungai Tengah) yang dikategorikan tercemar dan bermuara di Sungai Surabaya juga sangat berperan dalam penurunan kualitas air Sungai Surabaya (Purwatiningsih, 2005).

Penentuan tercemarnya kualitas sungai ditentukan oleh analisa tiap parameter yang ditentukan. Ada beberapa variabel kualitas air yang digunakan dalam menentukan tercemarnya sungai, sesuai dengan peraturan Dewan Pemerintahan Jawa Timur nomor 2 tahun 2002, yaitu antara lain *Dissolve Oxygen* (DO), *Chemical Oxygen Demand* (COD), dan *Biochemical Oxygen Demand* (BOD). BOD dan COD merupakan variabel kualitas air yang juga dapat dipantau dari kadar DO yang ada di aliran sungai (BTKL, 2014). Oleh karena itu parameter uji dalam penelitian ini adalah kandungan BOD, COD, dan DO yang ada di beberapa titik pemantauan Sungai Surabaya, yaitu di Jembatan Canggus, Jembatan Pening, Jembatan Jrebeng, Cangkir Tambangan, Bambe Tambangan, Jembatan Sepanjang, Bendungan Gunung Sari, dan Jagir. BOD dan COD diklasifikasikan sebagai variabel respon sedangkan DO sebagai faktor yang mempengaruhi BOD dan COD.

Dalam penelitian Choiruddin dan Sutikno (2012) dengan judul *Pemodelan Indikator Pencemaran Biological Oxygen Demand di Sungai Surabaya Menggunakan Pendekatan Spatial-Temporal Weighted Regression (STWR)* menyatakan bahwa Sungai Surabaya merupakan sungai yang cukup memprihatinkan karena hasil penelitian terhadap beberapa zat di Sungai

Surabaya seperti *Biological Oxygen Demand* (BOD), *Chemical Oxygen Demand* (COD), dan *Total Suspended Solid* (TSS) yang telah melebihi batas toleransi. Tercemarnya sungai saat ini menjadi permasalahan serius hingga dibutuhkan pemetaan kualitas dari sungai sendiri untuk mendapatkan rekomendasi pengelolaan yang menjadi solusi dari permasalahan ini.

Hidayati (2012) dalam penelitiannya Identifikasi Kualitas dan Peramalan DO, BOD, dan COD Air Sungai Surabaya dengan menggunakan analisis *Single Exponential Smoothing* mendapat hasil bahwa kadar DO, BOD, dan COD di Jagir berturut – turut tergolong tercemar dari triwulan I 2006 hingga triwulan III tahun 2012. Sampai saat ini belum ditemukan adanya penelitian tentang pencemaran sungai dengan menggunakan lebih dari satu respon. Oleh karena itu peneliti ingin menguji apakah COD dan BOD memiliki keterkaitan yang saling berpengaruh satu sama lain dalam hal respon dengan DO sebagai variabel prediktor.

Penelitian tentang COD, BOD, dan DO ini umumnya menggunakan data longitudinal dibandingkan dengan *cross-sectional*. Hal ini dikarenakan data *cross-sectional* memiliki kekurangan yaitu ketidakmampuan dalam mengetahui karakteristik dari suatu hal dalam keberlanjutan waktu tertentu. Penyelesaian yang dilakukan dalam mengatasi kekurangan data *cross-sectional* yaitu dengan data longitudinal. Data longitudinal digunakan dalam pembentukan fungsi perkembangan suatu subyek sehingga dapat diketahui perubahan intrasubyek dan urutan perkembangan (Azizah, 2016). Beberapa penelitian sungai dengan menggunakan data longitudinal telah dilakukan oleh

Haryu (2015) untuk meneliti kondisi ekosistem Sungai Serayu, namun penelitian tersebut menggunakan penjelasan statistik deskriptif tentang Sungai Serayu dalam penelitiannya tanpa menjelaskan tiap faktor yang ada.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menjelaskan seberapa besar pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon adalah analisis regresi. Analisis regresi paling sederhana dan banyak dilakukan adalah regresi parametrik, yang memiliki syarat berbagai asumsi yang harus dipenuhi dimana salah satunya adalah bentuk kurva regresi yang harus diketahui, bisa berbentuk linier, kuadratik, kubik, dan lain – lain. Namun apabila kurva regresi tidak diketahui bentuknya, maka analisis regresi parametrik terlihat dipaksakan jika tetap digunakan, maka analisis regresi nonparametrik lebih disarankan (Setyawan, 2012). Regresi nonparametrik dilakukan apabila peneliti tidak mengasumsikan bentuk tertentu dari kurva regresi, sehingga memberikan fleksibilitas lebih tinggi dan bentuk kurva regresi diasumsikan halus (*smooth*). Beberapa contoh estimator regresi nonparametrik yang banyak digunakan antara lain *histogram*, *kernel*, *spline*, *polynomial*, deret *fourier*, *wavelets*, lokal linier, MARS, dan lain sebagainya (Setyawan, 2012).

Estimator polinomial lokal merupakan salah satu pendekatan regresi nonparametrik yang menggunakan teknik *smoothing*. Polinomial Lokal merupakan suatu pendekatan yang fleksibel dan efisien dalam metode statistika karena memiliki orde yang akan menjadi derajat polinomial yang sesuai bagi fungsi regresi (Andrianto, 2014). Kelebihan menggunakan estimator polinomial lokal adalah secara teori mudah dianalisis dan estimator

tersebut tidak mengabaikan korelasi antara tiap pengamatan dalam objek yang sama (Bayyinah, 2016). Estimator Polinomial lokal dapat diperoleh dengan optimasi *Weighted Least Square* (WLS), untuk pengestimasi parameter penghalus atau *bandwidth* menggunakan metode *Generalized Cross Validation* (GCV) (Utami, 2014).

Penelitian dengan menggunakan regresi nonparametrik birespon masih belum banyak dilakukan sampai saat ini, antara lain oleh Wulandari (2014) dan Setyawan (2012) menggunakan analisis regresi nonparametrik birespon parameter *spline* dengan lebih dari satu variabel prediktor. Khoirunnisa (2011) melakukan penelitian tentang analisis regresi nonparametrik birespon pada data tekanan darah siastolik dan diastolik.

Berdasarkan uraian di atas maka, pada skripsi ini membahas tentang krisis pencemaran yang terjadi di Sungai Surabaya menggunakan pendekatan regresi nonparametrik birespon berdasarkan estimator polinomial lokal dengan variabel respon COD dan BOD dan variabel prediktor DO.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dalam latar belakang, maka rumusan masalah yang diperoleh adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana mendeskripsikan variabel – variabel kualitas air yang digunakan dalam menentukan tercemarnya suatu sungai?
2. Bagaimana memodelkan hubungan antara variabel prediktor yang diduga berpengaruh terhadap pencemaran Sungai Surabaya yang

diukur melalui kandungan *Chemical Oxygen demand* (COD) dan *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dengan pendekatan regresi nonparametrik birespon berdasarkan estimator polinomial lokal pada data longitudinal menggunakan program pada OSS-R?

3. Bagaimana interpretasi hasil estimasi kandungan COD dan BOD pada Sungai Surabaya dengan menggunakan regresi nonparametrik birespon pada data Sungai Surabaya berdasarkan estimator polinomial lokal?

### 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diperoleh diatas, maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Mendeskripsikan variabel – variabel yang digunakan dalam menentukan kualitas air sungai.
2. Memodelkan hubungan antara variabel prediktor yang diduga berpengaruh terhadap pencemaran Sungai Surabaya yang diukur melalui kandungan *Chemical Oxygen demand* (COD) dan *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dengan menggunakan pendekatan regresi nonparametrik birespon dengan estimator polinomial lokal pada data longitudinal dengan menggunakan program pada OSS-R.
3. Mengetahui intepretasi hasil estimasi kandungan COD dan BOD pada Sungai Surabaya dengan menggunakan regresi nonparametrik birespon pada data Daerah air mengalir Sungai Surabaya berdasarkan estimator polinomial lokal.

#### **1.4 Manfaat**

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini diantaranya :

1. Menambah wawasan dalam pengetahuan statistika khususnya dalam regresi nonparametrik birespon berdasarkan estimator polinomial lokal.
2. Memberikan pandangan baru akan ilmu statistika dibidang kehayatan dan aplikasinya.
3. Memberikan masukan kepada PJT dalam mengukur COD dan BOD dengan cara yang lebih mudah yaitu dengan hasil pemodelan BOD dan COD dengan predictor DO agar nantinya dapat menindaklanjuti pencemaran yang ada di Sungai Surabaya.
4. Memberikan masukan dan saran kepada PDAM mengenai kondisi Sungai Surabaya, agar dapat memberikan air bersih yang berkualitas kepada warga Kota Surabaya.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Mengacu pada rumusan masalah yang ada, maka ruang lingkup dalam penulisan skripsi ini dibatasi pada penggunaan model regresi nonparametrik birespon hanya dengan satu variabel predictor. Pengamatan diambil dari 8 titik sungai yang ada di Surabaya sesuai dengan Laporan Tahunan Perum Jasa Tirta I.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai tinjauan pustaka terkait sungai, variabel kualitas air sungai dan metode yang digunakan dalam skripsi.

#### **2.1 Wilayah Sungai Brantas (WS Brantas)**

Wilayah Sungai (WS) Brantas merupakan wilayah sungai strategis nasional dan menjadi kewenangan Pemerintah Pusat berdasarkan Peraturan PU No. 11A Tahun 2006. WS Sungai Brantas merupakan Ws terbesar kedua di Pulau Jawa, terletak di Propinsi Jawa Timur pada 110°30' BT sampai 112°55' BT dan 7°01' LS sampai 8°15' LS. Sungai Brantas mempunyai panjang ± 320 km ± dan memiliki luas *catchment area* 14.103 km<sup>2</sup> yang mencakup ± 25% luas Propinsi Jawa Timur ± 9% luas Pulau Jawa (PU, 2011).

Batas administrasi WS Brantas meliputi 9 kabupaten (Malang, blitar, Tulungagung, Trenggalek, Kediri, Nganjuk, Jombang, Mojokerto, dan Sidoarjo) dan 6 Kota (Batu, Malang, Blitar, Kediri, Mojokerto, dan Surabaya) atau sebesar 26,5% dari wilayah Propinsi Jawa Timur (PU, 2011). Daftar Daerah Air Sungai (DAS) Brantas yang mengalir sebanyak 38 Dam meliputi Malang sebagai hulu dengan panjang sungai 15,5 km dan Surabaya sebagai hilir dengan panjang sungai 42 km disajikan pada Lampiran 2.



### 2.1.1 Sungai Surabaya

Sungai Surabaya merupakan salah satu sungai utama di Surabaya yang merupakan Daerah Aliran Sungai Brantas. Sungai Surabaya merupakan anak Sungai Brantas yang terbentang sepanjang 42 km mulai Dam Jembatan Cangu yang ada di Mojokerto sampai Dam Jagir yang ada di Surabaya. Dam yang dialiri oleh Sungai Surabaya dari Mojokerto hingga Surabaya adalah Dam Jembatan Cangu (Mojokerto), Jembatan Pening (Mojokerto), Jembatan Jrebeng (Gresik), Cangkir Tambangan (Gresik), Bambe Tambangan (Gresik), Jembatan Sepanjang (Surabaya), Bendungan Gunungsari (Surabaya), dan berakhir pada Dam Jagir. Sungai Surabaya berperan penting bagi kehidupan masyarakat, khususnya yang tinggal di Kota Surabaya, hal ini disebabkan air Sungai Surabaya adalah pasokan utama sumber air baku PDAM (Perusahaan daerah Air Minum) yang melayani lebih dari tiga juta penduduk Surabaya (BLH, 2009). Menurut BLH (Badan Lingkungan Hidup) Kota Surabaya, Sungai Surabaya memiliki fungsi sebagai berikut:

- a. Sebagai sumber air baku bagi PDAM Surabaya, kegiatan industri, kawasan perumahan, dan pertanian
- b. Pengendali banjir Kota Surabaya dan sekitarnya, dengan pengaturan debit di pintu air Jembatan Cangu dan Gunungsari
- c. Pemasok air sebagai aliran dasar sebesar  $\pm 7,5 \text{ m}^3/\text{detik}$  yang berfungsi untuk pengenceran limbah dan mempertahankan ekosistem sungai

## 2.2 Pencemaran Air

Air dikatakan tercemar apabila air tersebut telah menyimpang dari keadaan normalnya, dimana keadaan normal air dipengaruhi oleh kegunaan air asal sumber air. Air tercemar dapat diakibatkan oleh berbagai sumber pencemaran, diantaranya adalah oleh limbah industri, limbah domestik, serta dari limbah pertanian dan perkebunan (BTKL-PPM, 2010).

Limbah domestik merupakan limbah yang berasal dari rumah tangga, salah satunya adalah air sabun seperti deterjen dan sampo. Pembuangan air sabun yang masuk ke dalam sungai akan memberikan dampak negatif pada kondisi air sungai, apabila jumlah buangan air sabun ke sungai semakin meningkat. Sedangkan dari pertanian, pemakaian insektisida juga dapat mencemari air sungai. Bahan insektisida dapat mengalir ke sungai di sekitarnya melalui air hujan yang jatuh di area pertanian, selain itu dapat juga melalui pengairan sawah.

## 2.3 *Biochemical Oxygen Demand (BOD)*

Kebutuhan Oksigen Biokimiawi atau sering disebut BOD didefinisikan sebagai jumlah oksigen (dinyatakan dalam mg) yang dibutuhkan untuk menguraikan zat organik secara biokimiawi dalam 1L air selama waktu inkubasi (5 X 24 jam) pada suhu 20°C (Sudarmaji, 1997). Pengertian lain BOD adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan organiknya. Bahan organik yang tidak mudah terurai umumnya berasal dari limbah pertanian, pertambangan, dan industri. Sehingga

semakin banyak bahan organik yang tidak mudah terurai dalam air, semakin meningkat kadar BOD yang dibutuhkan sedangkan DO (Dissolved Oxygen) akan semakin rendah.

BOD dapat digunakan untuk mengetahui beban pencemaran zat organik yang diproduksi dari buangan domestik, industri, dan lainnya. Analisis ini memerlukan adanya bakteri didalam contoh uji air dimana di dalam air sungai pada umumnya sudah terdapat bakteri, akan tetapi untuk analisis air limbah industri diperlukan tambahan benih bakteri. Standart baku mutu maksimum BOD adalah 3 mg/l (PJT, 2016).

#### **2.4 Chemical Oxygen Demand (COD)**

*Chemical Oxygen Demand* (COD) atau Kebutuhan Oksigen Kimiawi (KOK) adalah jumlah oksigen ( $\text{mg/O}_2$ ) yang dibutuhkan untuk mengoksidasi zat – zat organik yang ada dalam 1L sampel air, dimana pengoksidasi  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  digunakan sebagai sumber oksigen (*oxidizing agent*) (Alaerts dan Santika, 1987).

Uji COD menggunakan pengoksidasi  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  (Kalium Bikromat) sebagai sumber oksigen (*oxidizing agent*). Kalium Bikromat digunakan sebagai agen pengoksidasi karena mampu mengoksidasi berbagai macam zat organik secara sempurna menjadi karbon dioksida dan air. Kalium bikromat dapat mengoksidasi zat organik apabila larutan yang digunakan berupa asam kuat dan berada pada temperatur tinggi (Sudarmaji, 1997).

Analisa COD berbeda dengan analisis BOD, namun perbandingan antara COD dengan angka BOD dapat ditetapkan. Uji COD biasanya menghasilkan nilai yang lebih tinggi dibandingkan dengan uji BOD. Hal ini disebabkan bahan-bahan yang stabil terhadap reaksi biologis dan mikroorganisme dapat ikut teroksidasi dalam uji COD (Sudarmaji, 1997).

Analisis COD pada prinsipnya merupakan analisis untuk mengetahui jumlah oksigen yang dibutuhkan dalam mengoksidasi bahan-bahan organik melalui reaksi kimia, karena bahan organik dapat menurunkan konsentrasi oksigen terlarut di dalam air, maka semakin besar konsentrasi COD maka semakin besar pula polutan yang ada di badan air tersebut. Standart baku mutu maksimum kadar COD adalah 25 ppm atau 25 mg/lit (PJT, 2016).

## **2.5 Dissolved Oxygen (DO)**

*Dissolved Oxygen (DO)* merupakan salah satu parameter penting dalam analisis kualitas air. DO merupakan oksigen terlarut yang terkandung di dalam air. Berasal dari udara dan hasil proses fotosintesis tumbuhan air. Oksigen diperlukan untuk semua makhluk hidup yang hidup di air seperti ikan, kerang, dan hewan lainnya termasuk mikroorganisme seperti bakteri yang hidup didalam air. Nilai DO yang biasanya diukur dalam bentuk konsentrasi ini menunjukkan jumlah oksigen ( $O_2$ ) yang tersedia dalam suatu badan air. Semakin besar nilai DO pada air, mengindikasikan air tersebut memiliki kualitas bagus, sebaliknya jika nilai DO rendah, dapat diketahui bahwa air tersebut telah tercemar. Pengukuran DO juga bertujuan melihat sejauh mana

badan air mampu menampung biota air seperti ikan dan mikroorganisme. Selain itu kemampuan air untuk membersihkan pencemaran juga ditentukan oleh banyaknya oksigen dalam air. Standart baku mutu minimum DO adalah 4 ppm atau 4mg/lit (PJT, 2016).

