

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN NASKAH SKRIPSI.....	iii
PEDOMAN PENGGUNAAN SKRIPSI	iv
SURAT PERNYATAAN TENTANG ORISINALITAS	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
BAB I.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	4
1.5 Batasan Masalah	4
BAB II.....	5
2.1 Narkoba.....	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	9
2.3 Kestabilan Sistem Linier.....	10
2.4 Kriteria Routh-Hurwitz	12
2.5 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	13
2.6 Masalah Kontrol Optimal	14
BAB III	17
BAB IV	19
4.1 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	19

4.1.1 Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko.....	19
4.1.2 Titik Setimbang Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	26
4.1.3 Analisis Kestabilan Titik Setimbang	32
4.2 Analisis Sensitivitas	40
4.3 Kontrol Optimal Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	43
4.3.1 Penyelesaian Kontrol Optimal Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko 44	
4.4 Simulasi dan Interpretasi Model dengan Adanya Variabel Kontrol.....	48
BAB V.....	55
5.1 Kesimpulan	55
5.2 Saran	56
DAFTAR PUSTAKA	57
LAMPIRAN.....	59

DAFTAR TABEL

Nomor	Judul Tabel	Halaman
	Pendefinisian Variabel dalam Model	
4.1	Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	20
4.2	Pendefinisian Parameter dalam Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	21
4.3	Nilai Parameter dalam Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	38
4.4	Nilai Awal Bidang Fase Titik Setimbang Endemik E_1	39
4.5	Hasil Perhitungan Indeks Sensitivitas Parameter	41
4.6	Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Tidak Mendapatkan Perawatan (I) Pada Akhir Pengamatan	51
4.7	Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Jalan (T_j) Pada Akhir Pengamatan	52
4.8	Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Inap (T_r) Pada Akhir Pengamatan	53

DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul Gambar	Halaman
	Diagram Transmisi Model Matematika	
4.1	Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	23
	Simulasi Bidang Fase pada Bidang $S_H - I$ untuk Titik Setimbang Endemik Model Matematika	
4.2	Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko	39
4.3	Sensitivitas β_1 Terhadap Nilai R_0 dengan Nilai σ yang Berbeda	42
4.4	Simulasi Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Tidak Mendapatkan Perawatan (I)	50
4.5	Simulasi Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Jalan (T_j)	51
4.6	Simulasi Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Inap (T_r)	53
4.7	Profil Kontrol Upaya Kampanye Anti Narkoba	54

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Judul Lampiran
1	Pendekatan Variabel N (Total Populasi)
2	Perhitungan Titik Setimbang Non Endemik (E_0)
3	Perhitungan <i>Basic Reproduction Number</i> (R_0)
4	Perhitungan Titik Setimbang Endemik (E_1)
5	Analisa Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik
6	Analisa Kestabilan Titik Setimbang Endemik
7	Perhitungan Indeks Sensitivitas Parameter
8	Kode Program Bidang Fase $S_H - I$
9	Kode Program Analisis Sensitivitas
10	Kode Program Simulasi Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko tanpa Adanya Kontrol
11	Kode Program Simulasi Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko dengan Adanya Kontrol

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kenakalan remaja merupakan salah satu masalah masyarakat. Hal tersebut dikarenakan kenakalan remaja selalu mengarah ke tindakan kriminalitas sehingga masyarakat menjadi resah. Salah satu bentuk kenakalan remaja adalah penyalahgunaan narkoba. Narkoba adalah istilah untuk narkotika, psikotropika dan bahan berbahaya lainnya (**Kemenkes RI, 2014**). Penyalahgunaan narkoba telah marak dikalangan remaja bahkan dewasa. Dengan semakin berkembangnya teknologi dan informasi pada era globalisasi ini menyebabkan semakin cepat pula peredaran narkoba ke seluruh dunia. Oleh sebab itu, penyalahgunaan narkoba merupakan permasalahan yang perlu diperhatikan oleh publik.

Narkoba tidak termasuk zat berbahaya apabila digunakan sesuai petunjuk medis. Obat-obat yang tergolong dalam narkoba, mulanya merupakan obat yang digunakan untuk pengobatan penyakit dan meringankan rasa sakit karena pada umumnya bersifat menenangkan. Selain itu narkoba dapat menyebabkan perilaku ketergantungan yang kemudian berujung pada penyalahgunaan. Ketergantungan obat dianggap sebagai gangguan kesehatan yang sering diikuti dengan kambuh dan penyakit kronis (**UNODC, 2018**).

Penggunaan narkoba dapat menyebabkan beberapa gejala antara lain dehidrasi, halusinasi, tubuh kejang-kejang, menurunnya tingkat kesadaran dan kesehatan tubuh terganggu. Penggunaan secara berlebihan dapat berakibat fatal yaitu kematian. Selain berdampak buruk bagi kesehatan, penyalahgunaan narkoba juga dapat menyebabkan tindak pidana (**BNN, 2019**). Bentuk hukum bagi penyalahguna narkoba berbeda-beda pada tiap negara. Hukuman tindak pidana merupakan salah satu upaya untuk mengurangi penyebaran penyalahgunaan narkoba.

Pada tahun 2015 sebanyak 250 juta atau sekitar 5% orang dewasa di dunia mengkonsumsi narkoba. Berdasarkan data tersebut, dengan total sebanyak 26,5 juta atau 0,6% dari orang dewasa di dunia menderita ketergantungan. Bahkan sekitar

450.000 pengguna meninggal akibat overdosis maupun penyakit kronis (UNODC, 2017). Sedangkan pada tahun 2016 sekitar 275 juta atau 5,6% orang dengan usia 15-64 tahun mengkonsumsi narkoba dan sekitar 31 juta orang menderita kecanduan (UNODC, 2018). Di Indonesia jumlah tersangka narkoba mengalami naik turun pada tahun 2008-2012 yaitu sebanyak 44.711 tersangka pada tahun 2008, 38.405 tersangka pada tahun 2009, 33.497 tersangka pada tahun 2010, 36.732 tersangka pada tahun 2011 dan 35.640 tersangka pada tahun 2012 (Kemenkes RI, 2014). Jumlah pengguna narkoba di dunia maupun di Indonesia tergolong tidak sedikit. Oleh karena itu diperlukan upaya dan kesadaran masyarakat untuk menurunkan angka penyalahgunaan narkoba agar tidak terus bertambah setiap tahunnya.

Model matematika merupakan salah satu sarana untuk mempelajari dinamika penyebaran penyalahgunaan narkoba. Terdapat beberapa matematikawan yang telah mengembangkan model matematika penyebaran penyalahgunaan narkoba. **Mushanyu dkk, (2015)** telah mengkontruksi dan menganalisis model penyalahgunaan methamphetamine atau sabu-sabu dengan membagi tipe perawatan rehabilitasi menjadi dua yaitu rawat jalan (*outpatient*) dan rawat inap (*inpatient*). **Mushanyu dkk, (2016)** telah mengkontruksi dan menganalisis model matematika penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan keterbatasan kapasitas rehabilitasi. **Liu dkk, (2018)** telah memformulasikan model SQIR (*Susceptible-Susceptible with history drug abuse-Users not in treatment-Treatment*) untuk menjelaskan transmisi penyebaran narkoba sintesis dengan memperhatikan adanya kambuh dan pengobatan. Selanjutnya, **Mushanyu dan Nyabadza, (2018)** juga memformulasikan model SUTR (*Susceptible-Users-Treatment-Recovered*) untuk menjelaskan transmisi penyalahgunaan narkoba. Populasi *Susceptible* dan *Recovered* masing-masing dibagi berdasarkan tingkat resiko yaitu resiko tinggi dan resiko rendah menyalahgunakan narkoba. Penyebaran penyalahgunaan narkoba terjadi apabila berinteraksi dengan penyalahguna narkoba yang tidak berada dalam tempat rehabilitasi. Pada jurnal tersebut tidak hanya dianalisis titik setimbang model dan kestabilan, namun juga terdapat analisis bifurkasi dan estimasi parameter.

Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh **Mushanyu dan Nyabadza (2018)** pada kompartemen *Treatment* tidak memperhatikan adanya pengobatan atau rehabilitasi berupa rawat jalan sehingga tidak memperhatikan adanya penyebaran narkoba apabila berinteraksi dengan penyalahguna rawat jalan yang tidak berada di dalam tempat rehabilitasi. Selain itu, pada jurnal tersebut tidak ada kontrol optimal untuk mengontrol penyebaran penyalahgunaan narkoba. Oleh sebab itu, pada penelitian ini dilakukan modifikasi pada kompartemen *Treatment* sehingga adanya penyebaran narkoba apabila berinteraksi dengan penyalahguna yang melakukan rawat jalan diperhatikan. Selain itu ditambahkan pula kontrol optimal berupa upaya kampanye anti narkoba pada model yang telah dimodifikasi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan titik setimbang dari model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko?
2. Bagaimana bentuk kontrol optimal pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko?
3. Bagaimana interpretasi model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko sebelum dan sesudah diberi kontrol berdasarkan hasil simulasi numerik?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis kestabilan titik setimbang model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko.
2. Menentukan bentuk kontrol optimal pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko.

3. Menginterpretasikan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko sebelum dan sesudah diberi kontrol berdasarkan hasil simulasi numerik.

1.4 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan informasi kepada masyarakat terkait penyalahgunaan narkoba sehingga dapat melakukan pencegahan resiko dan bahaya penyalahgunaan narkoba.
2. Sebagai bahan acuan untuk penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan penyalahgunaan narkoba.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari permasalahan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko sebagai berikut:

1. Model dasar dan nilai parameter yang digunakan merujuk pada jurnal yang ditulis oleh **Mushanyu dan Nyabadza (2018)**.
2. Variabel kontrol berupa upaya kampanye anti narkoba

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan beberapa teorema, definisi, dan informasi sebagai pendukung ataupun acuan dalam pembahasan penelitian ini.

2.1 Narkoba

Narkoba merupakan singkatan dari narkotika dan obat-obatan berbahaya. Narkoba juga sering disebut istilah untuk narkotika, psikotropika, dan bahan berbahaya lainnya. Istilah lain yang sering digunakan adalah NAPZA (Narkotika, Alkohol, Psikotropika, dan Zat Adiktif lainnya) (**Kemenkes RI, 2014**). Berdasarkan pengertian tersebut maka di Indonesia narkoba dibagi menjadi tiga jenis yaitu narkotika, psikotropika dan zat adiktif.

Menurut Undang-Undang Nomor 35 Tahun 2009, narkotika adalah zat atau obat yang berasal dari tanaman atau bukan tanaman, baik sintetis maupun semisintetis, yang dapat menyebabkan penurunan atau perubahan kesadaran, hilangnya fungsi indra perasa, mengurangi sampai menghilangkan rasa nyeri, dan dapat menimbulkan ketergantungan. Narkotika dibagi menjadi tiga jenis yaitu sebagai berikut :

1. Narkotika Golongan I, yaitu narkotika yang hanya dapat digunakan untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan dan tidak digunakan dalam terapi, serta mempunyai potensi sangat tinggi mengakibatkan ketergantungan. Contohnya adalah opium, ganja, kokain, dan heroin.
2. Narkotika Golongan II, yaitu narkotika berkhasiat pengobatan digunakan sebagai pilihan terakhir dan dapat digunakan dalam terapi dan/atau untuk tujuan pengembangan ilmu pengetahuan serta mempunyai potensi tinggi mengakibatkan ketergantungan. Contohnya morfin, alfasetilmetadol dan ekoginin.
3. Narkotika Golongan III, yaitu Narkotika berkhasiat pengobatan dan banyak digunakan dalam terapi dan/atau untuk tujuan pengembangan ilmu

pengetahuan serta mempunyai potensi ringan mengakibatkan ketergantungan. Contohnya kodein, nikokodin dan propiram.

Menurut Undang-Undang Nomor 5 Tahun 1997, psikotropika adalah zat atau obat, baik alamiah maupun sintesis bukan narkotika yang berkhasiat psikoaktif pada susunan saraf pusat yang menyebabkan perubahan aktivitas mental dan perilaku. Psikotropika dibedakan menjadi empat jenis sebagai berikut :

1. Psikotropika Golongan I, yaitu psikotropika yang hanya dapat digunakan untuk ilmu pengetahuan dan tidak digunakan dalam terapi, serta mempunyai potensi amat kuat mengakibatkan sindroma ketergantungan. Contohnya ekstasi dan LSD (*Lysergic Acid Diethylamid*)
2. Psikotropika Golongan II, yaitu psikotropika yang berkhasiat pengobatan dan banyak digunakan dalam terapi dan/atau untuk tujuan ilmu pengetahuan serta mempunyai potensi kuat mengakibatkan sindroma ketergantungan. Contohnya shabu dan amfetamin.
3. Psikotropika Golongan III, yaitu psikotropika yang berkhasiat pengobatan dan banyak digunakan dalam terapi dan/atau untuk tujuan ilmu pengetahuan serta mempunyai potensi sedang mengakibatkan sindroma ketergantungan. Contohnya mogadon dan brupronorfin.
4. Psikotropika Golongan IV, yaitu psikotropika yang berkhasiat pengobatan dan sangat luas digunakan dalam terapi dan/atau untuk tujuan ilmu pengetahuan serta mempunyai potensi ringan mengakibatkan sindroma ketergantungan. Contohnya diazepam, lexotan, sedativa, dan hipnotika.

Zat adiktif adalah zat psikoaktif yang bekerja pada SSP (Susunan Syaraf Pusat) dan berpengaruh terhadap proses mental. Ada dua jenis zat adiktif yaitu zat adiktif lisit dan zat adiktif ilisit. Zat adiktif lisit adalah substansi yang diterima oleh masyarakat atau beberapa komunitas, misalnya rokok, alkohol, kafein, inhalansia. Sedangkan zat adiktif yang ilisit adalah yang tidak diperbolehkan oleh masyarakat atau negara (**Kemenkes RI, 2014**).

Pengertian ketiga obat-obatan diatas menunjukkan bahwa narkoba digunakan untuk tujuan pengobatan medis, terapi serta pengembangan ilmu pengetahuan.

Apabila dikonsumsi diluar tujuan tersebut maka perilaku itu dapat disebut sebagai penyalahgunaan narkoba. Menurut Undang-undang Nomor 35 Tahun 2009, penyalahguna adalah orang yang menggunakan narkoba tanpa hak atau melawan hukum. Jenis narkoba yang sering disalahgunakan adalah ganja, shabu, ecstasy, heroin, opioda, amfetamin, kokain, benzodiazepin, barbiturat, dan miras (minuman keras). Narkoba dapat digunakan dengan cara dihisap, disuntik ataupun dikonsumsi langsung berupa pil. Berdasarkan data Badan Narkotika Nasional 2013 penyalahguna narkoba di Indonesia paling banyak adalah usia 16 hingga 34 tahun (**Kemenkes RI, 2014**).

