

MODEL PROSES TITIK BERTANDA TERINDEKS WAKTU PADA DATA GEMPA BUMI DI PANTAI SELATAN JAWA

Andreas Rony Wijaya¹⁾, Hasih Pratiwi²⁾

¹⁾Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

²⁾Program Studi Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Sebelas Maret

Jl. Ir. Sutami 36A, Kentingan, Surakarta, 57126

¹⁾andreasronywijaya@gmail.com

²⁾hasihpratiwi@gmail.com

Abstract— Pulau Jawa merupakan pulau yang sering mengalami gempa bumi, yang biasanya berpusat di pantai selatan pulau ini. Kejadian gempa bumi, yang bersifat acak, sehingga pengembangan metode prakiraan gempa bumi sangat diperlukan. Salah satu metode prakiraan gempa bumi dari aspek probabilistik adalah proses titik. Pada penelitian ini dibahas proses titik bertanda yang terindeks waktu dan penerapannya pada data gempa bumi di pantai selatan Pulau Jawa. Data diperoleh dari *United State Geological Survey*, dengan mengambil data gempa bumi besar yang terjadi di pantai selatan Pulau Jawa, yakni Gempa Jogja, Ciamis-Cilacap, dan Tasikmalaya. Model yang dibahas pada penelitian ini adalah model *epidemic type aftershock sequence (ETAS)*. Langkah yang dilakukan adalah dengan menurunkan ulang fungsi intensitas dasar dari gempa bumi di pantai selatan Jawa. Digunakan *null model* dan *full model* untuk mengestimasi parameter tersebut. *Null model* menunjukkan magnitudo berdistribusi eksponensial, sedangkan *full model* menunjukkan magnitudo berdistribusi gamma. Dengan metode *likelihood* maksimum diperoleh estimasi parameter-parameter fungsi intensitas dasar dari *null model* dan *full model*.

Keywords— proses titik bertanda, fungsi intensitas dasar, gempa bumi, pantai selatan Jawa.

I. PENDAHULUAN

Pulau Jawa merupakan salah satu pulau di Indonesia yang terletak pada zona pertemuan dua lempeng tektonik besar, yaitu Lempeng Eurasia dan Lempeng Indo-Australia. Lempeng Indo-Australia merupakan lempeng samudera yang senantiasa bergerak relatif ke utara dengan kelajuan kurang lebih 7 cm per tahun, menjam di bawah Lempeng Eurasia. Suatu saat Lempeng Indo-Australia ini mengalami gesekan atau benturan, sehingga sebagian tubuh Lempeng Eurasia retak atau patah. Akibat dari peristiwa tersebut adalah terjadinya gempa bumi yang dapat disertai terjadinya tsunami, serta naiknya magma ke permukaan. Pulau-pulau yang terletak di zona tersebut, termasuk Pulau Jawa, merupakan kawasan

yang rawan terjadinya bencana gempa bumi tektonik (Natawidjaya, 1995). Berdasarkan data *USGS (United State Geological Survey)*, sejak tahun 1990 sampai pertengahan 2017 ini, tercatat telah terjadi sebanyak 473 kali gempa yang terjadi di Pulau Jawa dan sekitarnya, dengan besar magnitudo lebih dari 4 SR. Contoh gempa bumi besar yang terjadi di pulau Jawa diantaranya adalah Gempa Yogyakarta yang berpusat di pantai selatan Jawa, yang terjadi pada hari Sabtu, 27 Mei 2006 dengan kekuatan gempa 5.9 skala Richter. Sekitar dua bulan kemudian, terjadi gempa bumi yang berpusat di selatan Pangandaran, Kabupaten Ciamis, Jawa Barat. Pada September 2009, terjadi gempa bumi dengan besar 7.2 skala Richter yang mengguncang Tasikmalaya.

Gempa bumi merupakan suatu fenomena alam yang kejadiannya bersifat acak, yaitu tidak teratur dalam ruang dan waktu. Hingga kini prakiraan waktu kemunculan gempa pada suatu lokasi masih sulit diperkirakan, sehingga usaha pengembangan metodologi prakiraan gempa bumi masih terus dilakukan baik dari aspek seismologi maupun aspek probabilistik/stokastik.

Untuk menerangkan fenomena alam yang sifatnya acak, baik dalam ruang maupun waktu, dapat digunakan salah satu bidang kajian dalam matematika yaitu proses titik. Terdapat dua jenis proses titik yaitu proses titik temporal dan proses titik spasial. Proses titik temporal berkaitan dengan kejadian-kejadian yang diobservasi dari waktu ke waktu sebagai deretan waktu, sedangkan proses titik spasial menggambarkan lokasi objek dalam ruang berdimensi dua atau tiga. Proses titik digunakan untuk memodelkan suatu barisan dari kejadian-kejadian yang terjadi pada titik-titik dalam waktu.