## 2.6 Aljabar Matriks

Menurut Ruppert, *et.al* (2003) matriks adalah himpunan bilangan real yang disusun secara persegi panjang, mempunyai  $m$  baris dan  $n$  kolom dengan bentuk umum:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Tiap bilangan  $c_{ij}$  yang berada didalam matriks C disebut elemen. Indeks  $i$  dan  $j$  masing – masing menyatakan baris dan kolom tempat beradanya sebuah elemen dari matriks C. Beberapa operasi pada matriks adalah sebagai berikut:

### a. Penjumlahan

Jika dua matriks mempunyai ukuran yang sama, maka dapat dikatakan konformal untuk penjumlahan. Hasil penjumlahan diperoleh dengan menambahkan elemen yang sesuai. Oleh karena itu, jika **A** adalah matriks berukuran  $n \times p$  dan **B** adalah matriks berukuran  $n \times p$ , kemudian **C=A+B** juga adalah matriks berukuran  $n \times p$  dan diperoleh  $C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ . Hal ini juga berlaku untuk perhitungan pengurangan antara dua konformal

antara matriks **A** dan **B**. jika **A** dan **B** adalah matriks berukuran  $n \times p$ , maka dua sifat dari penjumlahan matriks diberikan dalam teorema berikut:

$$(i) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(ii) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{A}^T$$

b. Perkalian

Misalkan **A** adalah matriks berukuran  $m \times n$  dan **B** adalah matriks berukuran  $n \times p$ . Hasil perkalian **AB** adalah matriks **C** berukuran  $m \times p$  dengan  $c_{ij} = \sum_{r=1}^n \mathbf{A}_{ir} \mathbf{B}_{rj}$ . Perkalian dua buah matriks dapat terjadi jika dan hanya jika banyaknya kolom dari matriks **A** sama dengan banyaknya baris dari matriks **B**.

c. *Transpose*

Jika **A** adalah matriks berukuran  $m \times n$  maka *transpose* dari notasi **A** dinotasikan dengan  $\mathbf{A}^T$  didefinisikan sebagai matriks berukuran  $n \times m$  yang merupakan hasil pertukaran baris dan kolom matriks **A** salah satu sifat *transpose* yang digunakan adalah  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  dengan syarat matriks **A** dan **B** masing – masing merupakan matriks yang memenuhi sifat perkalian.

d. Invers

Misalkan **A** adalah matriks berukuran  $n \times n$  (**A** adalah matriks persegi). Sebuah matriks **B** berukuran  $n \times n$  sedemikian hingga  $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$  disebut invers kiri dari **A** dan sebuah matriks **B** berukuran  $n \times n$  sedemikian hingga  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$  disebut invers kanan dari **A** dengan **I** merupakan matriks identitas. Jika  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$  maka matriks **B** disebut invers kanan dan invers kiri dari matriks

$\mathbf{A}$  dan matriks  $\mathbf{A}$  dikatakan invertibel. Jika matriks  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  masing – masing merupakan matriks yang invertibel dan  $\mathbf{AB}$  terdefinisi maka  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ . Jika  $\mathbf{A}$  adalah matriks simetri dan nonsingular dan

dipartisi menjadi  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$  dan jika  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ ,

sedemikian hingga maka  $\mathbf{A}_{11}^{-1}$  dan  $\mathbf{B}^{-1}$  ada, sehingga invers dari  $\mathbf{A}$  adalah:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

e. Trace

Trace  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  berukuran  $n \times n$  adalah fungsi skalar yang didefinisikan

sebagai jumlah dari elemen – elemen diagonal dari  $\mathbf{A}$ , yaitu  $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

f. Matriks Partisi

Partisi dari matriks  $\mathbf{A}$  menjadi empat submatriks (persegi atau persegi panjang) dapat diindikasikan secara simbolis sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Jika dua matrik  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah konformal untuk perkalian, dan jika  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  dipartisi sehingga submatrik konformal, maka perkalian  $\mathbf{AB}$  dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

Jika  $\mathbf{B}$  diganti oleh vektor  $\mathbf{b}$  yang dipartisi menjadi dua himpunan dari elemen – elemen, jika  $\mathbf{A}$  dipartisi menjadi dua himpunan dari kolom – kolom, maka menjadi,

$$\mathbf{Ab} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{b}_2$$

g. Turunan Fungsi Vektor dan Matriks

Misalkan  $v = f(\mathbf{x})$  merupakan fungsi dari variabel – variabel

$x_1, x_2, \dots, x_p$  dengan  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ , dan misalkan

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

Misalkan  $v = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{c}$ , dengan  $\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_p)$  adalah vektor konstanta,

maka  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{c}^T \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{c})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}$ , jika  $v = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ , dengan  $\mathbf{C}$  adalah matriks

simetri dari suatu konstanta,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$  maka



$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = 2 \mathbf{C} \mathbf{x}$$

#### h. Matriks Kovariansi

Varians  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2$  dari  $x_1, x_2, \dots, x_p$  dan kovariansi  $\sigma_{ij}$  untuk semua  $i \neq j$  merupakan elemen – elemen dari matriks kovariansi yang dinotasikan dengan  $\Sigma$  yaitu:

$$\Sigma = \text{cov}(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Baris ke- $i$  dari  $\Sigma$  mengandung varians  $x_i$  dan kovariansi  $x_i$  dengan tiap variabel  $x$  yang lain. Agar konsisten dengan notasi  $\sigma_{ij}$  digunakan  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, p$  untuk varians. Varians terdapat pada diagonal  $\Sigma$  dan kovariansi berada pada selain diagonal tersebut.

(Rencher dan Schaanlje, 2008)

## 2.7 Data Longitudinal

Data longitudinal merupakan data yang pengamatannya dilakukan secara berulang untuk setiap subjek. Pada data longitudinal diasumsikan subjek – subjek saling independen satu sama lain, akan tetapi antar pengamatan didalam

subjek saling dependen sehingga terdapat korelasi (Prahutama, 2003). Tujuan dari analisis data longitudinal adalah untuk mempelajari bagaimana perubahan subjek yang diamati dari waktu ke waktu.

Data longitudinal berbeda dengan multivariat, *cross-section*, dan *time series*, pada data longitudinal terdapat vektor untuk setiap subyek akan tetapi vektor berasal dari sejumlah pengukuran yang berbeda. Dalam data *cross-section*, umumnya pengamatan setiap subyek independen sedangkan pada data longitudinal, vektor untuk setiap subyek berasal dari pengukuran kuantitas yang sama sederetan waktu pengamatan. Selain itu, data longitudinal tersusun atas sejumlah *time series* yang pendek karena memungkinkan hanya terdiri dari 2 waktu pengamatan yang berbeda untuk tiap subyeknya dan tidak seperti layaknya data *time series* yang relatif lebih panjang dan dapat terdiri dari satu subyek saja. Pada data longitudinal apabila terdapat lebih dari satu respon, maka terdapat korelasi dari setiap respon pada subjek yang sama (Weiss, 2005).

## **2.8 Regresi Nonparametrik**

Selain analisis regresi parametrik, untuk melakukan pendekatan suatu kurva terhadap data yang ada bisa digunakan pula analisis nonparametrik, dimana dalam analisis regresi nonparametrik bentuk kurva regresi bisa sangat fleksibel dalam mendekati pola data, serta tidak menuntut terpenuhinya asumsi regresi parametrik. Sebagai ilustrasi, dalam regresi nonparametrik dengan tidak adanya informasi mengenai bentuk kurva regresi, maka peneliti hanya

mengasumsikan sebuah ruang fungsi yang dipercaya memuat fungsi/ kurva regresi yang tidak diketahui. Kemungkinan peneliti menggunakan data hasil observasi untuk menjelaskan elemen dari ruang fungsi tersebut yang representatif terhadap kurva regresi yang tidak diketahui (Setyawan, 2012).

Model regresi nonparametrik pada umumnya berbentuk:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

dengan  $y_i$  adalah variabel respon. Fungsi  $f$  yang tidak diketahui bentuknya dengan  $x_i$  sebagai variabel prediktor dan  $\varepsilon_i$  diasumsikan berdistribusi  $N(0, \sigma^2)$  dan kurva  $f$  hanya diasumsikan mulus (*smooth*) serta berada dalam suatu ruang fungsi tertentu.

## 2.9 Regresi Birespon

Analisis regresi birespon merupakan suatu analisis yang digunakan untuk mengetahui hubungan fungsional antara dua variabel respon variabelprediktor. Secara umum, model regresi birespon dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

dengan  $y_i = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)})^T$ ,  $f(x_i) = (f_1(x_i), f_2(x_i))^T$  adalah vektor dari fungsi regresi, serta  $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)})^T$  adalah vektor dari error pengukuran dengan mean 0 dan variansi  $\sum i$ . Indeks  $i$  menyatakan banyak pengamatan pada  $y_i^{(1)}$  dan  $y_i^{(2)}$  dengan kedua variabel respon saling berkorelasi (Azizah, 2016).

## 2.10 Fungsi Kernel

Secara umum, fungsi Kernel  $K_h$  dengan  $h$  adalah *bandwidth* (parameter penghalus) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right) \text{ untuk } -\infty < x < \infty \text{ dan } h > 0 \quad (2.3)$$

serta memenuhi sifat:

(i)  $K(x) \geq 0$ , untuk semua  $x$

(ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1$

(iii)  $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0$

(iv)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx = \sigma^2 > 0$

Estimator fungsi densitas Kernel didefinisikan sebagai:

$$\hat{m}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (2.4)$$

Beberapa jenis fungsi Kernel (Hardle, 1990), yaitu:

(i) Kernel Uniform :  $K(x) = \frac{1}{2} I(|x| \leq 1)$  (2.5)

(ii) Kernel Segitiga :  $K(x) = (1 - |x|) I(|x| \leq 1)$  (2.6)

(iii) Kernel Eparichnikov :  $K(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) I(|x| \leq 1)$  (2.7)

(iv) Kernel Kuadrat :  $K(x) = \frac{15}{16} (1 - x^2)^2 I(|x| \leq 1)$  (2.8)

$$(v) \text{ Kernel Triweight} \quad : K(x) = \frac{35}{32}(1-x^2)^3 I(|x| \leq 1) \quad (2.9)$$

$$(vi) \text{ Kernel Cosinus} \quad : K(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) I(|x| \leq 1) \quad (2.10)$$

$$(vii) \text{ Kernel Gaussian} \quad : K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), -\infty < x < \infty \quad (2.11)$$

dengan  $I$  adalah fungsi indikator.

(Hardle, 1990)

### 2.11 Pemilihan *Bandwidth* Optimal

*Bandwidth* adalah sebagai pengontrol fungsi dengan data agar fungsi yang dihasilkan menjadi *smooth* (mulus). Pemilihan *bandwidth* yang optimal akan menghasilkan estimator yang baik terhadap model (Prahutama, 2013). Pemilihan *bandwidth* yang terlalu kecil akan menghasilkan kurva estimasi yang sangat kasar (*undersmoothing*). Sementara jika pemilihan *bandwidth* yang terlalu besar akan menghasilkan kurva estimasi yang sangat halus (*oversmoothing*). Oleh karena itu pemilihan *bandwidth* yang optimal sangat penting dalam analisis regresi nonparametrik (Budiantara, 2000). Salah satu cara menentukan *bandwidth* yang optimal dengan menggunakan metode GCV. Fungsi GCV diberikan sebagai berikut:

$$GCV(h) = \frac{MSE(h)}{(n^{-1} \text{tr}[\mathbf{I} - \mathbf{V}(h)])^2} \quad (2.12)$$

dengan

$$MSE(h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2$$

dan  $\mathbf{V}(h)$  diperoleh dari hubungan  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{V}(h)\mathbf{y}$

Nilai GCV terkecil akan memberikan nilai *bandwidth* yang optimal.

## 2.12 Estimator Polinomial Lokal untuk Satu Variabel Respon

Berdasarkan estimator polinomial lokal, fungsi regresi  $f(x)$  pada persamaan (2.1) dapat didekati dengan ekspansi deret *Taylor* pada  $t$  disekitar titik  $x_0$  sebagai berikut:

$$f(x) \approx \sum_{s=0}^p (x-x_0)^s \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} = \sum_{s=0}^p (x-x_0)^s \omega_s(x_0), x \in (x_0-h, x_0+h) \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dapat dinyatakan dalam notasi matriks menjadi:

$$f(x) = \underline{\mathbf{x}}(x_0) \underline{\boldsymbol{\omega}}(x_0) \quad (2.14)$$

dengan  $\underline{\mathbf{x}}(x_0) = [1 \quad (x-x_0) \quad (x-x_0)^2 \quad \dots \quad (x-x_0)^p]$ ,  $x \in (x_0-h, x_0+h)$  dan

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(x_0) = [\omega_0(x_0) \quad \omega_1(x_0) \quad \dots \quad \omega_p(x_0)]^T$$

Pengestimasi  $\underline{\boldsymbol{\omega}}(x_0)$  pada persamaan (2.14), menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS) dengan cara meminimumkan fungsi berikut:

$$Q(x_0) = (\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{X}(x_0) \underline{\boldsymbol{\omega}}(x_0))^T \mathbf{K}_h(x_0) (\underline{\mathbf{y}} - \mathbf{X}(x_0) \underline{\boldsymbol{\omega}}(x_0)) \quad (2.15)$$

dengan

$$\mathbf{K}_h(x_0) = \begin{bmatrix} K_h(x_1-x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_h(x_2-x_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_h(x_n-x_0) \end{bmatrix}$$

Nilai dugaan bagi  $\varrho(x_0)$  diperoleh melalui pendiferensialan persamaan (2.15) terhadap  $\varrho(x_0)$ . Nilai minimum  $Q(x_0)$  dicapai saat  $\frac{\partial Q(x_0)}{\partial \varrho(x_0)} = 0$ ,

sehingga diperoleh:

$$\hat{\varrho}(x_0) = (\mathbf{X}^T(x_0)\mathbf{K}_h(x_0)\mathbf{X}(x_0))^{-1}\mathbf{X}^T(x_0)\mathbf{K}_h(x_0)\mathbf{y} \quad (2.16)$$

Berdasarkan persamaan (2.15) dan (2.16), bentuk polinomial lokal untuk  $\hat{f}(x)$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{f}(x) = \underline{x}(x_0)(\mathbf{X}^T(x_0)\mathbf{K}_h(x_0)\mathbf{X}(x_0))^{-1}\mathbf{X}^T(x_0)\mathbf{K}_h(x_0)\mathbf{y} \quad (2.17)$$

(Bayyinah, 2016)

### 2.13 Regresi Nonparametrik Birespon dengan Estimator Polinomial Lokal

Pada analisis regresi jika variabel respon terdiri dari 2 variabel serta terdapat korelasi antar variabel responnya dinamakan regresi birespon. Apabila regresi birespon ini memiliki kurva yang tidak diketahui bentuknya maka akan lebih tepat menggunakan pendekatan nonparametrik. Pendekatan nonparametrik dapat dilakukan dengan beberapa metode. Secara umum, model regresi birespon dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\underline{y}_i = \underline{f}(x_i) + \underline{\varepsilon}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

dengan  $\underline{y}_i = (y_i^{(1)}, y_i^{(2)})^T$  dan  $\underline{f}(x_i) = (f(x_i)^{(1)}, f(x_i)^{(2)})^T$  adalah fungsi regresi serta  $\underline{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)})^T$  adalah vektor *error* pengukuran dengan mean 0 dan

kovariansi  $\Sigma_i$ . Indeks  $i$  menyatakan banyak pengamatan pada  $y_i^{(1)}$  dan  $y_i^{(2)}$  dengan kedua variable respon saling berkorelasi.

Fungsi  $f(x_i)$  diestimasi berdasarkan pendekatan nonparametrik dengan estimator polinomial lokal dengan memperhatikan adanya matriks pembobot fungsi kernel ( $\mathbf{K}_h(x_o)$ ) dan matriks pembobot variansi kovariansi ( $\mathbf{V}^{-1}$ ). Matriks  $\mathbf{V}^{-1}$  diperoleh dari sampel yang diestimasi dari *error* model tanpa pembobot (Khoirunnisa, 2011). Matriks pembobot variansi kovariansi untuk setiap pengamatan diperoleh dari penjabaran berikut ini:

$$\Sigma_i = Cov(\underline{\varepsilon}_i) = Cov \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i^{(1)} \\ \underline{\varepsilon}_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_i^{(1)}) & Cov(\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}) \\ Cov(\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}) & Var(\varepsilon_i^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

karena  $\hat{\rho}_i = Cov(\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}) / \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i}$  dengan  $\hat{\sigma}_{1i}$  merupakan simpangan baku dari  $\varepsilon_i^{(1)}$ , dan  $\hat{\sigma}_{2i}$  merupakan simpangan baku dari  $\varepsilon_i^{(2)}$ , maka dapat dikatakan  $Cov(\varepsilon_i^{(1)}, \varepsilon_i^{(2)}) = \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i$ , sehingga persamaan (2.19) berubah menjadi:

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{1i}^2 & \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i \\ \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i & \hat{\sigma}_{2i}^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Dari persamaan diatas (2.20) dapat diperoleh matriks pembobot variansi kovariansi untuk setiap pengamatan, yaitu:

$$\begin{aligned} \Sigma_i^{-1} &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{1i}^2 & \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i \\ \hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i & \hat{\sigma}_{2i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\hat{\sigma}_{1i}^2 \hat{\sigma}_{2i}^2 - \hat{\sigma}_{1i}^2 \hat{\sigma}_{2i}^2 \hat{\rho}_i^2} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{2i}^2 & -(\hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i) \\ -(\hat{\sigma}_{1i} \hat{\sigma}_{2i} \hat{\rho}_i) & \hat{\sigma}_{1i}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{2i}^2 & -(\hat{\sigma}_{1i}\hat{\sigma}_{2i}\hat{\rho}_i) \\ -(\hat{\sigma}_{1i}\hat{\sigma}_{2i}\hat{\rho}_i) & \hat{\sigma}_{1i}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}_{2i}^2}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} & \frac{-(\hat{\sigma}_{1i}\hat{\sigma}_{2i}\hat{\rho}_i)}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} \\ \frac{-(\hat{\sigma}_{1i}\hat{\sigma}_{2i}\hat{\rho}_i)}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} & \frac{\hat{\sigma}_{1i}^2}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} & \frac{\hat{\rho}_i}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} \\ \frac{\hat{\rho}_i}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} & \frac{1}{(\hat{\sigma}_{1i}^2)(\hat{\sigma}_{2i}^2)(1-\hat{\rho}_i^2)} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

(Bayyinah, 2016)

## 2.14 Regresi Nonparametrik Polinomial Lokal Birespon pada Data

### Longitudinal

Model regresi nonparametrik pada data longitudinal ditulis sebagai berikut:

$$y_{ij} = f(x_{ij}) + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \quad (2.22)$$

Dengan terdapat  $n$  subyek dengan subyek ke- $i$  mempunyai  $m$  observasi menurut waktu.  $y_{ij}; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$  merupakan fungsi *smooth population mean* dan  $\varepsilon_{ij}$  adalah *error* pengukuran yang diasumsikan berdistribusi  $N(0, \sigma^2)$ . Fungsi regresi  $f(t_{ij})$  dapat didekati secara lokal dengan deret *Taylor* polinomial berderajat  $p$  sehingga sehingga  $f(x_{ij}) \approx \mathbf{X}_{ij}^T \boldsymbol{\omega}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ . Notasi matriksnya  $U_{ij} = [\omega_0, \omega_1]^T$

dengan  $\omega_s = \frac{f^s(x)}{s!}, s=1,2,\dots,p$  dengan  $y = [y_1^T, \dots, y_n^T]^T$  dan

$y_i = [y_{i1}, \dots, y_{im}]^T$  adalah vektor respon untuk subyek ke- $i$ . Selanjutnya  $\omega$  dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai:

$$\hat{\omega} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{K}_h \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{K}_h \mathbf{y} \quad (2.23)$$

Misalkan  $\varepsilon_s$  adalah vektor satuan dengan ukuran  $(p+1)$ , dengan elemen ke- $s$  adalah 1 dan elemen lain adalah 0 maka  $\hat{f}^{(s)}(x) = s! \varepsilon_{s+1}^T \hat{\omega}, s=0,1,\dots,p$ .

Secara garis besar, estimator lokal polinomial kernel adalah  $\hat{f}(x) = s! \varepsilon_{s+1}^T \hat{\omega}$ .

Ketika  $p$  sama dengan 1 maka estimator  $\hat{f}(x)$  dinamakan dengan estimator polinomial lokal dan dinyatakan dengan:

$$\hat{f}(x)(x_{ij}) = \frac{\sum_i^n \sum_j^m [r_2(x) - r_1(x)(x_{ij} - x)] K_h(x_{ij} - x) y_{ij}}{r_2(x) r_0(x) - r_1^2(x)} \quad (2.24)$$

dengan  $r_s(x) = \sum_i^m \sum_j^n (x_{ij} - x)^s K_h(x_{ij} - x), s=0,1,2$

(Bayyinah, 2016)

## 2.15 Heteroskedastisitas dan Homoskedastisitas

Pengertian heterokedastisitas adalah asumsi yang menyatakan bahwa varians setiap  $\varepsilon_i$  disetiap rerata nolnya bergantung pada nilai variabel bebas.