Individu yang beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba adalah sebagai berikut:

1. Karena faktor individu yaitu sedang dalam kebosanan, masalah, atau kesusahan hidup, dan tipe individu yang sulit menghadapi tekanan.
2. Karena faktor lingkungan yaitu hubungan keluarga yang tidak harmonis atau *broken home*, kurangnya pendidikan anti narkoba di sekolah, tidak diterima di masyarakat, bergaul dengan pecandu narkoba, dan kurang disiplinnya peraturan di sekolah.

(**BNN, 2013**)

Penyalahgunaan narkoba dapat menyebabkan gangguan pada tubuh antara lain gangguan jantung, traktur urinarius, otak, tulang, pembuluh darah, endorin, kulit, sistem saraf, paru-paru dan pencernaan serta dapat menyebabkan penyakit menular seperti HIV, AIDS, TBC, hepatitis dan herpes. Penyalahguna narkoba juga dapat melakukan hal berbahaya seperti bunuh diri, kekerasan dan tindak kriminal (**BNN, 2014**). Adapun akibat penyalahgunaan narkoba adalah dehidrasi, tubuh kejang-kejang, sesak di bagian dada, berperilaku agresif, halusinasi, meningkatnya kecemasan, menurunnya kesadaran, muntah, mual, ketergantungan, bahkan kematian apabila overdosis (**BNN, 2019**).

Penyalahgunaan narkoba dapat dicegah melalui beberapa metode yaitu kampanye anti narkoba, penyuluhan dan pembinaan bahaya narkoba, pengawasan dan pengendalian produksi narkoba, dan edukasi narkoba di lembaga pendidikan.

Selain dapat dicegah, penyalahgunaan narkoba juga dapat diberantas melalui beberapa cara yaitu penghentian secara langsung, upaya pengobatan terhadap kerusakan organ tubuh dan psikologis, rehabilitasi, dan tindakan hukum (MA RI, 2015). Menurut Undang-Undang Nomor 35 Tahun 2009, terdapat beberapa jenis tindakan hukum terkait penyalahgunaan narkoba tergantung pada tindak kejahatannya. Hukuman tersebut antara lain tindak pidana penjara, sanksi berupa denda dan dekriminalisasi berupa rehabilitasi.

Rehabilitasi terdiri dari dua tahapan yaitu rehabilitasi medis dan rehabilitasi sosial. Berdasarkan Undang-Undang Nomor 35 Tahun 2009, rehabilitasi medis adalah suatu proses kegiatan pengobatan secara terpadu untuk membebaskan pecandu dari ketergantungan narkoba, sedangkan rehabilitasi sosial adalah suatu proses kegiatan pemulihan secara terpadu, baik fisik, mental maupun sosial, agar bekas pecandu narkoba dapat kembali melaksanakan fungsi sosial dalam kehidupan masyarakat. Layanan rehabilitasi terdiri dari rehabilitasi rawat jalan dan rawat inap. Berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor 50 Tahun 2015, pecandu, penyalahguna, dan korban penyalahgunaan narkoba diberikan perawatan berupa rawat jalan maupun rawat inap dengan salah satu atau lebih kondisi di bawah ini:

1. Rawat inap : pola penggunaan yang sifatnya ketergantungan; belum menunjukkan stabilitas mental emosional; mengalami komplikasi fisik dan/atau psikiatrik; pernah memiliki riwayat terapi rehabilitasi beberapa kali sebelumnya.
2. Rawat jalan : memiliki pola penggunaan yang sifatnya rekreasional; zat utama yang digunakan adalah ganja atau amfetamin; zat utama yang digunakan adalah opioda, namun yang bersangkutan telah berada dalam masa pemulihan sebelum tersangkut tindak pidana, atau secara aktif menjalani program terapi rumatan sebelumnya; berusia di bawah 18 tahun; tidak mengalami komplikasi fisik dan/atau psikiatrik.

Pasien rawat jalan harus memeriksakan diri kembali pada unit rawat jalan fasilitas rehabilitasi medis dengan frekuensi paling sedikit 2 (dua) kali seminggu, bergantung pada perkembangan kondisi pasien untuk memperoleh pelayanan

intervensi psikososial, pencegahan kekambuhan, dan terapi medis sesuai kebutuhan, serta untuk menjalani tes urin secara berkala atau sewaktu-waktu.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tetap terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial diklasifikasikan berdasarkan tiga aspek yaitu tipe, orde, dan linieritas. Berdasarkan tipenya, persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Sementara, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat dua atau lebih variabel bebas. Orde dari persamaan diferensial dapat diperoleh dengan melihat tingkat turunan tertinggi dari persamaan diferensial tersebut. Berdasarkan linieritas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu linier dan non linier (**Zill dan Cullen, 2009**).

Model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko ini dikonstruksikan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial non linier karena di dalamnya terdapat interaksi antar komponen. Pada umumnya solusi dari sistem persamaan diferensial non linier sulit ditentukan secara analitik, sehingga digunakan solusi khusus yaitu titik setimbang.

Berikut ini diberikan beberapa definisi terkait persamaan diferensial dan titik setimbang.

Definisi 2.1 Sebuah sistem persamaan diferensial linear dinyatakan sebagai:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax(t)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*) dan A adalah matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real. Penyelesaian dari sistem tersebut adalah

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dengan $e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$

dan $x(t_0) = x_0$ adalah nilai awal dari sistem.

(Bronson dan Costa, 2007)

Definisi 2.2 Sistem persamaan diferensial orde satu dalam n persamaan disebut sebagai sistem autonomous jika sistem dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dan fungsi $g_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, tidak memuat t secara eksplisit.

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.3 Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$. Vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ dengan $0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik setimbang.

(Olsder, 2003)

2.3 Kestabilan Sistem Linier

Kestabilan dari titik setimbang model digunakan untuk mengetahui apakah solusi sistem menuju titik setimbang atau tidak. Pada skripsi ini, model yang akan dibahas berbentuk sistem persamaan diferensial non linier sehingga untuk menganalisis kestabilan titik setimbang diperlukan linearisasi disekitar titik setimbang dengan menggunakan matriks Jacobian. Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema terkait,

Definisi 2.4 Matriks Jacobian yang dinotasikan dengan J dibangun untuk melakukan linierisasi sistem persamaan diferensial non linier. Misalkan

diberikan sistem persamaan autonomous seperti pada sistem persamaan (2.1).

Matriks Jacobian (J) dari sistem persamaan (2.1) adalah:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(Zill dan Cullen, 2009)

Definisi 2.5 Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real.

Vektor tak nol x di \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari A , jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A dan x dikatakan sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

(Anton dan Rorres, 2010)

Teorema 2.6 Misalkan A merupakan matriks tak nol berukuran $n \times n$ atas

bilangan real. Skalar λ adalah nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

(Anton dan Rorres, 2010)

Definisi 2.7 Sistem persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax(t)$, dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, dikatakan stabil asimtotis jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

dengan $x(t)$ penyelesaian dari sistem tersebut dan 0 adalah titik setimbang dari sistem tersebut.

(Zill dan Cullen, 2009)

Teorema 2.8 Sistem persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax$, stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai eigen dari A mempunyai bagian real negatif atau dinotasikan sebagai $Re(\lambda_i(A)) < 0$.

(Zill dan Cullen, 2009)

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Pada beberapa permasalahan tertentu, sulit dilakukan penentuan akar-akar persamaan karakteristik (λ). Oleh karena itu dibutuhkan metode untuk menentukan tanda bagian real dari akar-akar persamaan karakteristik tanpa mencari akar-akar persamaan karakteristik terlebih dahulu. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz.