Dalam proses titik, kejadian-kejadian gempa bumi pada waktu, lokasi atau tempat tertentu dapat dipandang sebagai titik-titiknya, sedangkan ukuran yang berkaitan dengan kejadian gempa bumi adalah magnitudo atau kedalamannya (Schoenberg, 2007). Kemunculan gempa umumnya dipandang sebagai suatu proses Poisson. Pada proses ini, kemunculan tersebut bersifat

memoryless dan saling bebas terhadap kemunculan-kemunculan lainnya. Menurut Harte (2010), suatu gempa besar biasanya diikuti oleh barisan dari gempa susulan, sehingga dapat dimodelkan dengan model *ETAS* (*epidemic type aftershock sequence*). Sementara itu, salah satu komponen penting dari model tersebut adalah fungsi intensitas dasar yang mengkarakteristikkan proses titik yang bersesuaian. Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menurunkan ulang fungsi intensitas dasar model *ETAS* dari proses titik bertanda yang terindeks waktu tersebut dan penerapannya pada kejadian gempa bumi yang terjadi di pantai selatan Pulau Jawa.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Proses Stokastik

Menurut Parzen (1962), proses stokastik merupakan suatu kejadian random yang diamati berdasarkan waktu yang muncul secara terus menerus sebagai suatu proses yang dibangun pada suatu perilaku yang berkaitan dengan probabilitas. Sementara itu, definisi proses stokastik menurut Taylor (2007) adalah

Definisi 2.1. Proses stokastik merupakan kumpulan variabel random $N(t)$, $t \in T$ dengan T adalah himpunan indeks yang dinyatakan sebagai himpunan waktu dan $N(t)$ merupakan kejadian dari proses pada waktu t . Jika $T = 0, 1, 2, 3, \dots$, maka dikatakan proses stokastik waktu diskrit, sedangkan jika $T = [0, \infty)$ maka dikatakan proses stokastik dengan waktu kontinu. Himpunan nilai-nilai dari variabel random $N(t)$ dapat disebut sebagai state space dan dinotasikan dengan S .

B. Proses Titik Bertanda

Proses titik merupakan proses stokastik yang dapat menjelaskan kejadian-kejadian alam yang sifatnya acak, baik dalam ruang maupun waktu. Menurut Cahyandari (2015), proses titik didefinisikan sebagai koleksi acak dari titik-titik yang terletak pada suatu daerah tertentu. Titik-titik dari suatu proses dapat dinyatakan sebagai kejadian, waktu, atau lokasi kejadian.

Terdapat dua jenis proses titik, yaitu proses titik temporal dan proses titik spasial. Proses titik temporal berkaitan dengan kejadian-kejadian yang diobservasi dari waktu ke waktu sebagai deretan waktu, sedangkan proses titik spasial menggambarkan lokasi objek dalam ruang berdimensi dua atau tiga (Schoenberg, 2007).

Menurut Baddeley (2007), titik-titik pada proses titik dapat dilabelkan dengan informasi tambahan yang disebut dengan tanda (*marks*). Suatu titik yang ditandai dapat dianggap sebagai pasangan (x, m) dengan x adalah titik lokasi dan m adalah tanda yang melekat pada titik lokasi tersebut. Dalam proses titik kejadian-kejadian gempa bumi pada waktu, lokasi, atau

tempat tertentu dapat dipandang sebagai titik-titiknya, sedangkan ukuran yang berkaitan dengan kejadian gempa bumi adalah magnitude atau kedalamannya (Schoenberg, 2007).

Definisi 2.2. Suatu proses titik bertanda pada suatu ruang S , dengan tanda-tanda pada suatu ruang M adalah suatu proses titik Y pada $S \times M$ sedemikian sehingga $N_Y(K \times M) < \infty$, untuk semua himpunan kompak $K \subset S$. Hal tersebut menerangkan proses yang diproyeksikan (dari titik-titik tanpa tanda) adalah berhingga lokal.

C. Metode Likelihood Maksimum

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode *likelihood* maksimum. Menurut Krishnamoorthy (2006), metode *likelihood* maksimum sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi. Konsep dasar dari metode *likelihood* maksimum adalah menentukan nilai parameter yang memberikan kemungkinan (*likelihood*) yang paling besar untuk mendapatkan data terobservasi sebagai estimator.

Berikut adalah definisi fungsi densitas probabilitas bersama, fungsi *likelihood*, dan estimasi maksimum *likelihood* yang mengacu dari Bain dan Engelhardt (1992).

Definisi 2.3. Fungsi densitas bersama dari n variabel random X_1, X_2, \dots, X_n , dinyatakan dalam bentuk $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ yang disebut fungsi *likelihood*. Fungsi *likelihood* dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika x_1, x_2, \dots, x_n adalah sampel random dari $f(X | \theta)$ maka $L(\theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta)$.