Satu atau lebih varian  $\varepsilon_i$  tidak sama, baik untuk nilai-nilai  $X$  yaitu variabel bebas yang kecil ataupun besar, dengan kata lain varian setiap unsur residual merupakan suatu bilangan tidak konstan dengan demikian berarti berlaku kondisi berikut:

$$\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

Sedangkan homoskedastisitas memiliki pengertian bahwa variansi dari nilai residual bersifat konstan (tetap) atau disebut identik. Asumsi homogenitas mensyaratkan bahwa distribusi *error* untuk masing – masing perlakuan/kelompok harus memiliki variansi yang sama. Dalam prakteknya sendiri, nilai  $Y$  pada setiap variabel independen masing – masing beragam disekitar nilai rata – ratanya. Pada kondisi homoskedastisitas berlaku:

$$\text{var}(\varepsilon_1) = \text{var}(\varepsilon_2) = \dots = \text{var}(\varepsilon_n) = \sigma^2; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

Salah satu metode yang digunakan untuk mendeteksi adanya kasus heteroskedastisitas adalah uji *Box M*. Uji *Box M* adalah uji statistika yang digunakan untuk menguji heteroskedastisitas suatu kovarians matriks, dengan subjek ke- $i$  pengamatan ke- $j$  dan dinyatakan dalam model regresi  $y_{ij} = x_{ij}\beta^T + \varepsilon_{ij}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ . Hipotesis yang digunakan dalam pengujian ini adalah:

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_n$$

$$H_1 : \text{minimal ada sepasang } \Sigma_i \text{ yang tidak sama ; } i = 1, 2, \dots, n$$

Statistik Uji *Box M* adalah sebagai berikut:

$$M = (m - n) \log |S| - \sum_{i=1}^n (m_i - 1) \log |S_i|; |S| > 0 \quad (2.27)$$

$$\text{Untuk, } S = \begin{cases} \sum_{i=1}^g \frac{(n_i - 1) S_i}{(n - g)} & n > g \\ 0 & n \leq g \end{cases}$$

$$S_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^T & n_i > 1 \\ 0 & n_i \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{dan } \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_{ij}}{n_i}$$

Keterangan:

$g$  : jumlah sel dalam matriks kovarians nonsingular

$n_i$  : jumlah subjek ke- $i$

$n$  : jumlah subyek,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_g$

(Box, 1949)

## 2.16 Uji Korelasi *Pearson*

Uji korelasi digunakan untuk mengetahui pola dan keeratan hubungan antara dua atau lebih variabel. Uji korelasi yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah uji korelasi *Pearson*. Uji ini dapat digunakan dalam penelitian jika data yang diamati merupakan data kontinu. Hipotesis yang digunakan dalam uji korelasi adalah:

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

dengan statistik uji dari *Pearson* adalah:

$$r = \frac{n(\sum x_{ij}y_{ij}) - (\sum x_{ij})(\sum y_{ij})}{\sqrt{(n\sum x_{ij}^2 - (\sum x_{ij})^2)(n\sum y_{ij}^2 - (\sum y_{ij})^2)}} \quad (2.28)$$

(Sugiyono, 2008)

### 2.17 *Weighted Least Square*

Metode *Ordinary Least Square* (OLS) yang mengasumsikan bahwa terdapat variansi konstan dalam *error* yang pada umumnya disebut keadaan homoskedastisitas. Metode *Weighted Least Square* atau disebut metode WLS dapat digunakan dalam kondisi heteroskedastisitas yaitu asumsi variansi konstan dalam *error* dilanggar (Greene, 2003). Diberikan suatu model:

$$\underline{y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (2.29)$$

dengan *error* diasumsikan berdistribusi normal multivariat dengan mean 0 dan matriks kovariansi sebagai berikut:

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

dalam metode OLS, berikut adalah fungsi yang diminimumkan untuk mengestimasi parameter:

$$Q = (\underline{y} - \underline{\beta})^T (\underline{y} - \underline{\beta}) \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) selanjutnya diturunkan terhadap  $\underline{\beta}$  sehingga diperoleh estimator OLS sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \underline{y} \quad (2.31)$$

Jika kita mendefinisikan invers dari matriks variansi kovariansi sebagai pembobot untuk estimasi parameter yaitu  $\varphi_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ , maka matriks  $\mathbf{Z}$  merupakan

suatu matriks diagonal yang berisi pembobot untuk estimasi parameter sebagai berikut:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix}$$

Pada metode WLS fungsi yang diminimumkan untuk mengestimasi parameter dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = (\underline{y} - \mathbf{X}\underline{\beta})^T \mathbf{Z} (\underline{y} - \mathbf{X}\underline{\beta}) \quad (2.32)$$

Dengan mendiferensiasi persamaan (2.32) diperoleh estimator WLS sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{Z} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \underline{y} \quad (2.33)$$

(Supranto, 1984)

## 2.18 OSS – R

R adalah salah satu paket analisis data *open source* yang dapat diperoleh secara cuma – cuma. R merupakan paket pemograman yang termasuk keluarga S (Bahasa S). paket program R sudah dilengkapi dengan banyak kemampuan internal untuk menganalisis data dan menampilkan grafik sehingga R bias dikategorikan sebagai pake pengolahan data. Beberapa kemampuan yang menonjol dari R yang menjadi alasan banyak stasis memilihnya sebagai paket aplikasi antara lain sebagai berikut (Tirta, 2015):

1. R memiliki koleksi program analisis data, yang disebut *library* atau pustaka yang sangat luas seperti statistika deskriptif, regresi, pemodelan statistika, anova, dan multivariat.
2. Variasi penampilan grafiknya sangat banyak dan berkualitas tinggi, baik penampilan di layar monitor maupun bentuk cetak diatas kertas.
3. Kemampuan pemrograman dapat dikembangkan secara fleksibel untuk kepentingan khusus yang lanjut.

Beberapa perintah yang dapat digunakan dalam *software* R adalah sebagai berikut:

a. Function ( )

Adalah perintah untuk menunjukkan fungsi yang akan digunakan dalam program R.

b. Cat ( )

Adalah perintah untuk menuliskan argumentasi dalam bentuk karakter dan kemudian mencetak hasil atau file yang telah ditetapkan.

c. Length ( )

Adalah perintah untuk menunjukkan banyaknya data.

d. Matrix (a,b,c)

Adalah perintah untuk membentuk sebuah matriks dengan a adalah anggota, b adalah banyaknya baris, dan c banyaknya kolom.

e. Rep (a,b)

Adalah perintah untuk membentuk sebuah faktor dengan a adalah anggota, dan b adalah banyaknya anggota.

## f. Sum ( )

Adalah perintah untuk menjumlahkan bilangan dari anggota vektor.

## g. For ( )

Adalah perintah untuk mengulang satu blok pernyataan berulang kali sesuai dengan kondisi yang telah ditentukan.

## h. If-else ( )

Adalah perintah untuk menjalankan pernyataan pertama jika kondisi benar dan akan menjalankan pernyataan kedua jika kondisi salah.

## i. While

Adalah perintah untuk mengulang satu blok pernyataan terus – menerus selama kondisi ungkapan logika pada while berlaku benar.

## j. Repeat

Adalah perintah untuk mengulang eksekusi secara terus – menerus, hingga diperlukan pernyataan lain untuk menghentiksn perulangan.

## k. Plot ( )

Adalah perintah untuk membuat plot dan grafik.

## l. Win.graph ( )

Adalah perintah awal dalam pembuatan gambar.



### BAB III

#### METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1 Data dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari Laporan Pemantauan Kualitas Air Di Wilayah Sungai Brantas dan Bengawan Solo Tahun 2016 oleh PJT I. Hasil pemantauan kualitas badan air Sungai Surabaya di 8 titik dalam kurun waktu Januari – Desember 2015. Daftar daerah air mengalir sungai yang diamati disajikan dalam Tabel 3.1.

**Tabel 3.1** Daftar Daerah Air Mengalir (Dam) Sungai Surabaya

No.	Titik Sungai
1	Jembatan Canggu
2	Jembatan Pening
3	Jembatan Jrebeng
4	Cangkir Tambangan
5	Bambe Tambangan
6	Jembatan Sepanjang
7	Bendungan Gunungsari
8	Jagir

### 3.2 Variabel Penelitian

Variabel - variabel penelitian yang digunakan pada penelitian ini disajikan pada Tabel 3.2.

**Tabel 3.2** Variabel Penelitian

No	Variabel	Keterangan Variabel	Satuan	Tipe Variabel
1	$y_{ij}^{(1)}$	Kadar BOD pada Dam ke- $i$ , pengamatan ke- $j$	mg/L	Kontinu
2	$y_{ij}^{(2)}$	Kadar COD pada Dam ke- $i$ , pengamatan ke- $j$	mg/L	Kontinu
3	$x_{ij}$	Kadar DO pada Dam ke- $i$ , pengamatan ke- $j$	mg/L	Kontinu

### 3.3 Langkah Analisis Data

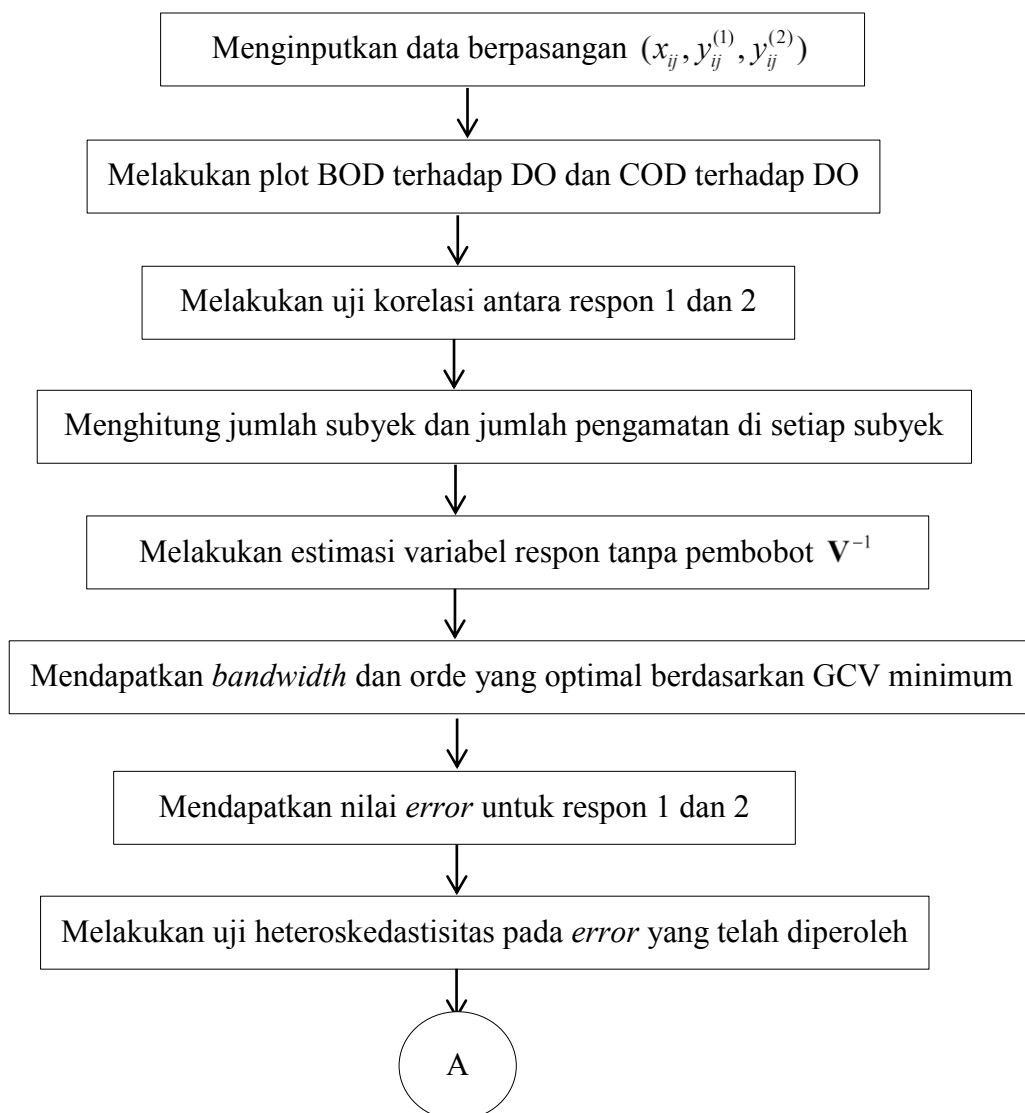
Langkah analisis yang dilakukan untuk menjawab rumusan masalah sebagai berikut :

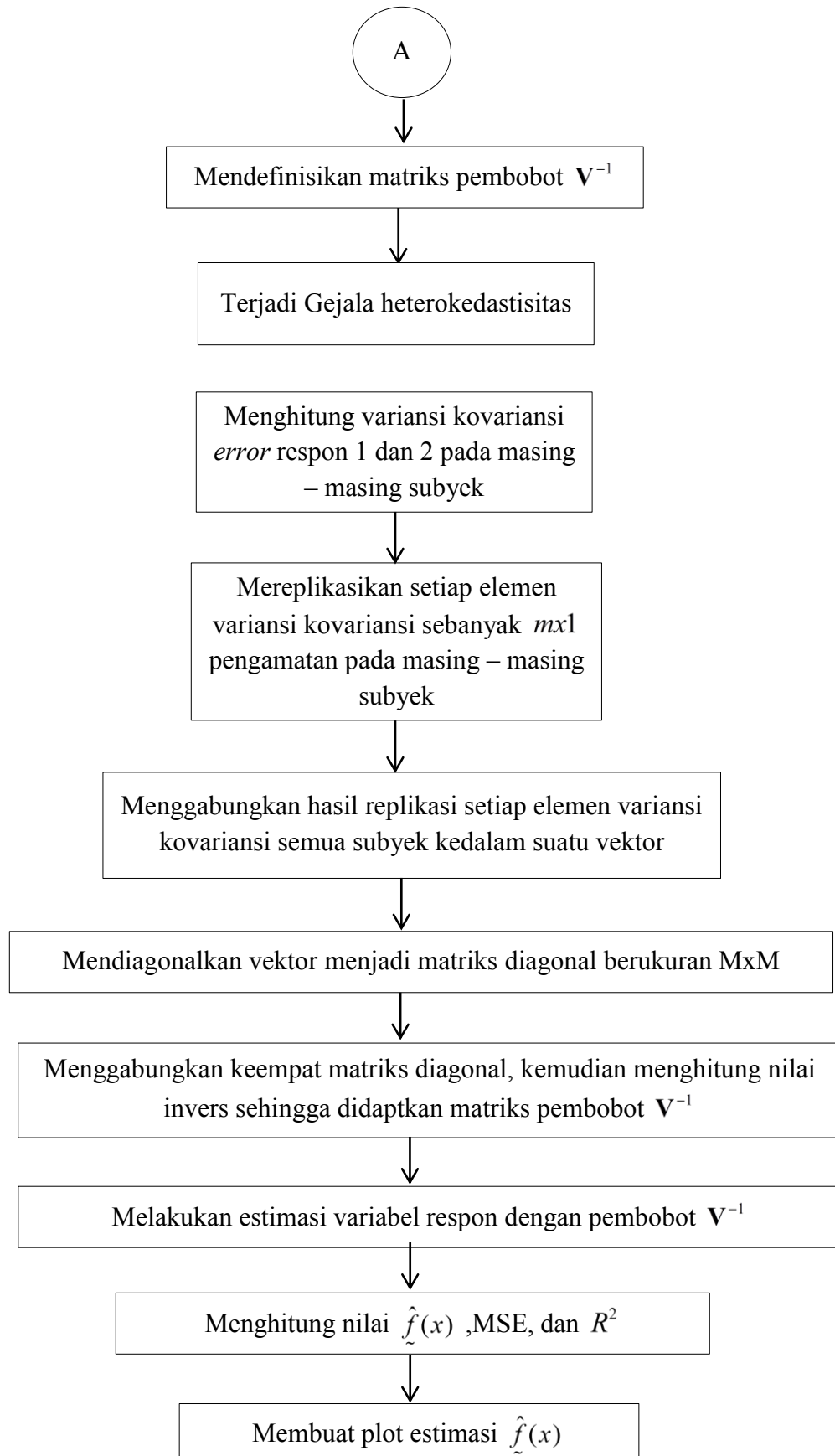
1. Memodelkan hubungan BOD dan COD terhadap DO berdasarkan regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal berdasarkan estimator polinomial lokal dengan menggunakan *Open Source Software* (OSS)-R dengan langkah – langkah dibawah ini:
  - a. Menginputkan pada data  $(t_{ij}, y_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(2)})$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$   
dengan  $t_{ij}$  adalah kandungan DO pada Dam ke- $i$  pengamatan ke- $j$ ,  $y_{ij}^{(1)}$

- adalah kandungan BOD pada Dam ke- $i$  pengamatan ke- $j$ ,  $y_{ij}^{(2)}$  adalah kandungan COD pada Dam ke- $i$  pengamatan ke- $j$
- b. Membuat plot antara BOD terhadap DO dan plot antara COD terhadap DO.
  - c. Menguji korelasi antara variabel respon satu yaitu BOD dan variabel respon dua yaitu COD sesuai dengan persamaan (2.28)
  - d. Menentukan orde dan *bandwidth* optimal berdasarkan kriteria GCV minimum sesuai dengan persamaan (2.12)
  - e. Menguji heteroskedastisitas pada *error* duga yang diperoleh menggunakan uji *Box M* ( masukkan *package Biotools* pada OSS – R) sesuai dengan persamaan (2.27)
  - f. Mendapatkan matriks pembobot  $V^{-1}$  dengan persamaan (2.21)
  - g. Mengestimasi variabel respon berdasarkan orde polinomial dan *bandwidth* yang optimal dengan menggunakan pembobot  $V^{-1}$  sesuai persamaan (2.17)
  - h. Menghitung nilai kriteria *Goodness of Fit* MSE dan  $R^2$  dengan persamaan (2.12)
2. Menganalisis dan menginterpretasi hasil estimasi kandungan BOD dan COD pada Sungai Surabaya dengan menggunakan regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal berdasarkan estimator polinomial lokal.
- a. Membuat plot antara BOD sebagai respon satu dengan DO sebagai prediktor dan COD sebagai respon dua dengan DO sebagai prediktor.

- b. Menganalisis hasil estimasi data longitudinal BOD dan COD dengan regresi nonparametrik birespon.
- c. Menginterpretasi hasil estimasi dan membuat plot hasil estimasi kandungan BOD dengan variabel prediktor DO dan kandungan COD dengan variabel prediktor DO dalam dua grafik.

Berikut disajikan diagram alir dari langkah – langkah analisis diatas:





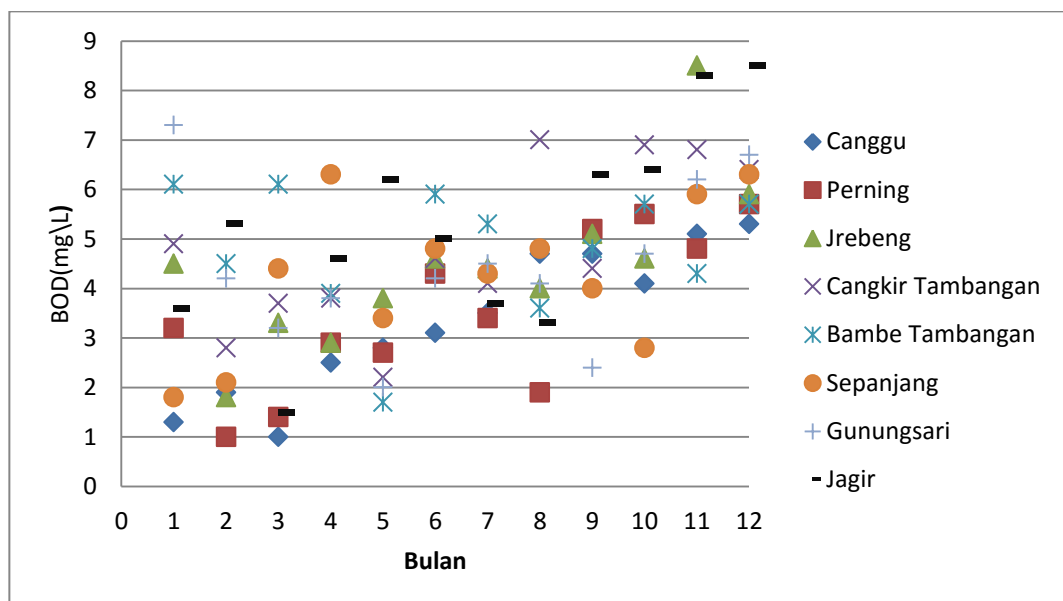
## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas hasil analisis deskriptif untuk menjawab tujuan dalam skripsi ini.