Berikut akan diberikan teorema mengenai kriteria Routh-Hurwitz:

Definisi 2.9 Diberikan persamaan karakteristik dengan derajat n sebagai berikut:

$$\lambda^n + a\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

dengan koefisien a_i adalah bilangan real, dan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dari sini dapat dibentuk matriks H_n , dengan H_n adalah matriks Hurwitz yang berisi koefisien a_i dari persamaan karakteristik di atas yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{dengan } a_j = \begin{cases} a_j, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

(Merkin, 1997)

Teorema 2.10 Akar-akar persamaan karakteristik pada **Teorema 2.9** bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks *Hurwitz* bernilai positif atau

$$\det(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

(Merkin, 1997)

Berikut ini akan diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 2$, bentuk persamaan karakteristiknya adalah:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Dari persamaan tersebut maka dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan di atas mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

$$\det(H_1) > 0 \text{ dan } \det(H_2) > 0.$$

Dengan demikian diperoleh kondisi sebagai berikut:

- i. $\det(H_1) = |a_1| > 0$ diperoleh $a_1 > 0$.
- ii. $\det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ diperoleh $a_1 a_2 > 0$. Karena $a_1 > 0$, maka $a_2 > 0$.

Akibatnya akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1, a_2 > 0$.

2.5 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Basic reproduction number atau bilangan reproduksi dasar merupakan besaran penting dalam epidemiologi penyakit menular. Parameter ini didefinisikan sebagai ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat individu yang terinfeksi (*Infected*) suatu penyakit masuk pada satu populasi yang rentan (*Susceptible*). Notasi yang digunakan untuk parameter ini adalah R_0 . Jika $R_0 < 1$ maka populasi akan bebas dari terjadinya infeksi (non endemik), sedangkan jika $R_0 > 1$ maka infeksi akan terjadi pada populasi tersebut dan mengakibatkan endemik (**Brauer dan Castillo-Chavez, 2010**).

Pada penelitian ini, metode yang digunakan untuk menentukan R_0 adalah metode *Next Generation Matrix* (NGM) yang telah dikembangkan oleh **Driessche**

dan Watmough (2002). Berikut ini adalah langkah-langkah menentukan R_0 menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM):

1. Menentukan matriks x yang terdiri atas populasi yang menyebabkan terjadinya penyebaran suatu penyakit.
2. Membentuk $\frac{dx}{dt} = F(x) - Z(x)$ sehingga diperoleh matriks $F(x)$ dan $Z(x)$, dengan $F(x)$ adalah matriks transmisi dan $Z(x)$ adalah matriks transisi. Matriks transmisi $F(x)$ adalah matriks yang memuat perpindahan dari populasi non terinfeksi menjadi populasi terinfeksi. Sedangkan matriks transisi $Z(x)$ adalah matriks yang memuat populasi terinfeksi dan berkembang menjadi tahapan penyakit selanjutnya.
3. Menentukan matriks Jacobi dari F terhadap x ($J_1 = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$) dan matriks Jacobi dari Z terhadap ($J_2 = \frac{\partial Z(x)}{\partial x}$).
4. Menentukan matriks \mathbb{F} dan \mathbb{Z} dengan mensubstitusikan titik setimbang bebas penyakit (non endemik) E_0 dari model ke dalam matriks Jacobi J_1 dan J_2 yang diperoleh dari langkah (3), dengan kata lain $\mathbb{F} = J_1(E_0)$ dan $\mathbb{Z} = J_2(E_0)$.
5. Menentukan invers dari matriks \mathbb{Z} yang dinotasikan dengan \mathbb{Z}^{-1} dengan matriks \mathbb{Z} merupakan matriks non singular.
6. Menghitung nilai eigen dari matriks $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$.
7. Menentukan nilai eigen terbesar dari matriks $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$ sebagai R_0 .

2.6 Masalah Kontrol Optimal

Pada umumnya masalah kontrol optimal adalah suatu masalah dengan tujuan mencari kontrol $u(t)$ yang dapat mengoptimalkan (memaksimumkan atau meminimumkan) indeks performansi. Indeks performansi diformulasikan sebagai berikut:

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

dengan kendala

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

dengan t_0 dan t_f masing-masing adalah waktu awal pemberian kontrol dan waktu akhir pemberian kontrol. Sedangkan φ dan L adalah fungsi skalar. Kontrol $u^*(t)$ merupakan kontrol optimal jika dapat mengoptimalkan indeks performansi (**Lewis dan Syrmos, 2006**).

Menurut **Naidu (2002)**, untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, salah satu metode yang dapat digunakan adalah Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan kondisi dapat diperolehnya penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan meminimumkan indeks performansi.

Prosedur menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

Misalkan diberikan persamaan *state*:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $u(t) \in \mathbb{R}^m$, dan indeks performansi:

$$J = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

dengan nilai kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan t_f diberikan, sedangkan $x(t_f) = x_f$ bebas.

Syarat cukup untuk meminimalkan indeks performansi J adalah mengkonversi persamaan *state* dan persamaan indeks performansi ke dalam masalah meminimalkan fungsi Hamiltonian. Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian yaitu kombinasi fungsi dari suatu masalah ($L(x(t), u(t), t)$) dan perkalian fungsi subyek berbentuk persamaan diferensial ($f(x(t), u(t), t)$) dengan pengali *Lagrange* $\gamma(t)$. Berikut bentuk fungsi Hamiltonian:

$$H(x(t), u(t), \gamma(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \gamma^T(t) f(x(t), u(t), t)$$

2. Meminimumkan H terhadap semua vektor $u(t)$ yaitu $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ sehingga diperoleh $u^*(t) = H^*(x^*(t), \gamma^*(t), t)$.

3. Gunakan hasil dari Langkah 2 ke dalam fungsi Hamiltonian yang telah dibentuk dari Langkah 1, sehingga diperoleh H^* yang optimal yaitu

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \gamma^*(t), t) = H^*(x^*(t), \gamma^*(t), t)$$

4. Selesaikan fungsi Hamiltonian yang telah dibentuk dengan:

i. Persamaan *state* yaitu persamaan kendala pada model

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \gamma}$$

dengan diberikan nilai awal $x(t_0) = x_0$.

ii. Persamaan *co-state* atau pengali *Lagrange* yang terkait dengan kendala akumulasi dari variabel keadaan.

$$\dot{\gamma}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

dengan diberikan nilai $\gamma(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\Big|_{t_f}$.

5. Substitusikan solusi dari $x^*(t)$ dan $\gamma^*(t)$ dari Langkah 4 ke dalam kendala optimal $u^*(t)$ yang diperoleh dari Langkah 2 untuk memperoleh kontrol yang optimal.

(Naidu, 2002)

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan studi literatur melalui jurnal, buku referensi maupun artikel mengenai penyalahgunaan narkoba dan model matematika penyalahgunaan narkoba.
2. Menganalisis kestabilan titik setimbang model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe beserta tingkat resiko, dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a. Menentukan titik setimbang model yaitu titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik.
 - b. Melinierisasi model dengan matriks Jacobian.
 - c. Menguji kestabilan dari titik setimbang model yang telah didapat.
3. Menentukan kontrol optimal untuk model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko, dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a. Menkontruksi input kontrol untuk model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko.
 - b. Menentukan indeks performansi berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin.
 - c. Menentukan fungsi kontrol yang optimal menggunakan Prinsip Maksimum Potryagin dengan tahapan sebagai berikut :
 - i. Membentuk fungsi Hamiltonian.
 - ii. Meminimumkan fungsi Hamiltonian sehingga diperoleh fungsi kontrol yang optimal.
 - iii. Menentukan fungsi Hamiltonian yang optimal.
 - iv. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*.
 - v. Mensubstitusikan solusi dari tahap (iv) ke dalam fungsi kontrol yang optimal dari tahap (ii).