Dalam metode *likelihood* maksimum, fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut

$$L(\theta; x) = \frac{dP_\theta(x)}{dv}$$

dengan v merupakan suatu ukuran referensi. Setelah mengamati data x , anggap L sebagai fungsi dari θ , dan pilih $\hat{\theta}$ untuk *likelihood* maksimum, sehingga

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_\theta L(\theta; x),$$

Merupakan nilai θ dengan *likelihood* yang dimaksimalkan.

III. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka, yaitu mengumpulkan referensi berupa buku-buku dan jurnal ilmiah yang relevan dengan topik penelitian yaitu model proses titik bertanda. Langkah-langkah yang dilakukan dalam mencapai tujuan dari penelitian ini adalah

- (1) mengkaji definisi dari proses stokastik dan proses titik,
- (2) mempelajari istilah-istilah dalam gempa bumi,
- (3) mendiskripsikan kejadian gempa bumi ke dalam proses titik bertanda,
- (4) mengkaji definisi model *ETAS*,
- (5) menyusun fungsi intensitas dasar pada model *ETAS*,
- (6) menyusun fungsi *likelihood* pada model *ETAS*,
- (7) menyusun logaritma dari fungsi *likelihood*,
- (8) mengestimasi parameter model *ETAS* pada data gempa bumi di pantai selatan Pulau Jawa,
- (9) menginterpretasikan model, dan
- (10) membandingkan estimasi parameter di masing-masing wilayah.

Data yang digunakan adalah data gempa bumi di pantai selatan Pulau Jawa yang diperoleh dari laman resmi *United State Geological Survey, earthquake.usgs.gov*, dengan magnitudo kejadian gempa bumi lebih dari atau sama dengan 4SR dan kedalaman gempa diantara 0-70 km.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Fungsi Intensitas

Menurut Harte (2010), fungsi intensitas bersyarat mendiskripsikan laju Poisson pada saat itu juga. Menurut Schoenberg (2007), fungsi intensitas bersyarat $\lambda(t)$ berkaitan dengan proses titik temporal N yang didefinisikan sebagai laju dari kejadian-kejadian pada waktu t dengan syarat telah diketahui kejadian-kejadian sebelum t . Secara aljabar, fungsi intensitas bersyarat dapat didefinisikan sebagai

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{H}_t) = \lim_{\delta\xi\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\xi\eta} P \{N_{\delta\xi\eta}(t, x, y) > 0 | \mathcal{H}_t\},$$

dengan $N_{\delta\xi\eta}(t, x, y)$ merupakan banyaknya kejadian pada interval waktu $[t, t + \delta) \times [x, x + \xi) \times [y, y + \eta)$. Notasi \mathcal{H}_t menyatakan kejadian-kejadian sebelum waktu t .

Sementara itu, fungsi intensitas dasar merupakan laju dari kejadian-kejadian yang terjadi bergantung terhadap waktu, dan tidak hanya terdampak oleh waktu pada saat itu saja, melainkan juga kejadian-kejadian yang terjadi waktu sekarang (proses histori). Fungsi ini mendeskripsikan laju Poisson yang instan sebagai fungsi yang hanya bergantung terhadap waktu. Misalkan $N_\delta(t)$ merupakan banyaknya kejadian pada interval waktu $[t, t + \delta]$, sehingga fungsi intensitas dasar dapat dituliskan menjadi

$$\lambda(t, \theta_1, \dots, \theta_m | \mathcal{H}_t) = \lim_{\delta\xi\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P \{N_\delta(t) > 0 | \mathcal{H}_t\}.$$

Suatu contoh dari fungsi intensitas dasar adalah model *ETAS* (*epidemic type aftershock sequence*) sederhana (nonspasial) yang digunakan dalam memodelkan jumlah gempa bumi (Ogata, 1999). Diasumsikan bahwa suatu barisan gempa bumi susulan dapat dimodelkan seperti suatu epidemik, yakni suatu gempa bumi besar mempengaruhi gempa bumi susulan yang lain di suatu interval waktu dan juga barisan gempa susulan meluas untuk suatu waktu yang lama setelah gempa utama terjadi. Fungsi intensitas dasar dapat dituliskan,

$$\lambda_g(t | \mathcal{H}_t) = \mu + A \sum_{i=t_i < t} e^{\alpha(M_i - M_0)} \left(1 + \frac{t - t_i}{c}\right)^{-p}, \quad (1)$$

Semua parameter (μ, A, α, c, p) pada persamaan 1 bernilai positif, dengan t_i merupakan waktu kejadian ke- i dengan besar magnitudo M_i dan M_0 merupakan besar ambang batas magnitudo. μ merupakan laju kegempaan dasar, A adalah produktivitas gempasusulan, α adalah besar efisiensi gempa bumi dengan magnitudo tertentu menghasilkan gempa susulan, c adalah laju peluruhan gempa susulan menurut skala waktu, dan p merupakan laju peluruhan gempasusulan secara keseluruhan.