#### 4.1 Deskriptif Variabel – Variabel yang Digunakan dalam Menentukan Kualitas Air Sungai

Variabel yang digunakan dalam menentukan kualitas air sungai adalah BOD, COD, dan DO. Berikut ini merupakan deskriptif tiap variabel dalam bentuk diagram:

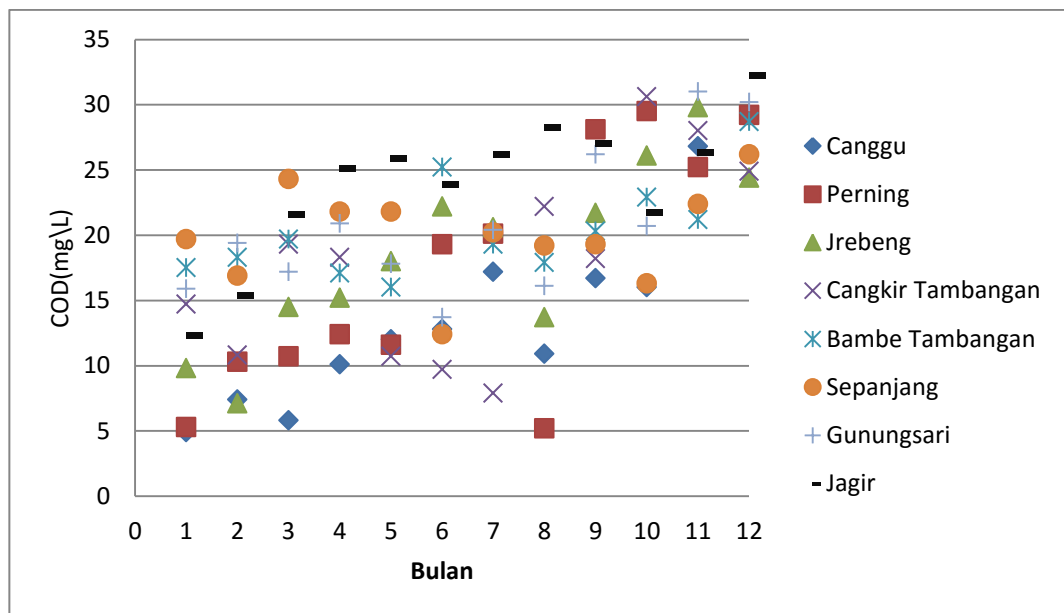


**Gambar 4.1** BOD pada Setiap Dam di Sungai Surabaya

Berdasarkan Gambar 4.1 merupakan diagram *scatter* deskripsi BOD pada setiap Dam di Sungai Surabaya, dapat diketahui bahwa secara umum BOD

yang ada disetiap Dam sudah melebihi standart baku mutu maksimal BOD yang ditetapkan BOD yaitu maksimal 3 mg/L. Pada bulan November dan desember 2015 terlihat bahwa BOD disetiap Dam tidak ada yang dibawah 3 mg/L.

Selain BOD yang telah dijelaskan, COD juga turut serta dalam variabel kualitas air sungai. Variabel COD akan disajikan pada Gambar 4.2 sebagai berikut:

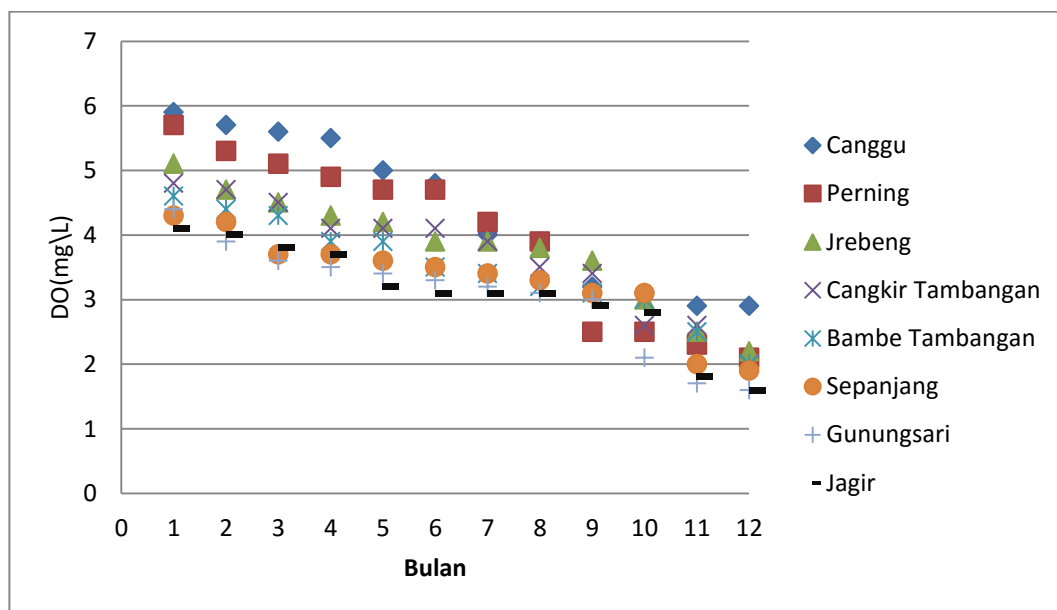


**Gambar 4.2** COD pada Setiap Dam di Sungai Surabaya

Berdasarkan Gambar 4.2 merupakan diagram *scatter* deskripsi COD pada setiap Dam di Sungai Surabaya, pada bulan Januari – April kadar COD di masing – masing Dam masih tergolong baik karena tidak melampaui standart baku mutu maksimal COD yaitu 25 mg/L. Pada bulan berikutnya yaitu Mei –

Desember COD pada setiap Dam secara umum meningkat melebihi standart baku yang telah ditentukan.

Variabel lain yang mempengaruhi kualitas air sungai adalah DO, berikut gambar yang disajikan untuk menjelaskan DO pada masing – masing Dam di Sungai Surabaya:



**Gambar 4.3** DO pada Setiap Dam di Sungai Surabaya

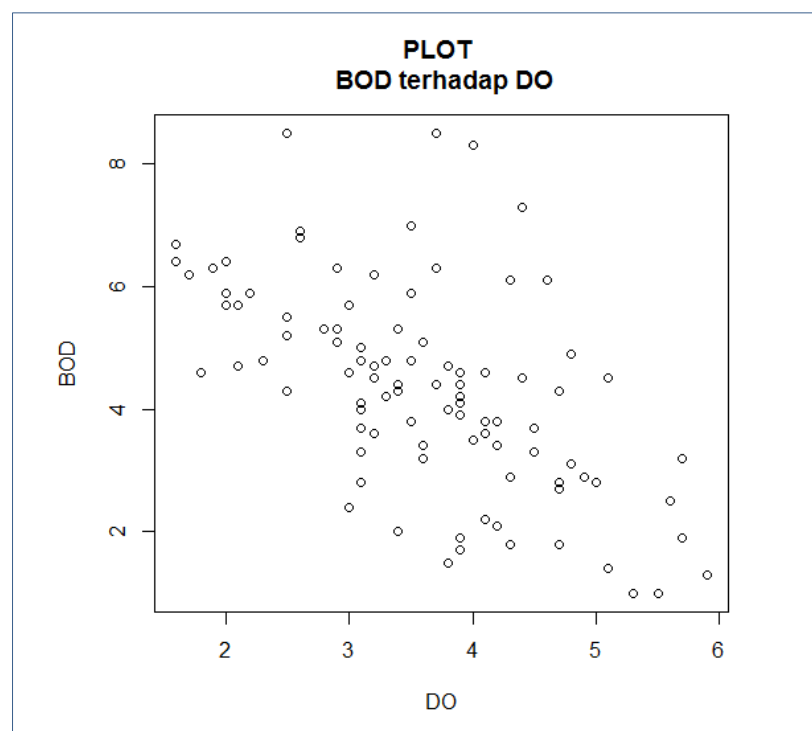
Berdasarkan Gambar 4.3 merupakan diagram *scatter* deskripsi DO pada setiap Dam di Sungai Surabaya, pada gambar terlihat adanya penurunan DO pada tiap bulannya. Pada bulan Maret – Agustus DO pada beberapa Dam sudah berada dibawah standart baku minimum DO (4 mg/L) yaitu Jagir, Sepanjang, Gunungsari. Pada bulan selanjutnya yaitu September – Desember DO disetiap Dam sudah tidak memenuhi standart baku karena tidak ada DO diatas 4 mg/L.



## 4.2 Estimasi COD dan BOD Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal

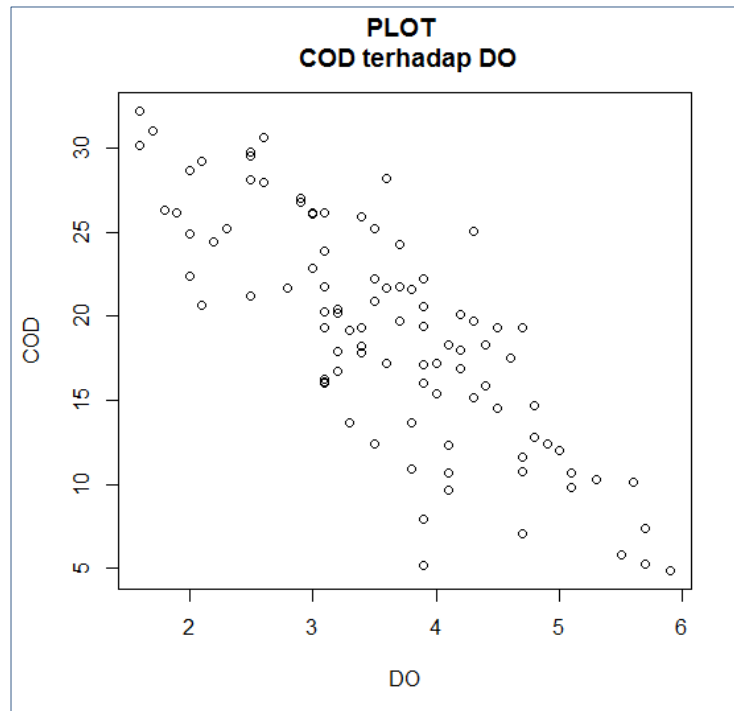
### Birespon pada Data Longitudinal

Gambar awal mengenai data kualitas air sungai pada Dam Sungai Surabaya dapat dilakukan dengan membuat plot antara BOD dan COD terhadap kandungan DO, berikut plot BOD terhadap DO dan COD terhadap DO:



**Gambar 4.4** Plot Observasi BOD terhadap DO

Berdasarkan Gambar 4.4 merupakan plot Observasi BOD terhadap DO terlihat bahwa sebaran data tidak diketahui adanya bentuk kurva. Hal ini menyebabkan analisis pada BOD lebih cocok dengan regresi nonparametrik.



**Gambar 4.5** Plot Observasi BOD terhadap DO

Berdasarkan Gambar 4.5 merupakan plot Observasi COD terhadap DO terlihat bahwa sebaran data tidak diketahui adanya bentuk kurva. Hal ini menyebabkan analisis pada COD lebih cocok dengan regresi nonparametrik.

Sebelum melakukan pengestimasian kualitas air sungai, langkah awal yang harus dilakukan adalah melakukan uji korelasi dengan menggunakan OSS-R. Uji korelasi dilakukan untuk mengetahui adanya korelasi antara variabel respon pertama (BOD) dan respon kedua (COD). Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Berdasarkan hasil *output* uji *Pearson Correlation* (lampiran 6), diperoleh nilai korelasi sebesar 0,6058255 dan nilai *p-value* sebesar  $6,15983 \times 10^{-11}$ , dengan menggunakan  $\alpha$  sebesar 0,5 maka tolak  $H_0$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antara BOD dan COD. Dalam pengestimasi model regresi nonparametrik birespon dengan estimator polinomial lokal dibutuhkan matrik pembobot sesuai dengan persamaan (2.21).

Tahap pertama dalam memperoleh matriks pembobot adalah menentukan kombinasi orde polinomial pada prediktor untuk respon pertama dan respon kedua, serta menentukan *bandwidth* optimal secara serempak yang diperoleh berdasarkan nilai GCV yang paling minimum. Hasil *bandwidth* optimal yang diperoleh adalah 0,23 dengan GCV minimumnya sebesar 9,116725 yang terletak pada kombinasi orde prediktor respon pertama yaitu orde 1 dan respon kedua yaitu orde 3 (Lampiran 7). Dalam pengestimasi ini didapatkan juga nilai *error* pada respon pertama dan respon kedua yang kemudian akan dilanjutkan dengan uji heteroskedastisitas. Analisis heteroskedastisitas dilakukan dengan menggunakan Uji Box M, dengan hipotesis sebagai berikut:

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \dots = \Sigma_8$$

$$H_1 : \text{Minimal ada sepasang } \Sigma_i \text{ yang tidak sama ; } i = 1, 2, \dots, 8$$

Berdasarkan hasil *output* uji Box M (Lampiran 8) diperoleh nilai *p - value* sebesar 0,004466, dengan menggunakan  $\alpha$  sebesar 0,5 maka tolak  $H_0$ .

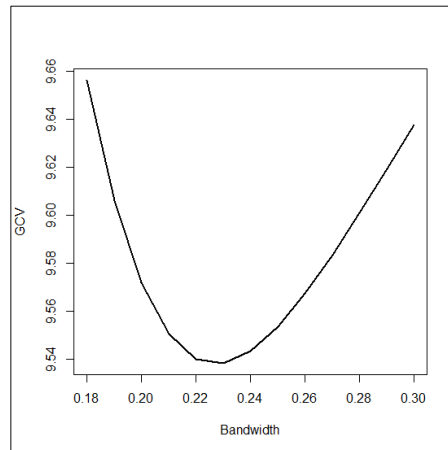
Sehingga dapat disimpulkan bahwa terjadi gejala heteroskedastisitas antara *error* respon pertama dan respon kedua.

Selanjutnya setelah melakukan uji heteroskedastisitas adalah mengestimasi model regresi nonparametrik birespon pada data longitudinal berdasarkan estimator polinomial lokal terboboti dengan menggunakan pembobot  $V^{-1}$  dengan langkah awal menentukan kombinasi orde polinomial pada prediktor respon pertama dan respon kedua. Setelah itu menentukan *bandwidth* optimal secara serempak yang dapat diperoleh berdasarkan hasil GCV paling minimum. Hasil *bandwidth* optimal dan GCV minimum untuk tiap kombinasi orde polinomial (Lampiran 7) adalah sebagai berikut:

**Tabel 4.1** Kombinasi Orde Polinomial dan *Bandwidth* Optimal

Orde Prediktor Respon 1	Orde Prediktor Respon 2	<i>Bandwidth</i> Optimal	GCV	MSE
1	1	0,2	9,696888	7,729851
1	2	0,23	9,538357	7,500822
2	1	1	9,757793	9,015964
2	2	0,25	9,754479	7,525095

Pada Tabel 4.1 Nilai *Bandwidth* optimal pada rentan kombinasi orde 1 dan 2 dengan melihat nilai GCV paling minimum, didapatkan bahwa nilai GCV minimum terletak pada orde prediktor respon 1 yaitu 1, dan orde prediktor respon 2 yaitu 2. Nilai *bandwidth* optimal yang diperoleh dari GCV minimum pada Tabel 4.1 dapat dilihat pada gambar berikut:



**Gambar 4.6** Plot *Bandwidth* terhadap GCV

Berdasarkan Gambar 4.6 merupakan plot *Bandwidth* terhadap GCV, *Bandwidth* optimal diperoleh dengan melihat GCV paling minimum berada. Pada gambar *Bandwidth* optimal yang berada pada 0,23 didapat ketika GCV berada pada 9,538357.

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dipilih model terbaik berdasarkan nilai GCV minimum sebesar 9,538357 yang terletak pada kombinasi orde respon pertama yaitu orde 1 dan respon kedua yaitu orde 2 dengan *bandwidth* optimal yaitu 0,23 sehingga diperoleh hasil estimasi model sebagai berikut (Lampiran 9):

- a. Estimasi model pada Dam Jembatan Cangu di sekitar kandungan DO 2,9 mg/L ( $x_0 = 2,9$ ) untuk masing – masing respon dengan  $2,67 \leq x \leq 3,13$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 5,068256 - 2,706534x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 24,54208 - 12,98051x - 9,108347x^2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pada persamaan (4.1) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,011 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,33 mg/L.

- b. Estimasi model pada Dam Jembatan Pening di sekitar kandungan DO 2,5 mg/L ( $x_0 = 2,5$ ) untuk masing – masing respon dengan  $2,27 \leq x \leq 2,73$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 5,545042 - 0,4679773x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 26,49063 - 1,054401x - 8,796997x^2\end{aligned}\quad (4.2)$$

Pada persamaan (4.2) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,004 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,25 mg/L.

- c. Estimasi model pada Dam Jembatan Jrebeng di sekitar kandungan DO 3 mg/L ( $x_0 = 3$ ) untuk masing – masing respon dengan  $2,77 \leq x \leq 3,23$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 4,805351 - 2,421439x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 22,80411 - 14,1207x - 0,0532693x^2\end{aligned}\quad (4.3)$$

Pada persamaan (4.3) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,0042 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,04 mg/L.

- d. Estimasi model pada Dam Cangkir Tambangan di sekitar kandungan DO 3,5 mg/L ( $x_0 = 3,5$ ) untuk masing – masing respon dengan  $3,27 \leq x \leq 3,73$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 4,539599 - 0,1626312x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 19,32785 - 2,729653x - 1,539388x^2\end{aligned}\quad (4.4)$$

Pada persamaan (4.4) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,0016 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,06 mg/L.

- e. Estimasi model pada Dam Bambi Tambangan di sekitar kandungan DO 3,2 mg/L ( $x_0 = 3,2$ ) untuk masing – masing respon dengan  $2,97 \leq x \leq 3,43$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 4,52895 - 0,6664385x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 19,64303 - 10,18229x - 18,86418x^2\end{aligned}\quad (4.5)$$

Pada persamaan (4.5) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,006 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,13 mg/L.

- f. Estimasi model pada Dam Jembatan Sepanjang di sekitar kandungan DO 3,6 mg/L ( $x_0 = 3,6$ ) untuk masing – masing respon dengan  $3,37 \leq x \leq 3,83$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 4,503004 - 0,7283644x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 19,31325 - 4,10837x - 6,715522x^2\end{aligned}\quad (4.6)$$

Pada persamaan (4.6) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,007 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,16 mg/L.

- g. Pada model pada Dam Bendungan Gunungsari di sekitar kandungan DO 4,4 mg/L ( $x_0 = 4,4$ ) untuk masing – masing respon dengan  $4,17 \leq x \leq 4,63$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 3,54961 - 0,284715x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 16,84322 - 5,157553x + 15,563x^2\end{aligned}\quad (4.7)$$

Pada persamaan (4.7) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,002 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,06 mg/L.