4. Mensimulasikan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal, menggunakan program pada *software* MATLAB.
5. Menginterpretasikan hasil simulasi model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko yang telah didapatkan pada tahap (4).
6. Menarik kesimpulan berdasarkan langkah pertama hingga terakhir.

BAB IV PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas analisis kestabilan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko dan kontrol optimal. Analisis model matematika yang dibahas meliputi penentuan titik setimbang, analisis kestabilan titik setimbang tersebut, dan *basic reproduction number* (R_0). Selanjutnya, dicari bentuk kontrol optimal dari model untuk mengendalikan penyalahgunaan narkoba dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Berikutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analitik dan akan dijelaskan pula interpretasinya.

4.1 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Pada subbab ini dibahas model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko dan analisis kestabilan dari titik setimbang non endemik (bebas narkoba) dan endemik. Sebelum dilakukan analisis kestabilan dari titik setimbang, maka terlebih dahulu disajikan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko.

4.1.1 Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Pada subbab ini dijelaskan formulasi model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko yang merujuk pada **Mushanyu dan Nyabadza (2018)** dengan modifikasi yakni populasi yang mendapatkan perawatan dibagi menjadi dua tipe perawatan yaitu rawat jalan (T_j) dan rawat inap (T_r). Sedangkan populasi yang sembuh tidak memperhatikan resiko tinggi dan resiko rendah, sehingga menjadi satu populasi yaitu populasi yang sembuh dari penyalahgunaan narkoba (R). Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model penyebaran penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tingkat resiko:

1. Penyalahguna narkoba yang telah sembuh dapat kambuh atau menyalahgunakan narkoba kembali.
2. Penyalahguna yang mendapatkan perawatan berupa rawat jalan dapat kambuh saat berinteraksi dengan penyalahguna yang tidak mendapatkan perawatan.
3. Hanya penyalahguna yang tidak mendapatkan perawatan yang dapat menyebarkan narkoba.
4. Penyalahguna yang mendapatkan perawatan berupa rawat inap tidak dapat berinteraksi dengan penyalahguna yang tidak mendapatkan perawatan.
5. Populasi manusia menjadi manusia rentan saat mencapai usia 15 tahun.
6. Individu rentan dengan resiko rendah memiliki peluang lebih kecil menjadi penyalahguna narkoba daripada individu rentan dengan resiko tinggi.

Berikut ini adalah notasi dan definisi variabel pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko:

Tabel 4.1 Pendefinisian Variabel dalam Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Notasi	Keterangan
$S_H(t)$	Populasi manusia rentan dan beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba pada saat t
$S_L(t)$	Populasi manusia rentan dan beresiko rendah menyalahgunakan narkoba pada saat t
$I(t)$	Populasi penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan pada saat t
$T_j(t)$	Populasi penyalahguna narkoba yang mendapatkan perawatan berupa rehabilitasi rawat jalan pada saat t
$T_r(t)$	Populasi penyalahguna narkoba yang mendapatkan perawatan berupa rehabilitasi rawat inap pada saat t

$R(t)$	Populasi manusia yang telah sembuh dari penyalahgunaan narkoba pada saat t
$N(t)$	Total populasi manusia pada saat t

Berikut ini adalah notasi dan definisi parameter pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko:

Tabel 4.2 Pendefinisian Parameter dalam Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

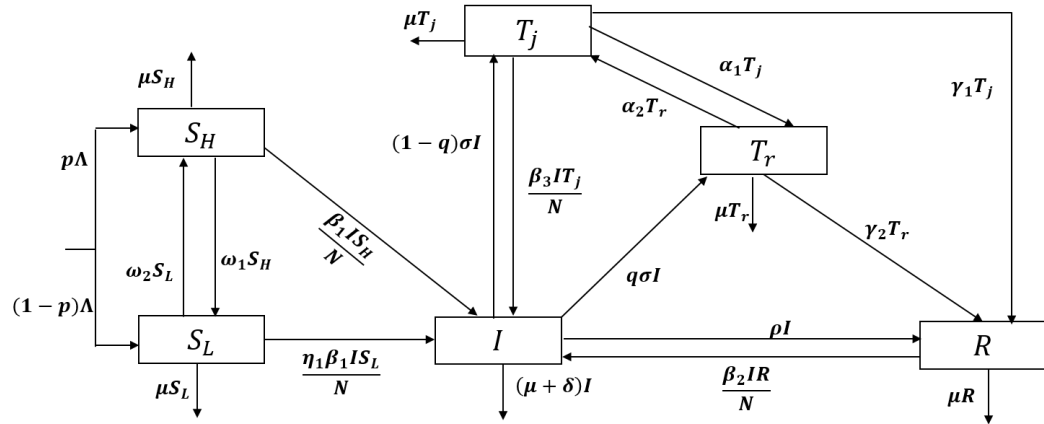
NOTASI	KETERANGAN
Λ	Laju rekrutmen
p	Proporsi individu yang memasuki populasi manusia rentan dengan resiko tinggi
q	Proporsi penyalahguna narkoba menjalani rawat inap di tempat rehabilitasi
β_1	Probabilitas individu rentan menjadi penyalahguna narkoba
β_2	Probabilitas individu yang sembuh dari penyalahgunaan narkoba menjadi penyalahguna narkoba kembali atau kambuh.
β_3	Probabilitas penyalahguna yang mendapat perawatan berupa rawat jalan menjadi penyalahguna yang tidak mendapat perawatan.
η	Parameter modifikasi untuk mengecilkan peluang individu rentan dengan resiko rendah menjadi penyalahguna narkoba
ω_1	Laju transisi dari individu rentan dengan resiko tinggi menjadi individu rentan dengan resiko rendah
ω_2	Laju transisi dari individu rentan dengan resiko rendah menjadi individu rentan dengan resiko tinggi
α_1	Laju transisi dari penyalahguna yang dirawat jalan menjadi penyalahguna yang dirawat inap

α_2	Laju transisi dari penyalahguna yang dirawat inap menjadi penyalahguna yang dirawat jalan
ρ	Laju kesembuhan alami penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan
γ_1	Laju kesembuhan penyalahguna narkoba yang mendapatkan perawatan berupa rawat jalan
γ_2	Laju kesembuhan penyalahguna narkoba yang mendapatkan perawatan berupa rawat inap
σ	Laju penyalahguna narkoba menjadi pasien rehabilitasi
δ	Laju kematian karena narkoba
μ	Laju kematian alami
$u(t)$	Upaya kampanye anti narkoba pada saat t

Untuk mempermudah penulisan, maka notasi $S_H(t), S_L(t), I(t), T_j(t), T_r(t), R(t), N(t)$ selanjutnya berturut-turut ditulis sebagai $S_H, S_L, I, T_j, T_r, R, N$. Notasi tersebut menyatakan populasi tertentu yang tidak mungkin negatif sehingga diasumsikan $S_H, S_L, I, T_j, T_r, R, N \geq 0$. Selain itu, seluruh parameter bernilai positif sebab menyatakan besaran laju, atau

$$\Lambda, p, q, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \eta, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \rho, \gamma_1, \gamma_2, \sigma, \mu > 0.$$

Berdasarkan asumsi-asumsi dan pendefinisian variabel serta parameter yang telah dijelaskan sebelumnya, maka dapat dibentuk diagram transmisi seperti pada Gambar 4.1 sebagai berikut :



Gambar 4.1 Diagram Transmisi Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Keterangan :

—————> : Mengurangi populasi asal dan menambah populasi yang dituju.