B. Fungsi Likelihood untuk Model Sederhana

Likelihood untuk model sederhana dengan fungsi intensitas bersyarat hanya bergantung pada waktu, digunakan bentuk dari fungsi intensitas dasar pada persamaan 1. Misalkan τ waktu dari kejadian paling akhir sebelum waktu t , dan misalkan $\emptyset(\tau, t)$ merupakan hasil *null*, yaitu tidak ada kejadian di interval waktu (τ, t) . Dinotasikan distribusi bersyarat dari waktu pada kejadian selanjutnya,

$$H(t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t)) = \Pr\{T \geq t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t)\}, \quad (2)$$

dan $h(t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t))$ merupakan fungsi densitas bersyarat, sehingga persamaan 2 dapat dituliskan menjadi fungsi intensitas bersyarat pada persamaan 3 berikut

$$\lambda_g(t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t)) = \frac{h(t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t))}{1 - H(t | \mathcal{H}_\tau \cap \emptyset(\tau, t))}, \quad (3)$$

Log-likelihood untuk model sederhana dapat dituliskan

$$\log L = \sum_{i: T_1 \leq t_i \leq T_2} \log \lambda_g(t_i | \mathcal{H}_{t_i}) - \int_{T_1}^{T_2} \lambda_g(t | \mathcal{H}_t) dt$$

C. Likelihood untuk Proses Titik Bertanda

Diberikan fungsi *likelihood* pada model proses titik bertanda yaitu

$$\log L = \sum_{i:t_i \in \tau} \log \lambda_g(t_i, x_i, y_i | \mathcal{H}_{t_i}) - \int_{\tau} \int_Y \int_X \lambda(t, x, y | \mathcal{H}_t) dx dy dt$$

dengan $\tau \subseteq \mathbb{R}^+$ adalah interval waktu, dan X dan Y adalah domain dari x dan y berturut-turut. Hal ini dapat dijelaskan untuk memasukkan variabel-variabel tambahan. Untuk ringkasnya, dapat dituliskan

$$\log L = \sum_{i:t_i \in \tau} \log \lambda_g(t_i, y_i | \mathcal{H}_{t_i}) - \int_{\tau} \int_Y \lambda(t, y | \mathcal{H}_t) dy dt$$

dengan y pada persamaan tersebut menyatakan sebuah variabel multivariat, menunjuk pada *marks*. Proses titik bertanda merupakan proses titik temporal (t_i, y_i) pada $\mathbb{R}^+ \times Y$ dengan penambahan sifat sehingga fungsi intensitas bersyarat dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lambda(t, y | \mathcal{H}_t) = \lambda_g(t | \mathcal{H}_t) f(y | \mathcal{H}_t),$$

dengan $\lambda_g(t | \mathcal{H}_t)$ adalah fungsi intensitas bersyarat, dan $f(y | \mathcal{H}_t)$ adalah fungsi densitas multivariat dari tanda (Daley and Vere-Jones, 2003).

Bentuk umum dari *log-likelihood* proses titik bertanda adalah

$$\log L = \sum_{i:t_i \in \tau} \log \lambda(t_i, y_i | \mathcal{H}_{t_i}) - \int_{\tau} \lambda(t | \mathcal{H}_t) dt + \sum_{i:t_i \in \tau} \log f(y_i | \mathcal{H}_{t_i}).$$

D. Penerapan Kasus

Model proses titik bertanda terindeks waktu diterapkan pada data kejadian gempa bumi di Indonesia. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data gempa bumi yang berpusat di pantai selatan Pulau Jawa. Berdasarkan data dari *USGS* tercatat ada tiga gempa bumi besar yang berpusat di pantai selatan Pulau Jawa selama sedekade terakhir, yakni Gempa Jogja pada 26 Mei 2006 dengan kekuatan 5.9 SR, Gempa Ciamis-Cilacap pada 17 Juli 2006 dengan kekuatan 7.7 SR, dan Gempa Tasikmalaya pada 2 September 2009 dengan kekuatan 7.3 SR. Data diperoleh dari *PDE (preliminary determination of epicentres)* katalog yang disediakan oleh *US Geological Survey*. Dengan ditentukan ambang batas magnitudo M_0 sebesar 4, maka penelitian ini hanya memuat gempa bumi dengan magnitudo yang lebih besar atau sama dengan ≥ 4 . Variabel waktu yang digunakan pada penelitian ini adalah banyaknya hari sejak tercatatnya data gempa bumi pertama sampai dengan gempa bumi terakhir dalam rentang waktu Δt .