- h. Estimasi model pada Dam Jagir di sekitar kandungan DO 3,8 mg/L ( $x_0 = 3,8$ )

untuk masing – masing respon dengan  $3,57 \leq x \leq 4,03$  :

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(1)} &= 4,271022 - 2,267925x; \\ \hat{y}^{(2)} &= 17,77845 - 7,078509x - 0,1395908x^2\end{aligned}\tag{4.8}$$

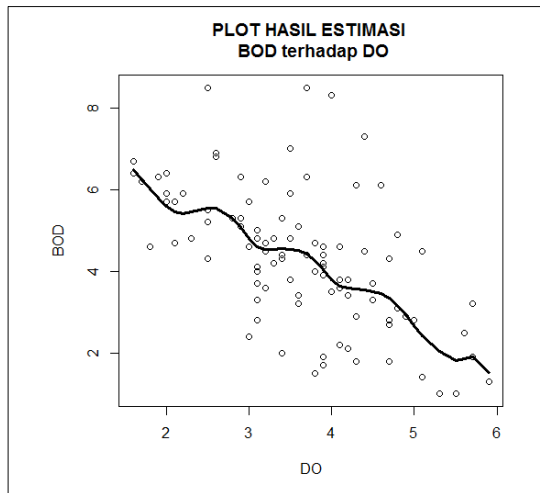
Pada persamaan (4.8) diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,01 mg/L mengakibatkan penurunan BOD sebesar 0,0012 mg/L, dan penurunan COD sebesar 0,02 mg/L, untuk model lengkap dan hasil estimasi dapat dilihat pada Lampiran 8 dan 9. Berdasarkan hasil estimasi model terbaik BOD dan COD pada Dam Sungai Surabaya, diperoleh nilai MSE pada BOD sebesar 1,75, MSE pada COD sebesar 13,24, MSE total sebesar 7,5, dan nilai  $R^2$  sebesar 90,397%.

#### **4.3 Analisis dan Intepretasi Kandungan COD Dan BOD Pada Sungai Surabaya dengan Menggunakan Regresi Nonparametrik Birespon Berdasarkan Estimator polinomial lokal pada Data Longitudinal**

Selanjutnya dapat dibuat kurva hasil observasi serta estimasi BOD dan COD pada Dam Sungai Surabaya, hasil estimasi BOD dan COD dalam satu gambar berdasarkan model yang telah diperoleh, sedangkan hasil plot estimasi

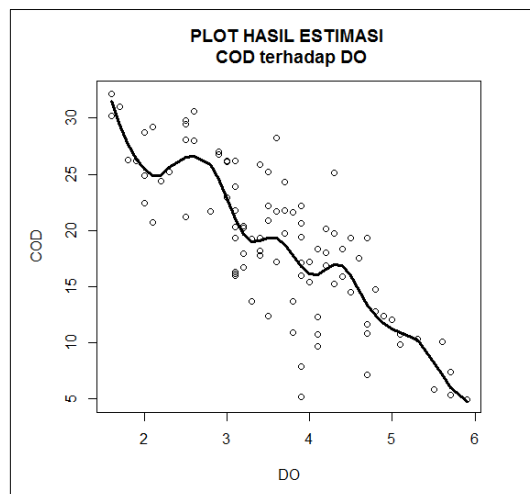


COD dan BOD pada tiap Dam Sungai Surabaya yang dapat dilihat pada gambar – gambar sebagai berikut:



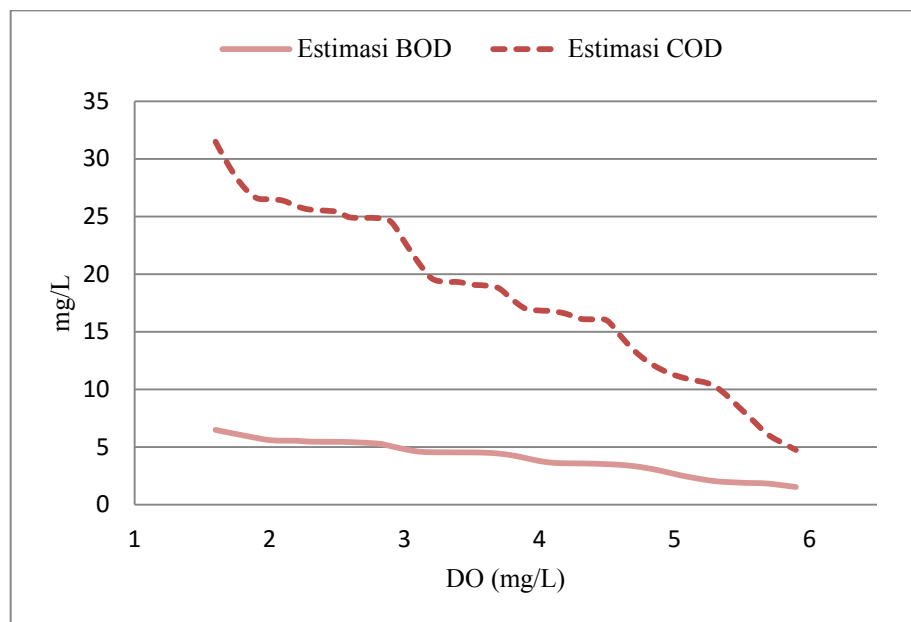
**Gambar 4.7** Plot Hasil Estimasi dan Data Observasi BOD pada Dam di Sungai Surabaya

Pada Gambar 4.7 memperlihatkan hasil bahwa ketika DO naik maka BOD akan menurun, secara rata – rata diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,1 mg/L maka BOD menurun sebesar 1,15 mg/L.



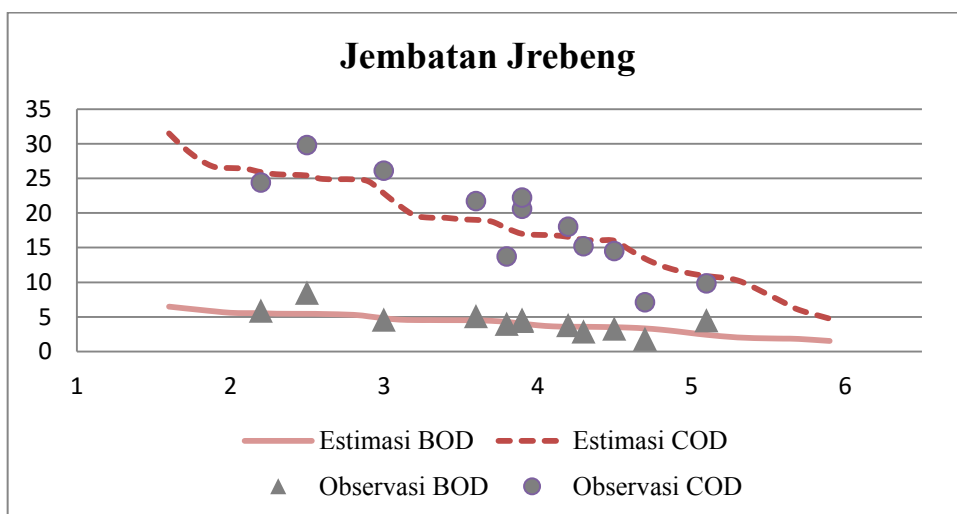
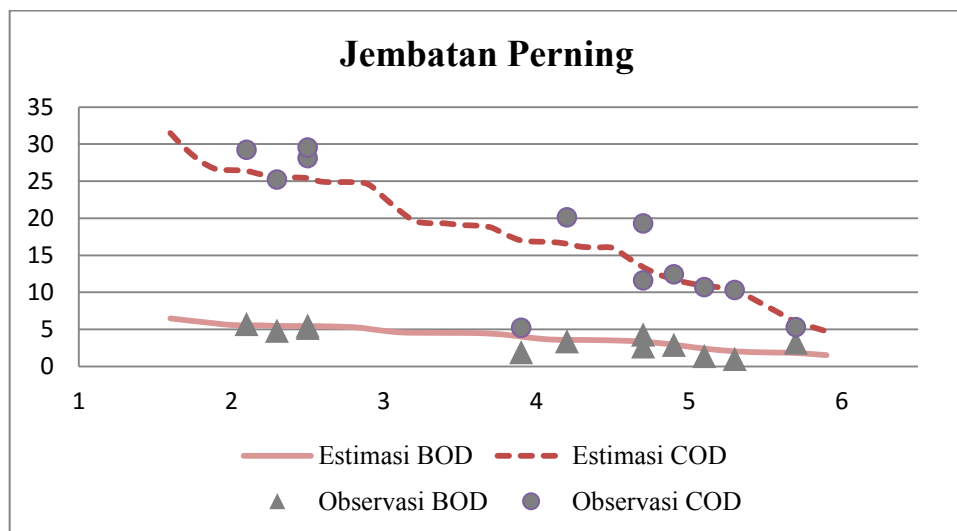
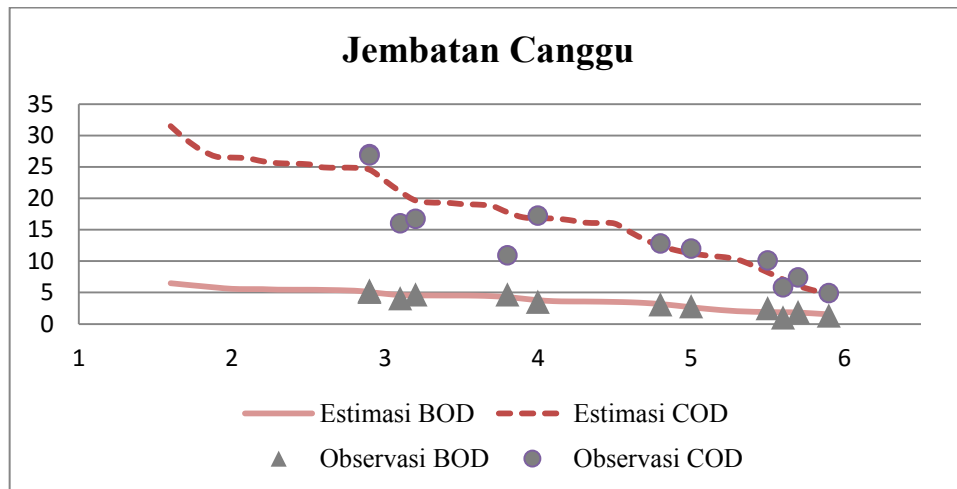
**Gambar 4.8** Plot Hasil Estimasi dan Data Observasi COD pada Dam di Sungai Surabaya

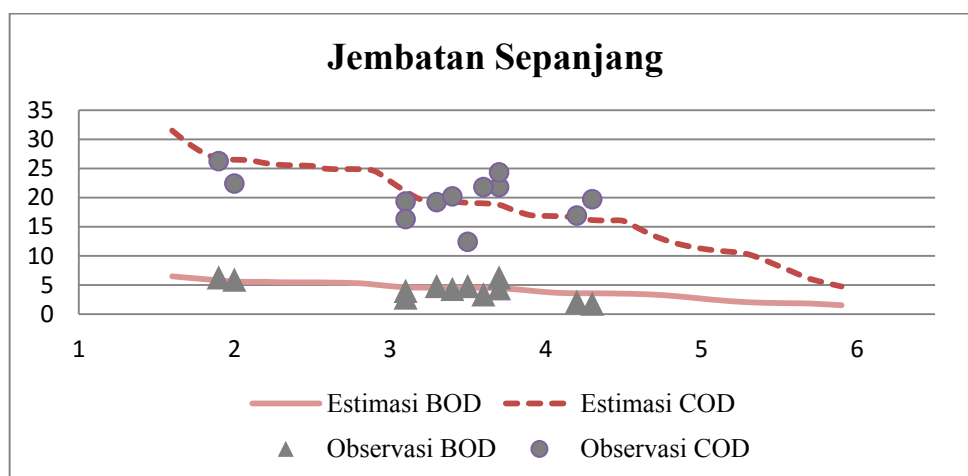
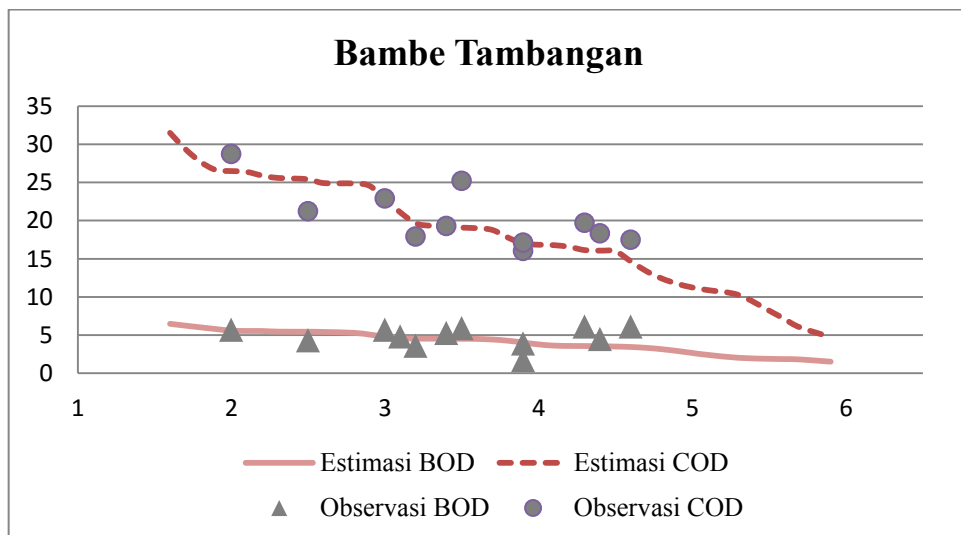
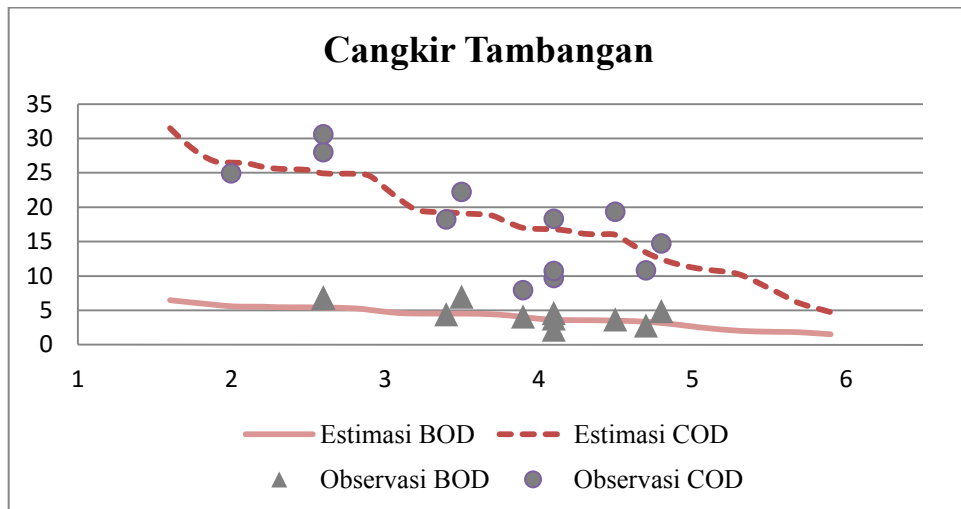
Pada Gambar 4.8 memperlihatkan bahwa hasil ketika DO maka COD akan menurun, secara rata – rata diperoleh bahwa setiap DO naik sebesar 0,1 mg/L maka COD menurun sebesar 6,22 mg/L.

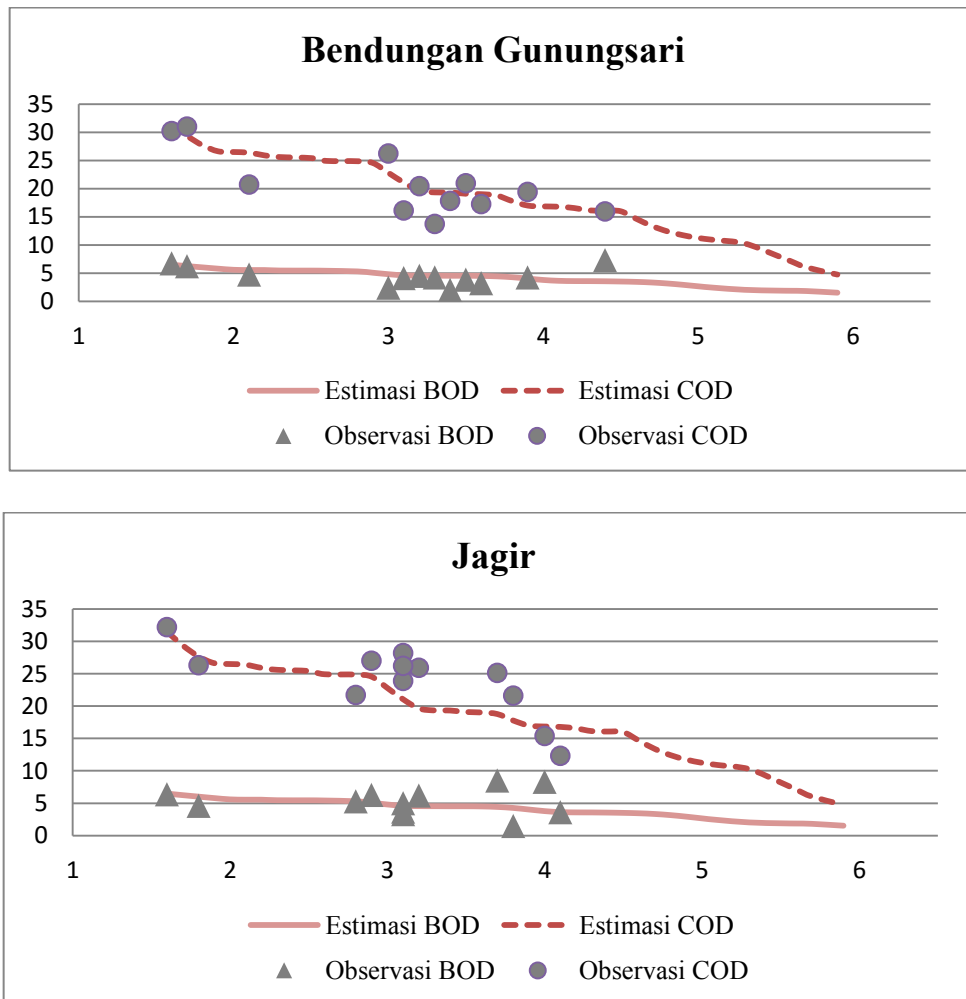


**Gambar 4.9** hasil estimasi BOD dan COD

Pada Gambar 4.9 memperlihatkan bahwa hasil kurva estimasi COD lebih tinggi nilainya dibandingkan dengan hasil kurva estimasi BOD. Hal ini disebabkan organisme yang stabil terhadap reaksi biologis dan mikroorganisme dapat ikut teroksidasi dalam uji COD (Sudarmaji, 1997). Berikut hasil plot estimasi COD dan BOD terhadap DO pada tiap Dam Sungai Surabaya disajikan pada Gambar 4.10 sebagai berikut:







**Gambar 4.10** Estimasi dan Observasi BOD dan COD pada masing – masing Dam Sungai Surabaya

Berdasarkan Gambar 4.10 terlihat perubahan BOD dan COD pada setiap Dam Sungai Surabaya. Pada Dam Jembatan Cangu, Jembatan Pening, Jembatan Jrebeng, Cangkir Tambangan, Bambe Tambangan, Jembatan Sepanjang, dan Bendungan Gunungsari titik observasi mengikuti kurva estimasi dari BOD dan COD di setiap Dam, sedangkan pada Dam Jagir beberapa titik observasi menjauh dari kurva estimasi BOD dan COD. Hal ini disebabkan karena timbunan berbagai macam zat yang membutuhkan

pengoksidasian oksigen yang semakin banyak disetiap aliran sungai dari hulu hingga sebelum Jagir dan mengendap atau berakhir di bagian hilir sungai. Jagir menggunakan oksigen yang ada pada aliran sungai untuk mengoksidasi bahan – bahan organik yang mengendap dan membuat ekosistem pada Jagir kekurangan oksigen. Hal inilah yang menjadikan Dam Jagir memiliki observasi BOD dan COD diatas hasil estimasi.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, kesimpulan yang didapatkan adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan model estimasi yang telah diperoleh setiap DO naik 0,1 mg/L maka BOD menurun sebesar 1,15 mg/L, dan COD menurun 6,22 mg/L.
2. Hasil kurva estimasi pada COD lebih tinggi nilainya dibandingkan dengan hasil kurva estimasi BOD. Hal ini disebabkan organisme yang stabil terhadap reaksi biologis dan mikroorganisme dapat ikut teroksidasi dalam uji COD (Sudarmaji, 1997).
3. Pada plot hasil estimasi dan data observasi COD dan BOD setiap Dam di Sungai Surabaya memperlihatkan bahwa Dam Jagi titik – titik observasi menjauh dari kurva estimasi, . hal ini disebabkan karena posisi Jagir dalam daerah air mengalir Sungai Surabaya terletak di ujung atau hilir sungai Surabaya sebelum dipecah menjadi Sungai Jagir dan Sungai Mas. Timbunan berbagai macam zat pada aliran sungai dari hulu akan mengendap atau berakhir di bagian hilir sungai. Hal ini berarti bahwa air baku yang dipakai PDAM tidak layak untuk dikonsumsi.