Berdasarkan diagram transmisi pada Gambar 4.1, model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_H}{dt} = p\Lambda - \frac{\beta_1IS_H}{N} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2S_L \quad (4.1)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = (1-p)\Lambda - \frac{\eta\beta_1IS_L}{N} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1S_H \quad (4.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta_1I(S_H + \eta S_L)}{N} + \frac{\beta_2IR}{N} + \frac{\beta_3IT_j}{N} - (\mu + \sigma + \delta + \rho)I \quad (4.3)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = (1-q)\sigma I - \frac{\beta_3IT_j}{N} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2T_r \quad (4.4)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1T_j \quad (4.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1T_j + \gamma_2T_r + \rho I - \frac{\beta_2IR}{N} - \mu R \quad (4.6)$$

dengan $N = S_H + S_L + I + T_j + T_r + R$.

Persamaan (4.1) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang rentan namun beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena adanya rekrutmen manusia yang memasuki usia 15 tahun dan beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba. Populasi ini juga bertambah karena populasi manusia rentan namun beresiko rendah menyalahgunakan narkoba menjadi beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba. Populasi ini berkurang karena berinteraksi dengan penyalahguna narkoba yang tidak direhabilitasi dan berkurang pula karena menjadi manusia rentan namun beresiko rendah menyalahgunakan narkoba. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami.

Persamaan (4.2) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang rentan namun beresiko rendah menyalahgunakan narkoba per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena adanya rekrutmen manusia yang memasuki usia 15 tahun dan beresiko rendah menyalahgunakan narkoba. Populasi ini juga bertambah karena populasi manusia rentan namun beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba menjadi beresiko rendah menyalahgunakan narkoba. Populasi ini berkurang karena berinteraksi dengan penyalahguna narkoba yang tidak direhabilitasi dan berkurang pula karena menjadi manusia rentan namun beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami.

Persamaan (4.3) menyatakan laju perubahan populasi penyalahguna narkoba yang tidak direhabilitasi atau tidak mendapatkan perawatan per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena berinteraksi dengan individu rentan namun beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba maupun beresiko rendah menyalahgunakan narkoba. Populasi ini bertambah pula karena individu yang sembuh serta individu yang mendapatkan perawatan berupa rawat jalan menjadi kambuh kembali. Populasi ini berkurang karena kesembuhan alami dan adanya laju penyalahguna menjadi pasien di rehabilitasi baik rawat jalan maupun rawat inap. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami dan kematian karena narkoba.

Persamaan (4.4) menyatakan laju perubahan populasi penyalahguna narkoba yang mendapatkan pengobatan berupa rawat jalan per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena adanya laju penyalahguna menjadi pasien rawat jalan. Populasi ini bertambah pula karena pasien rehabilitasi rawat inap menjadi pasien rawat jalan. Populasi ini berkurang karena berinteraksi dengan penyalahguna yang tidak dirawat sehingga menjadi kambuh. Populasi ini berkurang karena pasien rawat jalan menjadi pasien rawat inap di tempat rehabilitasi. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami dan kesembuhan karena pengobatan.

Persamaan (4.5) menyatakan laju perubahan populasi penyalahguna narkoba yang mendapatkan pengobatan berupa rawat inap per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena adanya laju penyalahguna menjadi pasien rawat inap. Populasi ini bertambah pula karena pasien rehabilitasi rawat jalan menjadi pasien rawat inap. Populasi ini berkurang karena pasien rawat inap menjadi pasien rawat jalan. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami dan kesembuhan karena pengobatan.

Persamaan (4.6) menyatakan laju perubahan populasi manusia yang sembuh dari penyalahgunaan narkoba per satuan waktu. Populasi ini bertambah karena kesembuhan alami penyalahguna narkoba yang tidak direhabilitasi. Populasi ini juga bertambah karena adanya laju kesembuhan penyalahguna narkoba yang mendapatkan perawatan berupa rawat jalan maupun rawat inap di tempat rehabilitasi. Populasi ini berkurang akibat kambuh karena berinteraksi dengan penyalahguna narkoba yang tidak direhabilitasi. Populasi ini juga berkurang karena kematian alami.

Total populasi manusia dinyatakan dengan $N = S_H + S_L + I + T_j + T_r + R$.

Dari sini laju perubahan total populasi manusia adalah

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS_H}{dt} + \frac{dS_L}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dT_j}{dt} + \frac{dT_r}{dt} + \frac{dR}{dt}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.1) – (4.6), maka diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I.$$

Berdasarkan persamaan $\frac{dN}{dt}$ diatas, diketahui bahwa N tidak konstan sehingga didekati dengan pendekatan limit. Untuk analisis kestabilan laju kematian karena narkoba diabaikan karena nilainya kecil ($\delta \approx 0$), sehingga $\frac{dN}{dt}$ menjadi :

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N.$$

Dari sini diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (4.7)$$

Untuk selanjutnya, variabel N akan didekati dengan $N = \frac{\Lambda}{\mu}$. Uraian perhitungan lengkap dapat dilihat pada Lampiran 1.

Dengan demikian, model pada persamaan (4.1) – (4.6) dapat dituliskan berikut:

$$\frac{dS_H}{dt} = p\Lambda - \frac{\mu\beta_1 I S_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2 S_L \quad (4.8)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = (1 - p)\Lambda - \frac{\mu\eta\beta_1 I S_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1 S_H \quad (4.9)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mu\beta_1 I (S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2 I R}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho)I \quad (4.10)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = (1 - q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r \quad (4.11)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j \quad (4.12)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2 I R}{\Lambda} - \mu R \quad (4.13)$$

4.1.2 Titik Setimbang Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Berdasarkan **Definisi 2.3**, kondisi setimbang merupakan suatu kondisi ketika laju perubahan jumlah populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Secara matematis dapat dituliskan pada persamaan berikut

$$\frac{dS_H}{dt} = \frac{dS_L}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT_j}{dt} = \frac{dT_r}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0. \quad (4.14)$$

Dengan demikian, kondisi setimbang dari persamaan (4.8) – (4.13) adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS_H}{dt} = p\Lambda - \frac{\mu\beta_1 I S_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2 S_L = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = (1 - p)\Lambda - \frac{\mu\eta\beta_1 I S_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1 S_H = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mu\beta_1 I (S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2 I R}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho)I = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = (1 - q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2 I R}{\Lambda} - \mu R = 0 \quad (4.20)$$

Berdasarkan persamaan (4.15) – (4.20), dapat ditentukan titik setimbang bebas narkoba (non endemik) dan titik setimbang penyebaran penyalahgunaan narkoba (endemik).

Titik setimbang bebas narkoba adalah suatu kondisi ketika tidak terjadi penyebaran narkoba dalam populasi, dalam hal ini yaitu tidak ada manusia yang menyalahgunakan narkoba atau banyaknya penyalahguna narkoba adalah nol. Oleh karena itu dapat dinyatakan $I = 0$. Misalkan titik setimbang bebas narkoba dinyatakan dalam $E_0 = (S_H^0, S_L^0, I^0, T_j^0, T_r^0, R^0)$. Dengan mensubstitusikan $I = 0$ ke persamaan (4.15) - (4.20) diperoleh titik setimbang non endemik dari model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko adalah sebagai berikut :

$$E_0 = (S_H^0, S_L^0, I^0, T_j^0, T_r^0, R^0) = \left(\frac{\Lambda(\mu p + \omega_2)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, \frac{\Lambda(\mu(1 - p) + \omega_1)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Uraian lengkap perhitungan titik setimbang non endemik (E_0) dapat dilihat pada Lampiran 2.