Menurut Harte (2010), suatu gempa bumi besar, biasanya diikuti oleh suatu barisan gempa susulan. Pada gempa bumi di pantai selatan Pulau Jawa ini juga terjadi beberapa gempa susulan akibat dari gempa utama. Untuk menentukan luasan wilayah yang terdampak dan rentang waktu

terjadinya gempa bumi yang memacu maupun dipengaruhi oleh gempa utama digunakan *windows method* dari Gardner dan Knopoff yang disajikan pada Tabel 1.

TABEL 1. WINDOWS PARAMETER GEMPA BUMI DI PANTAI SELATAN PULAU JAWA

Wilayah	Magnitudo (SR)	ΔR (km)	Δt (hari)
Jogja	5.9	52.6	466
Ciamis-Cilacap	7.7	86.2	970
Tasikmalaya	7.3	77	942

Setelah didapatkan data gempa bumi berdasarkan Tabel 1, selanjutnya, dilakukan penyesuaian model untuk data gempa bumi yang berpusat di pantai selatan Pulau Jawa dengan fungsi intensitas dasar dari model *ETAS (epidemic type aftershock sequence)* pada persamaan 1. Digunakan *null model* dan *full model* untuk mengestimasi parameter fungsi intensitas dasar. *Null model* menunjukkan magnitudonya berdistribusi eksponensial, sedangkan *full model* magnitudonya berdistribusi gamma.

Terdapat lima parameter yang diestimasi pada bagian ini yang sesuai dengan fungsi intensitas dasar pada persamaan 1, yaitu laju kegempaan dasar (μ), produktivitas gempa susulan (A), besar efisiensi gempa bumi dengan magnitudo tertentu menghasilkan gempa susulan (α), laju peluruhan gempa susulan menurut skala waktu (c), dan laju peluruhan gempa susulan secara keseluruhan (p).

Selanjutnya dituliskan hasil estimasi parameter dari tiga gempa tersebut pada subbagian berikut ini.

Gempa Ciamis-Cilacap: Nilai *log-likelihood* beserta estimasi parameternya dari *null model* dan *full model* untuk gempa Ciamis-Cilacap disajikan pada Tabel 2.

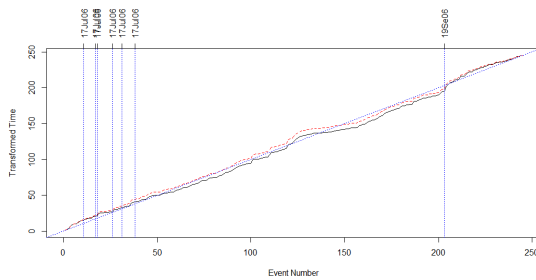
TABEL 2. HASIL ESTIMASI PARAMETER DARI MODEL *ETAS* PADA GEMPA BUMI CIAMIS-CILACAP DAN BARISAN GEMPA SUSULAN.

	<i>Null Model</i>	<i>Full Model</i>
$p_1 = \mu$	0.01429607	0.0134737398
$p_2 = A$	0.15509827	0.20250772
$p_3 = \alpha$	1.92609363	1.81287565
$p_4 = c$	0.16333564	0.15349737
$p_5 = p$	1.30906071	1.28687335
p_6	1.24968120	2.191161417
p_7	0	0.18774908
$\log L$	-110.7193	-71.32549

Dengan tambahan satu parameter bebas p_7 pada *full model*, perbedaan *log-likelihood* pada kedua model cukup signifikan. Sementara itu, perbedaan antar parameter yang terasosiasi dengan fungsi intensitas dasar model *ETAS* cukup kecil. Dari tabel tersebut dapat diketahui bahwa nilai *log-likelihood* untuk *full model* lebih besar dari pada

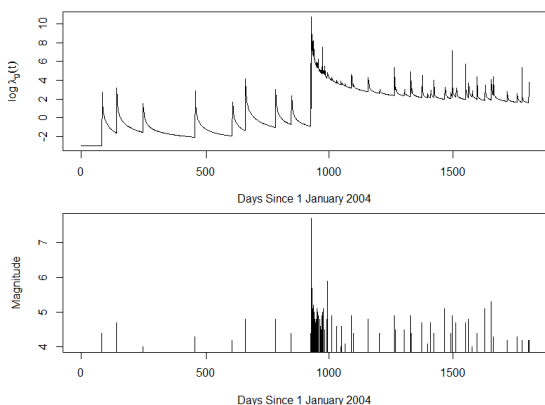
nilai *log-likelihood* untuk *null model*, sehinggaberdasarkanmetodelikelihood mak-simum estimasi parameter untuk *full model* lebihbaik dibandingkan dengan *null model*.