## 5.2 Saran

Adapun saran yang dapat diberikan dari skripsi ini adalah:

1. Dalam melakukan pemodelan kualitas Sungai yang diukur dari BOD dan COD pada data pengamatan ditambah, sehingga dapat dibandingkan nilai *in sample* dan *out sample*.
2. Dalam penelitian selanjutnya mengenai aliran sungai sebaiknya menggunakan spasial, karena aliran sungai identik dengan tempat dan waktu yang saling dependen.
3. Untuk PDAM Surabaya sebagai BUMD yang memberikan air bersih kepada masyarakat Surabaya sebaiknya dihimbau kepada masyarakat agar tidak lagi memakai air PDAM untuk air minum, dikarenakan kadar BOD dan COD yang sudah diatas ambang baku PJT. Selain itu dihimbau kepada PDAM untuk mencari sumber air baku lainnya dengan BOD dan COD yang masih dalam baku PJT.



## DAFTAR PUSTAKA

- Andrianto, E., 2014, Penduga Regresi Nonparametrik Dengan Fungsi Kernel Gaussian, *Jurnal Mahasiswa Statistik Universitas Brawijaya Malang*, Malang: Universitas Brawijaya.
- Azizah, Z., 2016, Estimasi Model Regresi Semiparametrik Birespon Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Lokal Linier, *Skripsi*, Surabaya: Universitas Airlangga.
- Bayyinah, 2016, Estimasi Model Regresi Nonparametrik Birespon Pada data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Terboboti, *Skripsi*, Surabaya: Universitas Airlangga.
- BLH, 2009, *Laporan Status Lingkungan Hidup Kota Surabaya*, Surabaya: BLH.
- Greene, W., 2003, *Econometrics Analysis, Fifth Edition*, New Jearsey: Prentice Hall.
- Hardle, W., 1990, *Applied Nonparametric Regression*, New York: Cambridge University Press.
- Hidayati, 2012, Perilaku Masyarakat Dalam Menggunakan Air Sungai Untuk Kebutuhan Rumah Tangga, *Skripsi*, Pontianak: Universitas Tanjungpura.
- Husaini, H., 2010, *Pencemaran Air sungai DAS Brantas Di Surabaya*, [http://www.academia.edu/9478275/Pencemaran-Air\\_SUngai\\_Das\\_Brantas\\_di\\_Surabaya](http://www.academia.edu/9478275/Pencemaran-Air_SUngai_Das_Brantas_di_Surabaya), diakses : 12 Maret 2016.
- PJT, 2016, *Laporan Pemantauan Kualitas Air Di Wllayah Sungai Brantas Dan bengawan Solo*, Surabaya: Jasa Tirta I.
- PU, 2011, *Profil Wilayah Sungai Brantas*, Surabaya: Dinas Pekerjaan Umum.
- Ruppert, D, dkk., 2003, *Semiparametric Regression*, New York: Cambridge University Press.
- Sudarmaji, 1991, *Petunjuk Praktikum Kualitas Air*, Yogyakarta: Fakultas Geografi UGM.
- Sugiyono, 2008, *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif dan R&D*, Bandung: Alfabeta.
- Supranto, J., 1984, *Ekonometrika Jilid Dua*, Jakarta: LPFEUI.

- Tirta, I.M., 2015, *Buku Panduan Program Statistika R*, Jember: Universitas Jember.
- Tunas, G, (2014), *Studi Pencemaran Limbah Domestik Di Kawasan Pantai Kenjeran Surabaya*, [http://www.academia.edu/6200592/Studi\\_Pencemaran\\_Limbah\\_Domestik\\_di\\_Wilayah\\_Pesisir\\_Pantai\\_Kenjeran\\_Surabaya](http://www.academia.edu/6200592/Studi_Pencemaran_Limbah_Domestik_di_Wilayah_Pesisir_Pantai_Kenjeran_Surabaya), diakses: 31 Februari 2016.
- Utami, T.W., 2010, *Estimasi Model Regresi Nonparametrik Pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Kernel Generalized Estimating equation*, *Skripsi*, Surabaya: Universitas Airlangga.

**Lampiran 1. Data COD dan BOD Pada Dam Sungai Surabaya**

NO	Lokasi	Parameter	Tahun 2015											
			jan	feb	mar	apr	mei	jun	jul	ags	sep	okt	nov	des
1	Jembatan Cangu	BOD	1,3	1,9	1	2,5	2,8	3,1	3,5	4,7	4,7	4,1	5,1	5,3
		COD	4,9	7,4	5,8	10,1	12	12,8	17,2	10,9	16,7	16	26,8	27
		DO	5,9	5,7	5,6	5,5	5	4,8	4	3,8	3,2	3,1	2,9	2,9
2	Jembatan Pening	BOD	3,2	1	1,4	2,9	2,7	4,3	3,4	1,9	5,2	5,5	4,8	5,7
		COD	5,3	10,3	10,7	12,4	11,6	19,3	20,1	5,2	28,1	29,5	25,2	29,2
		DO	5,7	5,3	5,1	4,9	4,7	4,7	4,2	3,9	2,5	2,5	2,3	2,1
3	Jembatan Jrebeng	BOD	4,5	1,8	3,3	2,9	3,8	4,6	4,4	4	5,1	4,6	8,5	5,9
		COD	9,8	7,1	14,5	15,2	18	22,2	20,6	13,7	21,7	26,1	29,8	24,4
		DO	5,1	4,7	4,5	4,3	4,2	3,9	3,9	3,8	3,6	3	2,5	2,2
4	Cangkir Tambangan	BOD	4,9	2,8	3,7	3,8	2,2	4,6	4,1	7	4,4	6,9	6,8	6,4
		COD	14,7	10,8	19,3	18,3	10,7	9,7	7,9	22,2	18,2	30,6	28	24,9
		DO	4,8	4,7	4,5	4,1	4,1	4,1	3,9	3,5	3,4	2,6	2,6	2
5	Bambe Tambangan	BOD	6,1	4,5	6,1	3,9	1,7	5,9	5,3	3,6	4,8	5,7	4,3	5,7
		COD	17,5	18,3	19,7	17,1	16	25,2	19,3	17,9	20,3	22,9	21,2	28,7
		DO	4,6	4,4	4,3	3,9	3,9	3,5	3,4	3,2	3,1	3	2,5	2
6	Jembatan Sepanjang	BOD	1,8	2,1	4,4	6,3	3,4	4,8	4,3	4,8	4	2,8	5,9	6,3
		COD	19,7	16,9	24,3	21,8	21,8	12,4	20,2	19,2	19,3	16,3	22,4	26,2
		DO	4,3	4,2	3,7	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,1	3,1	2	1,9
7	Bendungan Gunung Sari	BOD	7,3	4,2	3,2	3,8	2	4,2	4,5	4,1	2,4	4,7	6,2	6,7
		COD	15,9	19,4	17,2	20,9	17,8	13,7	20,4	16,1	26,2	20,7	31	30,2
		DO	4,4	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3	2,1	1,7	1,6
8	Jagir	BOD	3,6	8,3	1,5	8,5	6,2	5	3,7	3,3	6,3	5,3	4,6	6,4
		COD	12,3	15,4	21,6	25,1	25,9	23,9	26,2	28,2	27	21,7	26,3	32,2
		DO	4,1	4	3,8	3,7	3,2	3,1	3,1	3,1	2,9	2,8	1,8	1,6



**Lampiran 2.** Daftar Aliran Sungai Brantas

DAS	Luas (Km <sup>2</sup> )	Panjang(Km)	Lokasi
<i>Upper</i> Kali Brantas	180	15,5	Kota Batu, Kab. Malang
Kali bambang	273	7,5	Malang
Bango Sari	235	12,5	Malang
Kali Metro	399	25	Malang
Kali Amprong	349	20,5	Malang
Kali Ampo	163	9,8	Malang
Kali Manten	176	9,8	Malang
<i>Upper</i> Kali Lesti	228,16	14,6	Malang
<i>Lower</i> Lesti jaru	239	11,5	Malang
Kali Genteng	133	9	Malang
Kondang Banteng	64	5	Malang
Kondang Merak	924	20,5	Malang
Ringin Bandulan	565	8,9	Blitar, malang
Lekso	164,22	24,2	blitar
Lemon Putung	173	12,4	Blitar
Kali Jimbe	12	5,6	Blitar

DAS	Luas (Km <sup>2</sup> )	Panjang(Km)	Lokasi
Putih	4,06	2,6	Blitar
Kali Jari	78	7,6	Blitar
Tengah	17	8	Blitar, Trenggalek
Kali Ngrowo	1470	14	Trenggalek
Kali Abab	554	13,5	Kediri, Blitar
Ngobo Serinjing	647	24	Kediri
Kali catut Kedak	193	17	Kediri
Kali badak Sukorejo	302	16	Kediri
Kali Kanto	568	168,34	Kab. Malang, Kediri, Jombang
Kali Widas	339,55	67	Nganjuk, Madiun, Kediri
Kali Turi baru	19,84	5,75	Jombang
Kali Amunger	269	10	Jombang
Kali Gunting	723	23,3	Jombang
Kali Maryomo	224,4	14	Jombang, Mojokerto

DAS	Luas (Km <sup>2</sup> )	Panjang(Km)	Lokasi
Kali Beng	53,16	10	Jombang, Mojokerto
Kali Brangkal	221	15,5	Mojokerto
Kali Sadar	358	23	Mojokerto
Kali Posong	420	13,5	Mojokerto, Sidoarjo, Pasuruan
Kali Surabaya	1379	42	Mojokerto, Gresik, Surabaya

**Lampiran 3.** Program Membuat Plot BOD terhadap DO dan COD terhadap DO

```
plot<-function(data)
{
x<-data[,4]
y1<-data[,2]
y2<-data[,3]
sx<-sort(x)
w<-order(x)
sy1<-y1[order(x)]
sy2<-y2[order(x)]
win.graph()
plot(sx,sy1,xlab="DO",ylab="BOD")
title(main="PLOT \n BOD terhadap DO",col=2)
win.graph()
plot(sx,sy2,xlab="DO",ylab="COD")
title(main="PLOT \n COD terhadap DO",col=2)
}
```





**Lampiran 5.** Program Estimasi Model regresi Nonparametrik Birespon pada Data Longitudinal Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Lerboboti

```

mp<-function(x,eps=1e-006)
{
  x<-as.matrix(x)
  xsvd<-svd(x)
  diago<-xsvd$d[xsvd$d>eps]
  if(length(diago)==1)
  {
    xplus<-as.matrix(xsvd$v[,1])%*%t(as.matrix(xsvd$u[,1])/diago)
  }
  else
  {
    xplus<-
xsvd$v[,1:length(diago)]%*%diag(1/diago)%*%t(xsvd$u[,1:length(diago)])
  }
  return(xplus)
}
kernel<-function(u)
{
  kh<-(1/sqrt(2*pi))*exp((-1/2)*(u^2))
}
estimasi<-function(data)
{
  z<-data[,1]
  x<-data[,4]
  x1<-unique(sort(x))
  x2<-length(x1)
  y<-c(data[,2],data[,3])
  R<-length(x)
  M<-length(y)
  alfa<-as.numeric(readline("Input nila alfa : "))
  bb<-as.numeric(readline("Input batas bawah bandwidth : "))
  ba<-as.numeric(readline("Input batas atas bandwidth : "))
  inc<-as.numeric(readline("Input nilai increament : "))
  p1<-as.numeric(readline("Input orde respon pertama : "))
  p2<-as.numeric(readline("Input orde respon kedua : "))
  n<-1
  #MENGHITUNG JUMLAH SUBYEK

```

```

for(a in 2:R)
{
    if(z[a]==z[a-1])
    {
        i<-0
    }
    else
    {
        i<-1
        n<-n+i
    }
}
vr<-rep(0,n+1)
r<-rep(0,n)
t<-rep(0,n)
vr[1]<-0
#MENGHITUNG JUMLAH PENGAMATAN SETIAP SUBJEK
for(i in 2:n)
{
    t<-vr[i-1]+1
    repeat
    {
        t<-t+1
        if(z[t]>z[t-1])break
        a<-t
    }
    vr[i]<-a
    r[i-1]<-vr[i]-vr[i-1]
}
r[n]<-R-sum(r[1:(n-1)])
vh<-seq(bb,ba,inc)
nh<-length(vh)
U<-matrix(0,M,(2+p1+p2))
Kh<-matrix(0,M,M)
omegatopi1<-matrix(0,R,p1+1)
omegatopi2<-matrix(0,R,p2+1)
Ah<-matrix(0,M,M)
MSE<-matrix(0,nh,1)

```

```

GCV<-matrix(0,nh,1)
ER<-matrix(0,R,3)
omegatop1<-matrix(0,R,p1+1)
omegatop2<-matrix(0,R,p2+1)
cat("\n=====\nBandwi
dth\t GCV\t\t
MSE\n=====\n")
#MENGHITUNG BANDWIDTH OPTIMAL TANPA PEMBOBOT
for(m in 1:nh)
{
  for(i in 1:R)
  {
    for(j in 1:R)
    {
      for(k in 1:(p1+1))
      {
        U[j,k]<-(x[j]-x[i])^(k-1)
      }
      for(l in 1:(p2+1))
      {
        U[(R+j),(p1+1+l)]<-(x[j]-x[i])^(l-1)
      }
      u<-(x[j]-x[i])/vh[m]
      Kh[j,j]<-(1/vh[m])*kernel(u)
      Kh[j+R,j+R]<-(1/vh[m])*kernel(u)
    }
    e<-matrix(0,2,(2+p1+p2))
    e[1,1]<-1
    e[2,(2+p1)]<-1
    Ah_t0<-e%%mp(t(U)%%Kh%%U)%%t(U)%%Kh
    Ah[i,]<-Ah_t0[1,]
    Ah[R+i,]<-Ah_t0[2,]
    omega<-mp(t(U)%%Kh%%U)%%t(U)%%Kh%%y
    for(s in 1:(p1+1))
    {
      omegatopi1[i,s]<-omega[s]
    }
    for(s in 1:(p2+1))
    {
      omegatopi2[i,s]<-omega[s+p1+1]
    }
  }
}

```

```

    }
  }
  ytopi<-Ah%*%y
  MSE[m]<-(t(y-ytopi)%*%(y-ytopi))/M
  GCV[m]<-MSE[m]/(1-((1/M)*sum(diag(Ah))))^2
  cat(vh[m],"\t\t",GCV[m],"\t",MSE[m],"\n")
}
for(m in 1:nh)
{
  if(GCV[m]==min(GCV))
  {
    hopt<-vh[m]
    mingcv<-GCV[m]
  }
}
plot(vh,GCV,type="l")
#MENGHITUNG ESTIMASI TANPA PEMBOBOT
for(i in 1:R)
{
  for(j in 1:R)
  {
    for(k in 1:(p1+1))
    {
      U[j,k]<-(x[j]-x[i])^(k-1)
    }
    for(l in 1:(p2+1))
    {
      U[(R+j),(p1+1+l)]<-(x[j]-x[i])^(l-1)
    }
    u<-(x[j]-x[i])/hopt
    Kh[j,j]<-(1/hopt)*kernel(u)
    Kh[j+R,j+R]<-(1/hopt)*kernel(u)
  }
  e<-matrix(0,2,(2+p1+p2))
  e[1,1]<-1
  e[2,(2+p1)]<-1
  Ah_t0<-e%*%mp(t(U)%*%Kh%*%U)%*%t(U)%*%Kh
  Ah[i,]<-Ah_t0[1,]
  Ah[R+i,]<-Ah_t0[2,]
  omega<-mp(t(U)%*%Kh%*%U)%*%t(U)%*%Kh%*%y

```

```

    for(s in 1:(p1+1))
    {
        omegatopi1[i,s]<-omega[s]
    }
    for(s in 1:(p2+1))
    {
        omegatopi2[i,s]<-omega[s+p1+1]
    }
}
ytopi<-Ah%*%y
error<-y-ytopi
ER[,1]<-error[1:R]
ER[,2]<-error[(R+1):M]
MSE<-(t(y-ytopi)%*%(y-ytopi))/M
JKT<-t(y-(mean(y))%*%(y-(mean(y))))
JKG<-t(y-ytopi)%*%(y-ytopi)
RK<-1-(JKG/JKT)
ytop1<-sort(ytopi[(1:R)])
ytop2<-sort(ytopi[(R+1):M])
for(g in 0:p1+1)
{
    b1<-omegatopi1[,g]
    omegatop1[,g]<-b1[order(x)]
}
for(g in 0:p2+1)
{
    b2<-omegatopi2[,g]
    omegatop2[,g]<-b2[order(x)]
}
cat("\n=====
=====\\nDO\\t BETATOPI RESPON
1\\t\\tBETATOPI RESPON
2\\n=====
=====\\n")
for(i in 1:R)
{
    cat(" ",x[i], "\\t",omegatop1[i,], "\\t",omegatop2[i,], "\\n")
}

```

```

cat("\n===== \nDO\tYTOPI
RESPON 1\tYTOPI RESPON
2\n===== \n")
for(i in 1:R)
{
cat(" ",x[i], "\t", ytop1[i], "\t ", ytop2[i], "\n")
}
cat("\n\tKESIMPULAN\n===== \nBandwidt
h Optimal : ",hopt, "\nGCV Minimum : ",mingcv, "\nMSE : ",MSE, "\nR-Square :
",RK, "\n")
#DENGAN PEMBOBOT
c<-rep(0,(R+1))
c[1]<-0
for(i in 1:n)
{
c[i+1]<-sum(r[1:i])
ER[(c[i]+1):c[i+1],3]<-rep(i,r[i])
}
#UJI HETEROSKEDASTISITAS PADA ERROR RESPON 1 DAN
RESPON 2
hetero<-boxM(ER[, -3], ER[, 3])
hetero1<-hetero$p.value
print(hetero)
cat("Nilai P-value :", hetero1, "\n")
if(hetero1<alfa)
{
cat("\nTERJADI GEJALA HETEROSKEDASTISITAS\n\n")
c<-rep(0,(R+1))
c[1]<-0
var1<-rep(0,R)
var2<-rep(0,R)
cv<-rep(0,R)
for(i in 1:n)
{
c[i+1]<-sum(r[1:i])
d<-cbind(ER[(c[i]+1):c[i+1],1], ER[(c[i]+1):c[i+1],2])
var3<-var(d)
var1[(c[i]+1):c[i+1]]<-rep(var3[1,1],r[i])
var2[(c[i]+1):c[i+1]]<-rep(var3[2,2],r[i])
cv[(c[i]+1):c[i+1]]<-rep(var3[1,2],r[i])
}
}