Selanjutnya akan ditentukan *Basic Reproduction Number* (R_0) yang digunakan sebagai parameter ambang batas penentuan kriteria endemik yakni ada atau tidaknya penyebaran penyalahgunaan narkoba pada populasi. Pada skripsi ini, metode yang digunakan adalah metode NGM (*Next Generation Matrix*) yang dikenalkan oleh **Driessche dan Watmough (2002)**. Untuk mendapatkan R_0 yang diperhatikan hanya populasi I , T_j , dan T_r karena populasi tersebut yang menjadi penyebab penyalahgunaan narkoba.

Misalkan $x = \begin{pmatrix} I \\ T_j \\ T_r \end{pmatrix}$, maka persamaan (4.10) - (4.12) pada model dapat ditulis

sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(x) - \mathcal{Z}(x),$$

dengan $\mathcal{F}(x)$ adalah matriks transmisi, yaitu matriks yang elemennya berisi subpopulasi tahapan awal penyalahgunaan narkoba akibat kontak dengan individu I . Sedangkan, $\mathcal{Z}(x)$ adalah matriks transisi, yaitu matriks yang berisi subpopulasi manusia yang menyalahgunakan narkoba. Dengan demikian diperoleh:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\mu\beta_1 I(S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2 IR}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} & & \\ & -\frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan}$$

$$\mathcal{Z}(x) = \begin{pmatrix} (\mu + \sigma + \rho)I & & \\ -(1-q)\sigma I + (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j - \alpha_2 T_r & & \\ -q\sigma I + (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r - \alpha_1 T_j & & \end{pmatrix}.$$

Misalkan \mathbb{F} dan \mathbb{Z} masing-masing adalah matriks Jacobian dari matriks $\mathcal{F}(x)$ dan $\mathcal{Z}(x)$. Dengan mensubstitusikan titik setimbang non endemik

$E_0 = \left(\frac{\Lambda(\mu p + \omega_2)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, \frac{\Lambda(\mu(1-p) + \omega_1)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, 0, 0, 0, 0 \right)$ diperoleh \mathbb{F} dan \mathbb{Z} sebagai berikut:

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1))}{\mu + \omega_1 + \omega_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \mu + \sigma + \rho & 0 & 0 \\ -(1-q)\sigma & \mu + \alpha_1 + \gamma_1 & -\alpha_2 \\ -q\sigma & -\alpha_1 & \mu + \alpha_2 + \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Pada metode NGM, R_0 diperoleh dengan menentukan nilai eigen terbesar dari matriks FZ^{-1} , sehingga diperoleh *basic reproduction number* sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1))}{(\mu + \sigma + \rho)(\mu + \omega_1 + \omega_2)} \quad (4.21)$$

Perhitungan lengkap R_0 dapat dilihat pada Lampiran 3.

Titik setimbang endemik adalah suatu kondisi ketika terjadi penyalahgunaan narkoba. Kondisi ini terjadi ketika terdapat populasi manusia rentan yang beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba, populasi manusia rentan yang beresiko rendah menyalahgunakan narkoba, populasi penyalahguna narkoba, populasi penyalahguna yang dirawat jalan, populasi penyalahguna yang dirawat inap dan juga populasi penyalahguna yang sembuh atau dapat dinyatakan dengan $S_H \neq 0, S_L \neq 0, I \neq 0, T_j \neq 0, T_r \neq 0, R \neq 0$. Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan sebagai $E_1 = (S_H^*, S_L^*, I^*, T_j^*, T_r^*, R^*)$. Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 4, diperoleh titik setimbang endemik sebagai berikut:

$$S_H^* = \frac{\Lambda^2(\mu p(\eta\beta_1 I^* + \Lambda) + \Lambda\omega_2)}{\mu((\eta\beta_1 I^* + \Lambda)(\mu\beta_1 I^* + \Lambda(\mu + \omega_1)) + \Lambda\omega_2(\beta_1 I^* + \Lambda))}$$

$$S_L^* = \frac{\Lambda^2(\mu(1-p)(\beta_1 I^* + \Lambda) + \omega_1\Lambda)}{\mu((\eta\beta_1 I^* + \Lambda)(\mu\beta_1 I^* + \Lambda(\mu + \omega_1)) + \Lambda\omega_2(\beta_1 I^* + \Lambda))}$$

$$T_j^* = \frac{\Lambda\sigma I^*((\mu + \gamma_2)(1-q) + \alpha_2)}{(\mu\beta_3 I^* + \Lambda(\mu + \gamma_1))(\mu + \alpha_2 + \gamma_2) + \Lambda\alpha_1(\mu + \gamma_2)}$$

$$T_r^* = \frac{\sigma I^*[q(\mu\beta_3 I^* + \Lambda(\mu + \gamma_1)) + \Lambda\alpha_1]}{(\mu\beta_3 I^* + \Lambda(\mu + \gamma_1))(\mu + \alpha_2 + \gamma_2) + \Lambda\alpha_1(\mu + \gamma_2)}$$

$$R^* = \frac{\Lambda(\gamma_1 T_j^*(\mu + \alpha_2 + \gamma_2) + \gamma_2(q\sigma I^* + \alpha_1 T_j^*) + \rho I^*(\mu + \alpha_2 + \gamma_2))}{\mu(\mu + \alpha_2 + \gamma_2)(\beta_2 I^* + \Lambda)}$$

Sedangkan I^* merupakan akar dari polinomial berderajat empat berikut:

$$B_1 I^{*4} + B_2 I^{*3} + B_3 I^{*2} + B_4 I^* + B_5 = 0 \quad (4.22)$$

dengan

$$B_1 = -\Lambda\beta_1^2\beta_2\beta_3\eta n_3\mu^5(q\sigma + \mu + \alpha_2 + \gamma_2)$$

$$B_2 = \Lambda^2\sigma n_1\mu^3\beta_1\beta_3n_3(\mu(\beta_2\eta + \beta_1\eta + \beta_2) + \beta_2(\omega_1\eta + \omega_2)) + \\ \Lambda^2\beta_1^2\beta_2\mu^3\eta(\sigma n_1n_2 + \beta_3n_3\mu) + \Lambda^2\beta_1\beta_2\mu^3(\gamma_2q\sigma + n_3(\rho - s))(\beta_1\eta(\alpha_1\gamma_2 + \\ \alpha_1\mu + \gamma_1n_3 + n_3\mu) + \beta_3n_3(\eta\mu + \eta\omega_1 + \mu + \omega_2)) - \Lambda^2\beta_1^2\beta_3\eta n_3^2\mu^4s$$