Representasi grafis dari model *goodness of fit* melalui plot proses residual.Plot residual disajikan pada Gambar 1.Garis hitam pada kedua plot tersebutmerepresentasikan *full model*, sedangkan garis merah putus-putus merepresentasikan *null model*. Dari Gambar 1, terlihat bahwa garis dari kedua modelmendekati garis lurus, tetapi untuk *full model* lebih dekat dengan garis lurus. Jadi, *full model* lebih mendekati nilai aslinya dibandingkan dengan *null model*.



Gambar 1. Proses residual waktu untuk model ETAS pada gempa bumi Ciamis-Cilacap dan barisan gempa susulan.

Berdasarkan analisis-analisis tersebut, *full model* lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter fungsi intensitas dasar dibandingkan dengan *null model*. Diperoleh estimasi parameter untuk gempa Ciamis-Cilacap menggunakan *full model* yaitu $\mu = 0.01347398$, $A = 0.20250772$, $\alpha = 1.81287565$, $c = 0.15349737$, dan $p = 1.28687335$. Plot dari fungsi intensitas dasar yang digambarkan dari logaritmanya dan plot magnitudo kejadian gempa bumi Ciamis-Cilacap pada Gambar 2. Berdasarkan kedua plot tersebut dapat dilihat bahwa kejadian gempa bumi dengan magnitudo yang besar,cenderung mempunyai fungsi intensitas dasar yang besar pula.



Gambar 2. Logaritma fungsi intensitas dasar dari model ETAS dan magnitudo kejadian gempa bumi Ciamis-Cilacap

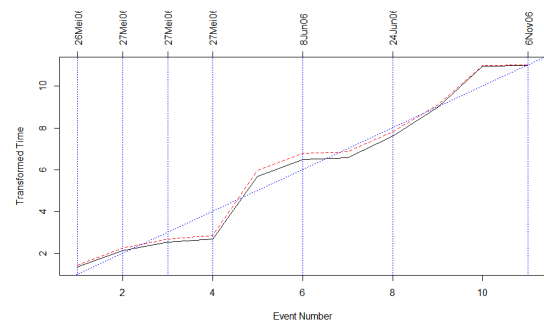
Gempa Jogja:Nilai *log-likelihood* beserta estimasi parameternya dari *null model*dan *full*

model untuk gempa Ciamis-Cilacap disajikan pada Tabel 3.

TABEL 3. HASIL ESTIMASI PARAMETER DARI MODEL ETAS PADA GEMPA BUMI JOGJA DAN BARISAN GEMPA SUSULAN.

	<i>Null Model</i>	<i>Full Model</i>
$p_1 = \mu$	9.946898e-03	9.299718e-03
$p_2 = A$	1.161643e-20	2.041828e-07
$p_3 = \alpha$	2.064288e+01	7.675424
$p_4 = c$	7.218555e-02	5.667051e-02
$p_5 = p$	9.879704e-01	9.383526e-01
p_6	1.605839	1.898809
p_7	0	2.562436e-01
$\log L$	-38.46442	-38.1325

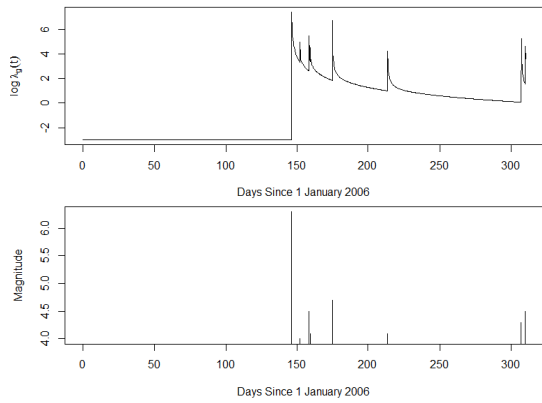
Berdasarkan tabel tersebut dapat diketahui bahwa perbedaan *log-likelihood* pada kedua model cukup kecil.Sementara itu, perbedaan antara parameter yang terasosiasi dengan fungsi intensitas dasar ETAS cukup besar.Nilai *log-likelihood* untuk *full model* lebih besar dari pada nilai *log-likelihood* untuk *null model*, sehingga menurut metode *likelihood* maksimum estimasi parameter untuk *full model* lebih baik dibandingkan dengan *null model*.



Gambar 3. Proses residual waktu untuk model ETAS pada gempa bumi Ciamis-Cilacap dan barisan gempa susulan

Dari Gambar 3 terlihat bahwa kedua garis model mendekati garis lurus, tetapi untuk *full model* lebih dekat dengan garis lurus. Jadi, *full model* lebih mendekati nilai aslinya dibandingkan dengan *null model*. Hal ini sesuai dengan nilai *log likelihood* untuk kedua model yang disajikan pada Tabel 3.