```

```

    }
    dvar1<-diag(var1,R)
    dvar2<-diag(var2,R)
    dcv<-diag(cv,R)
    A<-cbind(dvar1,dcv)
    B<-cbind(dcv,dvar2)
    V<-rbind(A,B)
}
else
{
    cat("\nTERJADI GEJALA HOMOSKEDASTISITAS\n\n")
    vars<-rep(0,R)
    vars<-var(ER[,1],ER[,2])
    dvars1<-diag(vars[1,1],R)
    dvars2<-diag(vars[2,2],R)
    dcov<-diag(vars[1,2],R)
    A<-cbind(dvars1,dcov)
    B<-cbind(dcov,dvars2)
    V<-rbind(A,B)
}
#MENGHITUNG BANDWIDTH OPTIMAL DENGAN PEMBOBOT
bb1<-as.numeric(readline("Input batas bawah bandwidth : "))
ba1<-as.numeric(readline("Input batas atas bandwidth : "))
inc1<-as.numeric(readline("Input nilai increament : "))
pp1<-as.numeric(readline("Input orde respon pertama : "))
pp2<-as.numeric(readline("Input orde respon kedua : "))
cat("\nPROGRAM PENGESTIMASIAN DENGAN MENGGUNAKAN
PEMBOBOT\n")
vh1<-seq(bb1,ba1,inc1)
nh1<-length(vh1)
U1<-matrix(0,M,(2+pp1+pp2))
Kh1<-matrix(0,M,M)
omegatopi11<-matrix(0,R,pp1+1)
omegatopi22<-matrix(0,R,pp2+1)
Ah1<-matrix(0,M,M)
MSE1<-matrix(0,nh1,1)
GCV1<-matrix(0,nh1,1)
ER1<-matrix(0,R,3)
omegatop11<-matrix(0,R,pp1+1)
omegatop22<-matrix(0,R,pp2+1)

```



```

cat("\n=====Bandwi
dth\t GCV\tt
MSE\n=====")
for(m in 1:nh1)
{
  for(i in 1:R)
  {
    for(j in 1:R)
    {
      for(k in 1:(pp1+1))
      {
        U1[j,k]<-(x[j]-x[i])^(k-1)
      }
      for(l in 1:(pp2+1))
      {
        U1[(R+j),(pp1+1+l)]<-(x[j]-x[i])^(l-1)
      }
      u1<-(x[j]-x[i])/vh1[m]
      Kh1[j,j]<-(1/vh1[m])*kernel(u1)
      Kh1[j+R,j+R]<-(1/vh1[m])*kernel(u1)
    }
    e1<-matrix(0,2,(2+pp1+pp2))
    e1[1,1]<-1
    e1[2,(2+pp1)]<-1
    Ah_t01<-
e1%%mp(t(U1)%%Kh1%%solve(V)%%U1)%%t(U1)%%Kh1%%solve(
V)
    Ah1[i,]<-Ah_t01[1,]
    Ah1[R+i,]<-Ah_t01[2,]
    omegal<-
mp(t(U1)%%Kh1%%solve(V)%%U1)%%t(U1)%%Kh1%%solve(V)%%
%y
    for(s in 1:(pp1+1))
    {
      omegatopi11[i,s]<-omegal[s]
    }
    for(s in 1:(pp2+1))
    {
      omegatopi22[i,s]<-omegal[s+pp1+1]
    }
  }
}

```

```

    }
    ytopi1<-Ah1%*%y
    MSE1[m]<-(t(y-ytopi1)%*%(y-ytopi1))/M
    GCV1[m]<-MSE1[m]/(1-((1/M)*sum(diag(Ah1))))^2
    cat(vh1[m],"\t\t",GCV1[m],"\t",MSE1[m],"\n")
  }
  for(m in 1:nh1)
  {
    if(GCV1[m]==min(GCV1))
    {
      hopt1<-vh1[m]
      mingcv1<-GCV1[m]
    }
  }
  plot(vh1,GCV1,type="l",xlab="Bandwidth",ylab="GCV",lwd=2)
  for(i in 1:R)
  {
    for(j in 1:R)
    {
      for(k in 1:(pp1+1))
      {
        U1[j,k]<-(x[j]-x[i])^(k-1)
      }
      for(l in 1:(pp2+1))
      {
        U1[(R+j),(pp1+1+l)]<-(x[j]-x[i])^(l-1)
      }
      u1<-(x[j]-x[i])/hopt1
      Kh1[j,j]<-(1/hopt1)*kernel(u1)
      Kh1[j+R,j+R]<-(1/hopt1)*kernel(u1)
    }
    e1<-matrix(0,2,(2+pp1+pp2))
    e1[1,1]<-1
    e1[2,(2+pp1)]<-1
    Ah_t01<-
e1%*%mp(t(U1)%*%Kh1%*%solve(V)%*%U1)%*%t(U1)%*%Kh1%*%solve(
V)

    Ah1[i,]<-Ah_t01[1,]
    Ah1[R+i,]<-Ah_t01[2,]
  }
}

```

```

        omega1<-
mp(t(U1)%*%Kh1%*%solve(V)%*%U1)%*%t(U1)%*%Kh1%*%solve(V)%*
%y
        for(s in 1:(pp1+1))
        {
                omegatopi11[i,s]<-omega1[s]
        }
        for(s in 1:(pp2+1))
        {
                omegatopi22[i,s]<-omega1[s+pp1+1]
        }
}
ytopi1<-Ah1%*%y
error1<-y-ytopi1
ER1[,1]<-error1[1:R]
ER1[,2]<-error1[(R+1):M]
MSE1<-(t(y-ytopi1)%*%(y-ytopi1))/M
JKT1<-t(y-(mean(y)))*%*(y-(mean(y)))
JKG1<-t(y-ytopi1)%*%(y-ytopi1)
RK1<-1-(JKG1/JKT1)
ytop11<-sort(unique(ytopi1[(1:R)]))
ytop22<-sort((ytopi1[(R+1):M]))
sx<-sort(x)
for(g in 0:pp1+1)
{
        b1<-omegatopi11[,g]
        omegatop11[,g]<-b1[order(x)]
}
for(g in 0:pp2+1)
{
        b2<-omegatopi22[,g]
        omegatop22[,g]<-b2[order(x)]
}
y1<-data[,2]
y2<-data[,3]
sy1<-y1[order(x)]
sy2<-y2[order(x)]
ytopi11<-ytopi1[(1:R)]
ytopi22<-ytopi1[(R+1):M]
MSE11<-(t(y1-ytopi11)%*%(y1-ytopi11))/R

```



**Lampiran 6.** Output OSS – R Uji Korelasi Pearson

```
> korelasi(data)
```

```
Input nilai alfa : 0.05
```

```
UJI KORELASI PEARSON
```

```
Pearson's product-moment correlation
```

```
data: data[, 2] and data[, 3]
```

```
t = 7.3827, df = 94, p-value = 6.16e-11
```

```
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.4613784 0.7189840
```

```
sample estimates:
```

```
cor
```

```
0.6058255
```

```
Nilai P-value = 6.15983e-11
```

```
Tolak H0, sehingga kedua variabel respon saling berkorelasi
```

**Lampiran 7.** Output OSS – R Penentuan *Bandwidth* Optimal

Input orde respon pertama : 1

Input orde respon kedua : 1

Bandwidth	GCV	MSE
0.18	9.70453	7.564787
0.19	9.697157	7.648611
0.2	9.696888	7.729851
0.21	9.701571	7.807981
0.22	9.709566	7.882647
0.23	9.719628	7.953644
0.24	9.730817	8.020882
0.25	9.742426	8.084358

## KESIMPULAN

Bandwidth Optimal : 0.2

GCV Minimum : 9.696888

Input orde respon pertama : 1

Input orde respon kedua : 2

## PROGRAM PENGESTIMASIAN DENGAN MENGGUNAKAN PEMBOBOT

Bandwidth	GCV	MSE
0.2	9.571718	7.28738

0.21	9.550463	7.358152
0.22	9.540059	7.429446
0.23	9.538357	7.500822
0.24	9.543416	7.571799
0.25	9.553533	7.641899

KESIMPULAN

=====  
 Bandwidth Optimal : 0.23

GCV Minimum : 9.538357

Input orde respon pertama : 2

Input orde respon kedua : 1

PROGRAM PENGESTIMASIAN DENGAN MENGGUNAKAN PEMBOBOT

=====  
 =====

Bandwidth	GCV	MSE
0.9	9.788767	9.001132
0.91	9.78536	9.002829
0.92	9.782028	9.004474
0.93	9.778769	9.006068
0.94	9.775581	9.007615
0.95	9.77246	9.009114
0.96	9.769404	9.010569
0.97	9.766412	9.01198
0.98	9.763481	9.013348
0.99	9.760608	9.014676
1	9.757793	9.015964

KESIMPULAN

---

---

Bandwidth Optimal : 1

GCV Minimum : 9.757793

Input orde respon pertama : 2

Input orde respon kedua : 2

PROGRAM PENGESTIMASIAN DENGAN MENGGUNAKAN PEMBOBOT

---

---

Bandwidth	GCV	MSE
0.21	9.834792	7.259761
0.22	9.798499	7.324695
0.23	9.774564	7.390917
0.24	9.760583	7.4579
0.25	9.754479	7.525095
0.26	9.754531	7.591997
0.27	9.759348	7.658171

KESIMPULAN

---

---

Bandwidth Optimal : 0.25

GCV Minimum : 9.754479



**Lampiran 8.** Output OSS – R Model Regresi Nonparametrik Birespon pada Dam Sungai Surabaya Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Terboboti

> estimasi(data)

Input nilai alfa : 0.05

Input batas bawah bandwidth : 0.2

Input batas atas bandwidth : 0.25

Input nilai increment : 0.01

Input orde respon pertama : 1

Input orde respon kedua : 3

=====

Bandwidth	GCV	MSE
-----------	-----	-----

=====

0.2	9.172429	6.892952
0.21	9.139913	6.950527
0.22	9.121791	7.011567
0.23	9.116725	7.076244
0.24	9.122571	7.143952
0.25	9.136826	7.213639

=====

==

DO	BETATOPI RESPON 1	BETATOPI RESPON 2
----	-------------------	-------------------

=====

==

4.8	6.356104	-1.971597	31.41578	-17.5327	-8.809159	32.54333
3.1	6.356104	-1.971597	31.41578	-17.5327	-8.809159	32.54333

3.2 6.127342 -1.566568 29.44653 -19.23166 13.6024 11.30394

5.5 5.957583 -1.240618 27.55158 -15.83591 21.52815 1.020617

2.9 5.830871 -0.9610588 26.13584 -11.05322 23.20899 -3.653544

4 5.740497 -0.642201 25.24324 -5.986994 22.68124 -7.488799

3.8 5.740497 -0.642201 25.24324 -5.986994 22.68124 -7.488799

5.7 5.740497 -0.642201 25.24324 -5.986994 22.68124 -7.488799

5.9 5.694588 -0.216585 24.89913 -0.5379963 20.42057 -14.92545

2.9 5.694588 -0.216585 24.89913 -0.5379963 20.42057 -14.92545

5.6 5.699175 0.2361727 25.12271 4.419902 15.06191 -24.31387

5 5.741093 0.5348245 25.71341 7.61162 7.474587 -30.94489

3.9 5.817995 -0.5028381 27.32618 5.326674 -11.98636 -24.08339

2.5 5.817995 -0.5028381 27.32618 5.326674 -11.98636 -24.08339

4.2 5.817995 -0.5028381 27.32618 5.326674 -11.98636 -24.08339

4.7 5.817995 -0.5028381 27.32618 5.326674 -11.98636 -24.08339

4.9 5.75532 -1.734482 27.59575 -0.5088694 -18.07743 -10.68514

2.5 5.75532 -1.734482 27.59575 -0.5088694 -18.07743 -10.68514

5.7 5.340533 -3.063156 26.40625 -12.9238 -18.77111 19.97141

2.3 5.021441 -2.919831 25.15085 -19.70438 -13.14082 44.49826

5.3 5.021441 -2.919831 25.15085 -19.70438 -13.14082 44.49826

5.1 5.021441 -2.919831 25.15085 -19.70438 -13.14082 44.49826

4.7 4.695154 -2.068721 23.11728 -22.36869 0.9538248 53.0754

2.1 4.695154 -2.068721 23.11728 -22.36869 0.9538248 53.0754

4.3 4.695154 -2.068721 23.11728 -22.36869 0.9538248 53.0754

2.2 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

3.6 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

4.2 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

3.9 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

3.8 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

3 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

5.1 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

4.7 4.484872 -0.8527744 20.96614 -17.35917 15.89511 32.726

2.5 4.431579 0.06913961 19.66219 -7.969734 23.08384 -5.078855

4.5 4.431579 0.06913961 19.66219 -7.969734 23.08384 -5.078855

3.9 4.431579 0.06913961 19.66219 -7.969734 23.08384 -5.078855

4.1 4.431579 0.06913961 19.66219 -7.969734 23.08384 -5.078855

4.5 4.464985 0.4781115 19.29675 1.215739 20.36135 -42.22982

2.6 4.464985 0.4781115 19.29675 1.215739 20.36135 -42.22982

2.6 4.51337 0.4363361 19.66883 6.24021 6.769158 -58.79593

3.4 4.51337 0.4363361 19.66883 6.24021 6.769158 -58.79593

3.5 4.51337 0.4363361 19.66883 6.24021 6.769158 -58.79593

4.1 4.51337 0.4363361 19.66883 6.24021 6.769158 -58.79593

4.1 4.533557 0.01872242 20.24321 2.865875 -10.03022 -39.07227

3.9 4.533557 0.01872242 20.24321 2.865875 -10.03022 -39.07227

4.8 4.533557 0.01872242 20.24321 2.865875 -10.03022 -39.07227

4.7 4.533557 0.01872242 20.24321 2.865875 -10.03022 -39.07227

2 4.501939 -0.6363433 20.0943 -6.123511 -15.54175 0.6609852

3.2 4.501939 -0.6363433 20.0943 -6.123511 -15.54175 0.6609852

4.3 4.501939 -0.6363433 20.0943 -6.123511 -15.54175 0.6609852

2 4.408812 -1.275893 19.03421 -13.78528 -8.131717 34.01476

3 4.408812 -1.275893 19.03421 -13.78528 -8.131717 34.01476

3.5 4.408812 -1.275893 19.03421 -13.78528 -8.131717 34.01476

2.5 4.262937 -1.632114 17.46523 -16.4085 5.946529 49.52227

3.4 4.262937 -1.632114 17.46523 -16.4085 5.946529 49.52227

4.6 4.262937 -1.632114 17.46523 -16.4085 5.946529 49.52227

3.9 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

4.4 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

3.9 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

3.1 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

3.1 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

3.7 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

2 4.100128 -1.562339 16.0115 -11.83704 18.69322 36.29812

3.6 3.970581 -1.129948 15.43501 -2.059966 21.04911 -1.396663

3.5 3.970581 -1.129948 15.43501 -2.059966 21.04911 -1.396663

3.3 3.906744 -0.5322819 15.85771 6.582341 12.31148 -36.91574

1.9 3.906744 -0.5322819 15.85771 6.582341 12.31148 -36.91574

4.2 3.906744 -0.5322819 15.85771 6.582341 12.31148 -36.91574

3.4 3.906744 -0.5322819 15.85771 6.582341 12.31148 -36.91574

4.3 3.906921 0.007590217 16.83252 10.22095 -2.928908 -54.72777

3.7 3.906921 0.007590217 16.83252 10.22095 -2.928908 -54.72777

3.1 3.906921 0.007590217 16.83252 10.22095 -2.928908 -54.72777

3.5 3.935284 0.2416354 17.67396 6.561066 -17.9167 -45.08894

1.6 3.935284 0.2416354 17.67396 6.561066 -17.9167 -45.08894

3.2 3.935284 0.2416354 17.67396 6.561066 -17.9167 -45.08894

1.7 3.940154 0.01161971 17.60003 -2.793715 -22.3498 -11.03828

3.1 3.940154 0.01161971 17.60003 -2.793715 -22.3498 -11.03828

2.1 3.887411 -0.5898852 16.59702 -11.09725 -15.07105 20.72974  
 3.3 3.887411 -0.5898852 16.59702 -11.09725 -15.07105 20.72974  
 3.9 3.766495 -1.309303 15.17692 -14.78225 -4.029836 33.9064  
 3.4 3.582671 -1.894757 13.7469 -13.74614 4.570255 27.63325  
 4.4 3.582671 -1.894757 13.7469 -13.74614 4.570255 27.63325  
 3.6 3.582671 -1.894757 13.7469 -13.74614 4.570255 27.63325  
 3 3.582671 -1.894757 13.7469 -13.74614 4.570255 27.63325  
 3.2 3.359223 -2.216862 12.71619 -9.797089 6.222541 8.457464  
 1.8 3.359223 -2.216862 12.71619 -9.797089 6.222541 8.457464  
 2.9 3.117385 -2.383397 12.02985 -7.033058 3.884997 -4.003889  
 3.1 2.853757 -2.570621 11.39902 -6.211919 1.926418 -5.779444  
 2.8 2.575492 -2.70546 10.74878 -6.411984 0.7156006 -3.173235  
 3.1 2.575492 -2.70546 10.74878 -6.411984 0.7156006 -3.173235  
 1.6 2.150515 -1.831852 9.340077 -6.883493 0.9153621 0.9044083  
 3.8 1.987512 0.05183956 8.106177 -5.989067 -1.60329 -5.456766  
 3.1 2.023463 0.6331951 7.546236 -6.082221 -6.222177 -11.76796  
 4.1 2.074029 0.4105999 6.904249 -7.633249 -12.18373 -15.83369  
 4 2.074029 0.4105999 6.904249 -7.633249 -12.18373 -15.83369  
 3.7 1.690205 -1.875897 4.824868 -11.08503 -5.488026 1.484897

=====

DO YTOPI RESPON 1 YTOPI RESPON 2

=====

4.8 1.690205 4.824868  
 3.1 1.987512 6.904249

3.2	2.023463	6.904249
5.5	2.074029	7.546236
2.9	2.074029	8.106177
4	2.150515	9.340077
3.8	2.575492	10.74878
5.7	2.575492	10.74878
5.9	2.853757	11.39902
2.9	3.117385	12.02985
5.6	3.359223	12.71619
5	3.359223	12.71619
3.9	3.582671	13.7469
2.5	3.582671	13.7469
4.2	3.582671	13.7469
4.7	3.582671	13.7469
4.9	3.766495	15.17692
2.5	3.887411	15.43501
5.7	3.887411	15.43501
2.3	3.906744	15.85771
5.3	3.906744	15.85771
5.1	3.906744	15.85771
4.7	3.906744	15.85771
2.1	3.906921	16.0115
4.3	3.906921	16.0115
2.2	3.906921	16.0115
3.6	3.935284	16.0115

4.2	3.935284	16.0115
3.9	3.935284	16.0115
3.8	3.940154	16.0115
3	3.940154	16.59702
5.1	3.970581	16.59702
4.7	3.970581	16.83252
2.5	4.100128	16.83252
4.5	4.100128	16.83252
3.9	4.100128	17.46523
4.1	4.100128	17.46523
4.5	4.100128	17.46523
2.6	4.100128	17.60003
2.6	4.100128	17.60003
3.4	4.262937	17.67396
3.5	4.262937	17.67396
4.1	4.262937	17.67396
4.1	4.408812	19.03421
3.9	4.408812	19.03421
4.8	4.408812	19.03421
4.7	4.431579	19.29675
2	4.431579	19.29675
3.2	4.431579	19.66219
4.3	4.431579	19.66219
2	4.464985	19.66219
3	4.464985	19.66219