Berdasarkan analisis-analisis tersebut,*full model* lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter fungsi intensitas dasar dibandingkan dengan *null model*. Diperoleh estimasi parameter untuk gempa Ciamis-Cilacap menggunakan *full model* yaitu $\mu = 0.009299718$, $A = 2.041828 \times 10^{-07}$, $\alpha = 7.675424$, $c = 0.05667051$, dan $p = 0.9383526$. Plot dari fungsi intensitas dasar yang digambarkan dari logaritmanya dan plot magnitudo kejadian gempa bumi Jogja pada Gambar 4. Berdasarkan kedua plot tersebut dapat dilihat bahwa kejadian gempa bumi dengan magnitudo yang besar,cenderung mempunyai fungsi intensitas dasar yang besar pula.



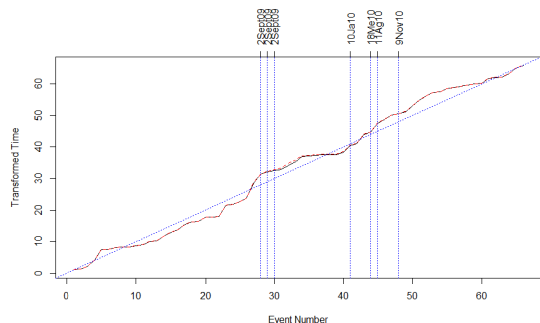
Gambar 4. Logaritma fungsi intensitas dasar dari model *ETAS* dan magnitudo kejadian gempa bumi Jogja

Gempa Tasikmalaya: Nilai *log-likelihood* beserta estimasi parameternya dari *null model* dan *full model* untuk gempa Tasikmalaya disajikan pada Tabel 4.

TABEL 4. HASIL ESTIMASI PARAMETER DARI MODEL *ETAS* PADA GEMPA BUMI TASIKMALAYA DAN BARISAN GEMPA SUSULAN.

	<i>Null Model</i>	<i>Full Model</i>
$p_1 = \mu$	0.031553217	0.031359634
$p_2 = A$	0.336220896	0.400744084
$p_3 = \alpha$	2.249123177	2.143548669
$p_4 = c$	0.007368077	0.005028839
$p_5 = p$	1.496130075	1.28788671
p_6	1.513761468	1.744348618
p_7	0	0.235701483
$\log L$	-295.7497	-292.3742

Berdasarkan tabel tersebut dapat diketahui bahwa perbedaan *log-likelihood* pada kedua model cukup kecil. Sementara itu, perbedaan antara parameter yang terasosiasi dengan fungsi intensitas dasar *ETAS* cukup kecil. Nilai *log-likelihood* untuk *full model* lebih besar dari pada nilai *log-likelihood* untuk *null model*, sehingga menurut metode *likelihood* maksimum estimasi parameter untuk *full model* lebih baik dibandingkan dengan *null model*.

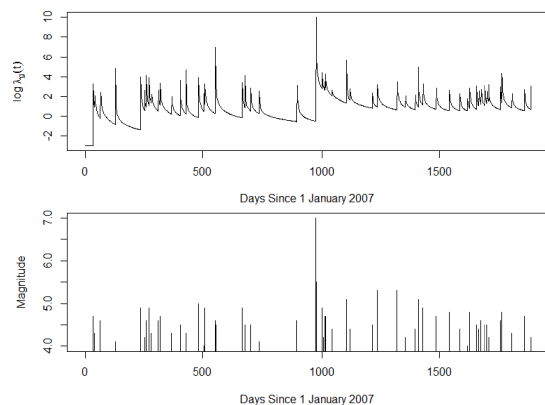


Gambar 5. Proses residual waktu untuk model *ETAS* pada gempa bumi Ciamis-Cilacap dan barisan gempa susulan

Dari Gambar 5 terlihat bahwa kedua garis model mendekati garis lurus, tetapi untuk *full model* lebih dekat dengan garis lurus. Jadi, *full model* lebih kuat dibandingkan dengan *null model*.

Hal ini sesuai dengan nilai *log likelihood* untuk kedua model yang disajikan pada Tabel 4.

Berdasarkan analisis-analisis tersebut, *full model* lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter fungsi intensitas dasar dibandingkan dengan *null model*. Diperoleh estimasi parameter untuk gempa Ciamis-Cilacap menggunakan *full model* yaitu $\mu = 0.031359634$, $A = 0.400744084$, $\alpha = 2.143548669$, $c = 0.005028839$, dan $p = 1.287878671$. Plot dari fungsi intensitas dasar yang digambarkan dari logaritmanya dan plot magnitudo kejadian gempa bumi Jogja pada Gambar 7. Berdasarkan kedua plot tersebut dapat dilihat bahwa kejadian gempa bumi dengan magnitudo yang besar, cenderung mempunyai fungsi intensitas dasar yang besar pula.



Gambar 6. Logaritma fungsi intensitas dasar dari model *ETAS* dan magnitudo kejadian gempa bumi Tasikmalaya

V. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- (1) Model proses titik bertanda terindeks waktu dapat dinyatakan dengan fungsi intensitas dasar model *ETAS*,

$$\lambda_g(t|\mathcal{H}_t) = \mu + A \sum_{i=t_i < t} e^{\alpha(M_i - M_0)} \left(1 + \frac{t - t_i}{c}\right)^{-p}$$

dengan μ adalah laju kegempaan dasar, A adalah produktivitas gempasusulan, α adalah besar efisiensi gempa bumi dengan magnitudo tertentu menghasilkan gempa susulan, c adalah laju peluruhan gempa susulan menurut skala waktu, dan p merupakan laju peluruhan gempasusulan secara keseluruhan.

- (2) Estimasi parameter dari ketiga gempa tersebut lebih mendekati nilai aslinya menggunakan *full model* yang magnitudonya berdistribusi gamma dibandingkan menggunakan *null model*,
- (3) Berdasarkan estimasi parameter dari masing-masing wilayah, dilakukan perbandingan dari masing-masing parameter tersebut. Jika dilihat dari laju kegempaan dasar dan produktivitas gempa susulan, gempa Tasikmalaya mempunyai laju dan

produktivitas yang paling besar, dengan laju 0.031 gempa per hari dan produktivitas sebesar 0.4 gempa per hari. Akan tetapi gempa Tasikmalaya juga memiliki laju peluruhan gempa susulan secara keseluruhan yang paling besar pula. Sementara itu, laju peluruhan gempa susulan menurut skala waktu paling besar adalah gempa Ciamis-Cilacap. Gempa bumi Jogja memiliki nilai efisiensi gempa bumi dengan magnitudo tertentu menghasilkan gempa bumi susulan yang paling besar disbanding gempa lainnya, yakni sebesar 7.7.

DAFTAR PUSTAKA

- Baddeley, A.2007, *Spatial Point Processes and their Applications*, School of Mathematics and Statistics, University of Western Australia, Nedlands.
- Bain, L.J., Engelhardt, M. 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition, Duxbury Press, California.
- Bird, P.2003, *An Update Digital Model of Plate Boundaries*, An Journal of The Earth Sciences.
- Cahyandari, R.2015, *Studi Pembentukan Proses Titik melalui Pendekatan Ukuran Menghitung*, Laporan Tugas Akhir, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN SGD Bandung.
- Daley, D. J. dan Vere-Jones, D. 2003, *An Introduction to the Theory of Point Processes. Vol. 1:Elementary Theory and Methods*. 2nd edition. Springer-Verlag, New York, 2003. ISBN 0-387-95541-0.
- Harte, D. 2010, *Ptprocess:An R Package for Modelling Marked Point Processes Indexed by Time*, Journal of Statistical Software Vol. 35, 119-144.
- Krishnamoorthy, K. 2006, *Handbook of Statistical Distributions with Applications*, Chapman and Hall/CRC.
- Natawidjaya, D. H. 1995, *Evaluasi Bahaya Patahan Aktif, Tsunami, dan Goncangan Gempa*, Laboratorium Riset Bencana Alam Geoteknologi LIPI, Jakarta.
- Ogata, Y.1999, *Seismicity Analysis Through Point Process Modelling: A Review, Pure and Applied Geophysics*, Vol. 155,471-507.
- Ogata, Y. 1988, *Statistical Models for Earthquake Occurances and Residual Analysis for Point Process*, Vol. 83, Issue 401, Inc.
- Ogata, Y., dan H. Tsuruoka. 2016, *Statistical Monitoring of aftershock sequences: a case study the 2015 Mw7.8 Gorkha, Nepal, earthquake*, Earth, Planets and Space.
- Parzen, E. 1962, *Stochastic Processes*, Holden-Day Inc., United State of America.
- Schoenberg, F.P. 2007, *Introduction to Point Processes*, UCLA, New York.
- Sunarto, Rahayu, L.W.F.2007, *Fenomena Bencana Alam di Indonesia*, Jurnal Kebencanaan Indonesia, Vol. 2, No. 2.
- Taylor, H.M., Samuel K. 2007, *An Introduction to Stochastic Modelling*, Academic Press, New York.
- Zhuang, J. 2000, *Statistical Modelling of Seismicity Patterns Before and After the 1990 Oct 5 Cape Polliser Earthquake, New Zealand, New Zealand Journal of Geology and Geophysics*, Vol. 43, 447-460.