3.5	4.484872	19.66883
2.5	4.484872	19.66883
3.4	4.484872	19.66883
4.6	4.484872	19.66883
3.9	4.484872	20.0943
4.4	4.484872	20.0943
3.9	4.484872	20.0943
3.1	4.484872	20.24321
3.1	4.501939	20.24321
3.7	4.501939	20.24321
2	4.501939	20.24321
3.6	4.51337	20.96614
3.5	4.51337	20.96614
3.3	4.51337	20.96614
1.9	4.51337	20.96614
4.2	4.533557	20.96614
3.4	4.533557	20.96614
4.3	4.533557	20.96614
3.7	4.533557	20.96614
3.1	4.695154	23.11728
3.5	4.695154	23.11728
1.6	4.695154	23.11728
3.2	5.021441	24.89913
1.7	5.021441	24.89913
3.1	5.021441	25.12271



2.1	5.340533	25.15085
3.3	5.694588	25.15085
3.9	5.694588	25.15085
3.4	5.699175	25.24324
4.4	5.740497	25.24324
3.6	5.740497	25.24324
3	5.740497	25.71341
3.2	5.741093	26.13584
1.8	5.75532	26.40625
2.9	5.75532	27.32618
3.1	5.817995	27.32618
2.8	5.817995	27.32618
3.1	5.817995	27.32618
1.6	5.817995	27.55158
3.8	5.830871	27.59575
3.1	5.957583	27.59575
4.1	6.127342	29.44653
4	6.356104	31.41578
3.7	6.356104	31.41578

KESIMPULAN

=====

Bandwidth Optimal : 0.23

GCV Minimum : 9.116725

MSE : 7.076244

R-Square : 0.9094049

Box's M-test for Homogeneity of Covariance Matrices

data: ER[, -3]

Chi-Sq (approx.) = 41.794, df = 21, p-value = 0.004466

Nilai P-value : 0.004465612

TERJADI GEJALA HETEROSKEDASTISITAS

Input batas bawah bandwidth : 0.2

Input batas atas bandwidth : 0.25

Input nilai increament : 0.01

Input orde respon pertama : 1

Input orde respon kedua : 2

PROGRAM PENGESTIMASIAN DENGAN MENGGUNAKAN PEMBOBOT

=====

Bandwidth	GCV	MSE
0.2	9.571718	7.28738
0.21	9.550463	7.358152
0.22	9.540059	7.429446

0.23 9.538357 7.500822  
 0.24 9.543416 7.571799  
 0.25 9.553533 7.641899

=====  
 ==

DO OMEGATOPI RESPON 1 OMEGATOPI RESPON 2

=====  
 ==

1.6 6.484467 -2.246638 31.49262 -23.2009 18.75799  
 1.7 6.244073 -2.142775 29.36696 -19.34607 18.61375  
 1.8 6.01646 -2.043512 27.67878 -15.3775 17.06415  
 1.9 5.7927 -1.815589 26.37932 -11.8295 15.92205  
 2 5.591938 -1.322866 25.41542 -8.31595 15.79443  
 2.1 5.461527 -0.6824869 24.8611 -4.51434 15.16548  
 2.2 5.419252 -0.1474544 24.91674 -0.8381972 10.49274  
 2.3 5.448009 0.1859799 25.59903 1.256556 0.8733188  
 2.5 5.545042 -0.4679773 26.49063 -1.054401 -8.796997  
 2.6 5.542567 -1.26198 26.62211 -3.582536 -10.84964  
 2.8 5.301213 -2.483148 25.89678 -10.04289 -13.96463  
 2.9 5.068256 -2.706534 24.54208 -12.98051 -9.108347  
 3 4.805351 -2.421439 22.80411 -14.1207 -0.05326933  
 3.1 4.604486 -1.607465 21.06053 -13.26041 11.23765  
 3.2 4.525483 -0.6664385 19.64303 -10.18229 18.86418  
 3.3 4.528952 -0.0503022 19.00912 -5.928024 16.06549  
 3.4 4.546135 0.09966907 19.08612 -3.142656 7.000832

3.5 4.539599 -0.1626312 19.32785 -2.729653 -1.539388  
 3.6 4.503004 -0.7283644 19.31325 -4.10837 -6.715522  
 3.7 4.425069 -1.494189 18.76729 -6.078434 -6.189679  
 3.8 4.271022 -2.267925 17.77845 -7.078509 -0.1395908  
 3.9 4.029924 -2.637457 16.78587 -6.38506 6.617816  
 4 3.783202 -2.334213 16.13137 -4.240451 9.904445  
 4.1 3.630397 -1.555782 16.06841 -1.672329 6.530423  
 4.2 3.584006 -0.7370259 16.55079 -0.5806124 -2.88059  
 4.3 3.574452 -0.2843072 16.98661 -2.023643 -11.81679  
 4.4 3.54961 -0.284715 16.84322 -5.157553 -15.563  
 4.5 3.509448 -0.5989241 15.98033 -8.184769 -12.38641  
 4.6 3.447641 -1.103045 14.65546 -9.463686 -3.658771  
 4.7 3.336833 -1.649506 13.3866 -8.906784 4.721362  
 4.8 3.16262 -2.117142 12.4262 -7.661539 8.551001  
 4.9 2.93022 -2.498721 11.73859 -6.671352 7.853732  
 5 2.662173 -2.679175 11.23962 -6.176434 4.31194  
 5.1 2.413114 -2.493242 10.90028 -5.946927 -0.3515781  
 5.3 2.034886 -1.345285 10.26741 -7.248922 -10.33433  
 5.5 1.816243 0.415886 8.212647 -8.783752 -9.645538  
 5.6 1.864668 0.6759468 7.097523 -9.116458 -5.39613  
 5.7 1.898741 0.0306748 6.015215 -8.920649 1.921443  
 5.9 1.526402 -1.876745 4.741094 -0.1592775 22.05256

=====

DO	YTOPI RESPON 1	YTOPI RESPON 2
----	----------------	----------------

=====

1.6	6.484467	31.49262
1.7	6.244073	29.36696
1.8	6.01646	27.67878
1.9	5.7927	26.37932
2	5.591938	25.41542
2.1	5.461527	24.8611
2.2	5.419252	24.91674
2.3	5.448009	25.59903
2.5	5.545042	26.49063
2.6	5.542567	26.62211
2.8	5.301213	25.89678
2.9	5.068256	24.54208
3	4.805351	22.80411
3.1	4.604486	21.06053
3.2	4.525483	19.64303
3.3	4.528952	19.00912
3.4	4.546135	19.08612
3.5	4.539599	19.32785
3.6	4.503004	19.31325
3.7	4.425069	18.76729
3.8	4.271022	17.77845
3.9	4.029924	16.78587
4	3.783202	16.13137

4.1	3.630397	16.06841
4.2	3.584006	16.55079
4.3	3.574452	16.98661
4.4	3.54961	16.84322
4.5	3.509448	15.98033
4.6	3.447641	14.65546
4.7	3.336833	13.3866
4.8	3.16262	12.4262
4.9	2.93022	11.73859
5	2.662173	11.23962
5.1	2.413114	10.90028
5.3	2.034886	10.26741
5.5	1.816243	8.212647
5.6	1.864668	7.097523
5.7	1.898741	6.015215
5.9	1.526402	4.741094

KESIMPULAN

=====

Bandwidth Optimal : 0.23

GCV Minimum : 9.538357

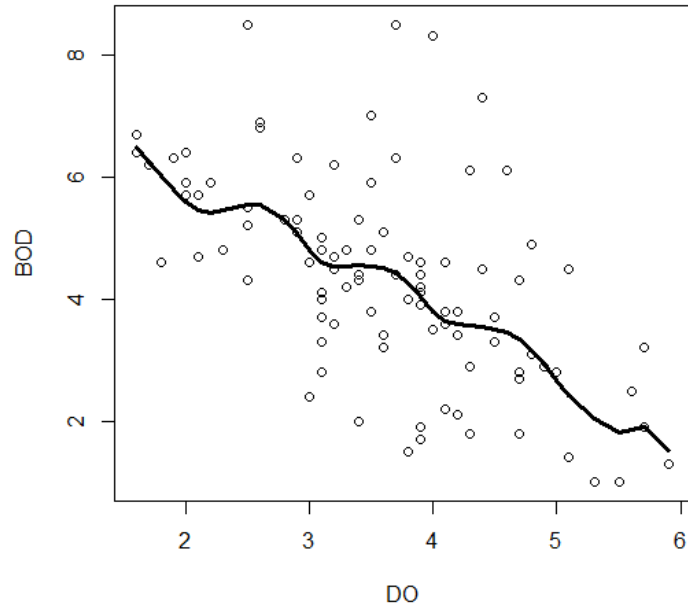
MSE BOD : 1.757379

MSE COD : 13.24426

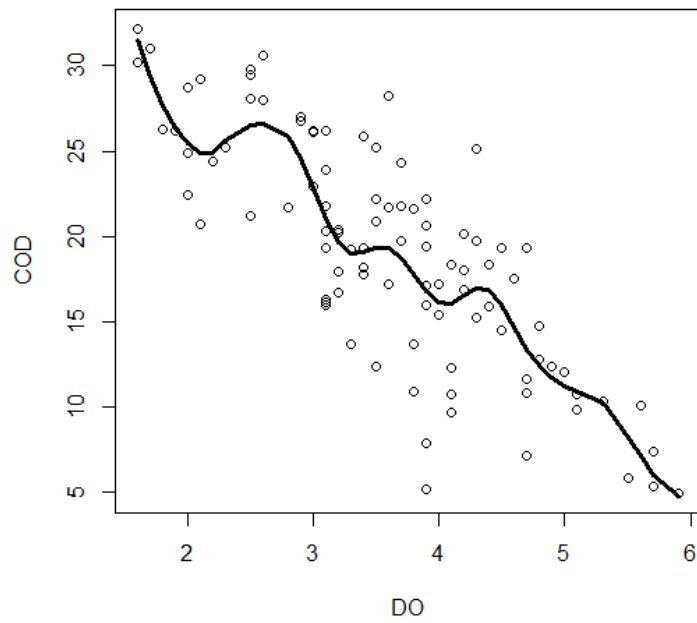
MSE : 7.500822

R-Square : 0.9039692

**PLOT HASIL ESTIMASI  
BOD terhadap DO**



**PLOT HASIL ESTIMASI  
COD terhadap DO**



**Lampiran 9.** Hasil Estimasi BOD dan COD pada Dam Sungai Surabaya

DO (mg/L)	BOD (mg/L)		COD (mg/L)	
	Pengamatan	Estimasi	Pengamatan	Estimasi
1,6	6,4	6,484467	32,2	31,49262
1,7	6,2	6,244073	31	29,36696
1,8	4,6	6,01646	26,3	27,67878
1,9	6,3	5,7927	26,2	26,62211
2	5,7	5,591938	28,7	26,49063
2,1	5,7	5,545042	29,2	26,37932
2,2	5,9	5,542567	24,4	25,89678
2,3	4,8	5,461527	25,2	25,59903
2,5	5,2	5,448009	28,1	25,41542
2,6	6,8	5,419252	28	24,91674
2,8	5,3	5,301213	21,7	24,8611
2,9	5,1	5,068256	26,8	24,54208
3	5,7	4,805351	22,9	22,80411
3,1	4,8	4,604486	20,3	21,06053
3,2	4,5	4,546135	20,4	19,64303
3,3	4,8	4,539599	19,2	19,32785
3,4	4,4	4,528952	18,2	19,31325
3,5	3,8	4,525483	20,9	19,08612
3,6	3,2	4,503004	17,2	19,00912
3,7	8,5	4,425069	19,7	18,76729
3,8	4	4,271022	13,7	17,77845
3,9	3,9	4,029924	17,1	16,98661
4	3,5	3,783202	17,2	16,84322
4,1	3,8	3,630397	18,3	16,78587
4,2	2,1	3,584006	16,9	16,55079
4,3	2,9	3,574452	15,2	16,13137
4,4	4,5	3,54961	15,9	16,06841
4,5	3,3	3,509448	14,5	15,98033
4,6	6,1	3,447641	17,5	14,65546
4,7	2,8	3,336833	10,8	13,3866
4,8	3,1	3,16262	12,8	12,4262
4,9	2,9	2,93022	12,4	11,73859
5	2,8	2,662173	12	11,23962
5,1	1,4	2,413114	10,7	10,90028
5,3	1	2,034886	10,3	10,26741
5,5	2,5	1,898741	10,1	8,212647
5,6	1	1,864668	5,8	7,097523
5,7	1,9	1,816243	5,3	6,015215
5,9	1,3	1,526402	4,9	4,741094



**Lampiran 10.** Model Estimasi BOD dan COD Dam di Sungai Surabaya

## 1. Hasil Estimasi Model BOD

$t_0$	Model	$t_0 - h < t < t_0 + h$
1,6	$6,484467 - 2,246638x$	$1,37 < t < 1,83$
1,7	$6,244073 - 2,142775x$	$1,47 < t < 1,93$
1,8	$6,01646 - 2,043512x$	$1,57 < t < 2,03$
1,9	$5,7927 - 1,815589x$	$1,67 < t < 2,13$
2	$5,591938 - 1,322866x$	$1,77 < t < 2,23$
2,1	$5,461527 - 0,6824869x$	$1,87 < t < 2,33$
2,2	$5,419252 - 0,1474544x$	$1,97 < t < 2,43$
2,3	$5,448009 - 0,1859799x$	$2,07 < t < 2,53$
2,5	$5,545042 - 0,4679773x$	$2,27 < t < 2,73$
2,6	$5,542567 - 1,26198x$	$2,37 < t < 2,83$
2,8	$5,301213 - 2,483148x$	$2,57 < t < 3,03$
2,9	$5,068256 - 2,706534x$	$2,67 < t < 3,13$
3	$4,805351 - 2,421439x$	$2,77 < t < 3,23$
3,1	$4,604486 - 1,607465x$	$2,87 < t < 3,33$
3,2	$4,525483 - 0,6664385x$	$2,97 < t < 3,43$
3,3	$4,528952 - 0,0503022x$	$3,07 < t < 3,53$
3,4	$4,546135 - 0,09966907x$	$3,17 < t < 3,63$
3,5	$4,539599 - 0,1626312x$	$3,27 < t < 3,73$
3,6	$4,503004 - 0,7283644x$	$3,37 < t < 3,83$
3,7	$4,425069 - 1,494189x$	$3,47 < t < 3,93$
3,8	$4,271022 - 2,267925x$	$3,57 < t < 4,03$
3,9	$4,029924 - 2,637457x$	$3,67 < t < 4,13$
4	$3,783202 - 2,334213x$	$3,77 < t < 4,23$
4,1	$3,630397 - 1,555782x$	$3,87 < t < 4,33$
4,2	$3,574452 - 0,7370259x$	$3,97 < t < 4,43$
4,3	$3,574452 - 0,2843072x$	$4,07 < t < 4,53$
4,4	$3,54961 - 0,284715x$	$4,17 < t < 4,63$
4,5	$3,509448 - 0,5989241x$	$4,27 < t < 4,73$
4,6	$3,447641 - 1,103045x$	$4,37 < t < 4,83$
4,7	$3,336833 - 1,649506x$	$4,47 < t < 4,93$
4,8	$3,16262 - 2,117142x$	$4,57 < t < 5,03$
4,9	$2,930022 - 2,498721x$	$4,67 < t < 5,13$
5	$2,662173 - 2,679175x$	$4,77 < t < 5,23$

5,1	$2,413114 - 2,493242x$	$4,87 < t < 5,33$
5,3	$2,034886 - 1,345285x$	$5,07 < t < 5,53$
5,5	$1,816243 - 0,415886x$	$5,27 < t < 5,73$
5,6	$1,864668 - 0,6759468x$	$5,37 < t < 5,83$
5,7	$1,898741 - 0,0306748x$	$5,47 < t < 5,93$
5,9	$1,526402 - 1,876745x$	$5,67 < t < 6,13$

## 2. Hasil Estimasi Model COD

$t_0$	Model	$t_0 - h < t < t_0 + h$
1,6	$31,49262 - 23,2009x + 18,75799x^2$	$1,37 < t < 1,83$
1,7	$29,36696 - 19,34607x + 18,61375x^2$	$1,47 < t < 1,93$
1,8	$27,67878 - 15,3775x - 1706415x^2$	$1,57 < t < 2,03$
1,9	$26,37932 - 11,8295x + 15,92205x^2$	$1,67 < t < 2,13$
2	$25,41542 - 8,31595x + 15,79443x^2$	$1,77 < t < 2,23$
2,1	$24,8611 - 4,51434x + 15,16548x^2$	$1,87 < t < 2,33$
2,2	$24,91674 - 0,8381972x + 10,49274x^2$	$1,97 < t < 2,43$
2,3	$25,59903 + 1,256556x + 10,84964x^2$	$2,07 < t < 2,53$
2,5	$26,49063 - 1,054401x - 8,796997x^2$	$2,27 < t < 2,73$
2,6	$26,62211 - 3,582536x - 10,84964x^2$	$2,37 < t < 2,83$
2,8	$25,89678 - 10,04289x - 13,96463x^2$	$2,57 < t < 3,03$
2,9	$24,54208 - 12,98051x - 9,108347x^2$	$2,67 < t < 3,13$
3	$22,80411 - 14,1207x - 0,05326933x^2$	$2,77 < t < 3,23$
3,1	$21,06053 - 13,26041x + 11,23765x^2$	$2,87 < t < 3,33$
3,2	$19,64303 - 10,18229x + 18,86418x^2$	$2,97 < t < 3,43$
3,3	$19,00912 - 5,928024x + 16,06549x^2$	$3,07 < t < 3,53$
3,4	$19,08612 - 3,142656x + 7,000832x^2$	$3,17 < t < 3,63$
3,5	$19,32785 - 2,729653x - 1,539388x^2$	$3,27 < t < 3,73$
3,6	$19,31325 - 4,10837x - 6,715522x^2$	$3,37 < t < 3,83$
3,7	$18,76729 - 6,078434x - 6,189679x^2$	$3,47 < t < 3,93$
3,8	$17,77845 - 7,078509x - 0,1395908x^2$	$3,57 < t < 4,03$
3,9	$16,78587 - 6,38506x + 6,617816x^2$	$3,67 < t < 4,13$
4	$16,1317 - 4,240451x + 9,904445x^2$	$3,77 < t < 4,23$
4,1	$16,06841 - 1,672329x + 6,530423x^2$	$3,87 < t < 4,33$

4,2	$16,55079 - 0,5806124x - 2,88059x^2$	$3,97 < t < 4,43$
4,3	$16,98661 - 2,023643x - 11,81679x^2$	$4,07 < t < 4,53$
4,4	$16,84322 - 5,157553x - 15,563x^2$	$4,17 < t < 4,63$
4,5	$15,98033 - 8,184769x - 12,38641x^2$	$4,27 < t < 4,73$
4,6	$14,665546 - 9,463686x - 3,6558771x^2$	$4,37 < t < 4,83$
4,7	$13,3866 - 8,906784x + 4,721362x^2$	$4,47 < t < 4,93$
4,8	$12,4262 - 7,661539x + 8,551001x^2$	$4,57 < t < 5,03$
4,9	$11,73859 - 6,671352x + 7,853732x^2$	$4,67 < t < 5,13$
5	$11,23962 - 6,176343x + 4,31194x^2$	$4,77 < t < 5,23$
5,1	$10,90028 - 5,946927x - 0,3515781x^2$	$4,87 < t < 5,33$
5,3	$10,26741 - 7,248922x - 10,33433x^2$	$5,07 < t < 5,53$
5,5	$8,212647 - 8,783752x - 9,645538x^2$	$5,27 < t < 5,73$
5,6	$7,097523 - 9,116458x + 5,39613x^2$	$5,37 < t < 5,83$
5,7	$6,015215 - 8,920649x + 1,921443x^2$	$5,47 < t < 5,93$
5,9	$4,741094 - 0,1592775x + 22,05256x^2$	$5,67 < t < 6,13$