$$B_3 = \Lambda^3\beta_1\mu^2(\sigma\beta_2n_1n_2 + \beta_3n_3\mu(\sigma n_1 - n_3s))(\eta(\mu + \omega_1) + \mu + \omega_2) + \\ \Lambda^3\beta_2\mu^3\beta_3n_3(q\sigma\gamma_2 + n_3(\rho - s) + \sigma n_1)(\mu + \omega_1 + \omega_2) + \Lambda^3\beta_2\mu^2(q\sigma\gamma_2 + \\ n_3(\rho - s))(\alpha_1\beta_1(\eta\gamma_2\mu + \eta\gamma_2\omega_1 + \eta\mu^2 + \eta\mu\omega_1 + \gamma_2\mu + \gamma_2\omega_2 + \mu^2 + \\ \mu\omega_2) + \beta_1n_3(\eta\gamma_1\mu + \eta\gamma_1\omega_1 + \eta\mu^2 + \eta\mu\omega_1 + \gamma_1\mu + \gamma_1\omega_2 + \mu^2 + \mu\omega_2)) + \\ \Lambda^3\beta_1^2n_3\mu^3\eta(\beta_2 - s)(\alpha_1(\gamma_2 + \mu) + n_3(\gamma_1 + \mu)) + n_3^2\beta_3\mu(\Lambda^3\beta_1^2\mu^3\eta + \beta_2v)$$

$$B_4 = \mu^2 \left[\Lambda^4(\sigma n_1(\beta_2n_2 + \beta_3n_3\mu) + \beta_2(\gamma_2q\sigma + n_3(\rho - s))(\alpha_1(\gamma_2 + \mu) + n_3(\gamma_1 + \mu)) - \beta_3n_3^2\mu s)(\mu + \omega_1 + \omega_2) + \Lambda n_3 \left((\Lambda^3\beta_1^2\mu\eta + \beta_2v - \Lambda^3\beta_1s(\mu + \omega_2 + \eta(\mu + \omega_1))) (\alpha_1(\gamma_2 + \mu) + n_3(\gamma_1 + \mu)) + \Lambda n_3^2\beta_3\mu^2v \right) \right]$$

$$B_5 = \Lambda^2n_3\mu^2(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_1\mu + \gamma_1n_3 + n_3\mu)(v - \Lambda^3s(\mu + \omega_1 + \omega_2))$$

$$n_1 = (\mu + \gamma_2)(1 - q) + \alpha_2$$

$$n_2 = \gamma_1\mu + \gamma_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\gamma_2$$

$$n_3 = \mu + \alpha_2 + \gamma_2$$

$$v = \beta_1\Lambda^2 \left(\Lambda\mu(p + \eta(1 - p)) + \Lambda(\eta\omega_1 + \omega_2) \right)$$

$$s = \mu + \sigma + \rho.$$

Berdasarkan sifat polinomial berderajat empat, persamaan (4.22) memiliki satu akar positif jika perkalian semua akarnya kurang dari nol. Misalkan akar-akar dari

persamaan (4.22) adalah I_1, I_2, I_3 , dan I_4 , sedangkan perkalian akar-akar dari persamaan (4.22) adalah $\frac{B_5}{B_1}$. Jelas bahwa $B_1 < 0$ karena semua parameter bernilai positif, sehingga akan ditentukan syarat agar $B_5 > 0$ yaitu :

$$B_5 > 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^2 n_3 \mu^2 (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_1 \mu + \gamma_1 n_3 + n_3 \mu) (v - \Lambda^3 s (\mu + \omega_1 + \omega_2)) > 0 .$$

Karena semua parameter bernilai positif, jelas bahwa $\Lambda^2 n_3 \mu^2 (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_1 \mu + \gamma_1 n_3 + n_3 \mu) > 0$ sehingga didapatkan $v - \Lambda^3 s (\mu + \omega_1 + \omega_2) > 0$ dan diuraikan sebagai berikut :

$$v - \Lambda^3 s (\mu + \omega_1 + \omega_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^3 \beta_1 (\mu (p + \eta (1 - p)) + \eta \omega_1 + \omega_2) - \Lambda^3 (\mu + \sigma + \rho) (\mu + \omega_1 + \omega_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^3 (\mu + \sigma + \rho) (\mu + \omega_1 + \omega_2) \left(\frac{\beta_1 (\mu (p + \eta (1 - p)) + \eta \omega_1 + \omega_2)}{(\mu + \sigma + \rho) (\mu + \omega_1 + \omega_2)} - 1 \right) > 0 .$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.21), maka pertidaksamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\Lambda^3 (\mu + \sigma + \rho) (\mu + \omega_1 + \omega_2) (R_0 - 1) > 0 .$$

Jelas bahwa $\Lambda^3 (\mu + \sigma + \rho) (\mu + \omega_1 + \omega_2) > 0$ sehingga $B_5 > 0$ jika memenuhi $R_0 > 1$.

Jadi, persamaan (4.22) memiliki satu akar positif jika dan hanya jika $R_0 > 1$, sehingga diperoleh syarat eksistensi untuk I^* yaitu $R_0 > 1$. Kompartemen $S_H^*, S_L^*, T_j^*, T_r^*$ dan R^* akan eksis jika I^* eksis. Oleh sebab itu, titik setimbang endemik eksis jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

4.1.3 Analisis Kestabilan Titik Setimbang

Model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko berbentuk sistem persamaan diferensial non linier, sehingga sulit untuk menganalisis kestabilan titik setimbangnya. Oleh sebab itu perlu dilakukan linierisasi menggunakan matriks Jacobian. Persamaan-persamaan yang terdapat pada sistem persamaan diferensial non linier tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi dari variabel S_H, S_L, I, T_j, T_r , dan R , sehingga secara umum persamaan (4.8) – (4.13) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dS_H}{dt} = f_1(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = f_2(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)$$

$$\frac{dI}{dt} = f_3(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = f_4(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = f_5(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)$$

$$\frac{dR}{dt} = f_6(S_H, S_L, I, T_j, T_r, R).$$

Berdasarkan **Definisi 2.4**, matriks Jacobian dari model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_H} & \frac{\partial f_1}{\partial S_L} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T_j} & \frac{\partial f_1}{\partial T_r} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_H} & \frac{\partial f_2}{\partial S_L} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T_j} & \frac{\partial f_2}{\partial T_r} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_H} & \frac{\partial f_3}{\partial S_L} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T_j} & \frac{\partial f_3}{\partial T_r} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S_H} & \frac{\partial f_4}{\partial S_L} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial T_j} & \frac{\partial f_4}{\partial T_r} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S_H} & \frac{\partial f_5}{\partial S_L} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial T_j} & \frac{\partial f_5}{\partial T_r} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_H} & \frac{\partial f_6}{\partial S_L} & \frac{\partial f_6}{\partial I} & \frac{\partial f_6}{\partial T_j} & \frac{\partial f_6}{\partial T_r} & \frac{\partial f_6}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\beta_1 I}{\Lambda} - d_4 & \omega_2 & -\frac{\mu\beta_1 S_H}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -\frac{\mu\eta\beta_1 I}{\Lambda} - d_5 & -\frac{\mu\eta\beta_1 S_L}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu\beta_1 I}{\Lambda} & \frac{\mu\eta\beta_1 I}{\Lambda} & d_9 - d_1 & \frac{\mu\beta_3 I}{\Lambda} & 0 & \frac{\mu\beta_2 I}{\Lambda} \\ 0 & 0 & (1-q)\sigma - \frac{\mu\beta_3 T_j}{\Lambda} & -\frac{\mu\beta_3 I}{\Lambda} - d_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & q\sigma & \alpha_1 & -d_3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho - \frac{\mu\beta_2 R}{\Lambda} & \gamma_1 & \gamma_2 & -\frac{\mu\beta_2 I}{\Lambda} - \mu \end{pmatrix}$$

dengan

$$d_1 = \mu + \sigma + \rho$$

$$d_2 = \mu + \alpha_1 + \gamma_1$$

$$d_3 = \mu + \alpha_2 + \gamma_2$$

$$d_4 = \mu + \omega_1$$

$$d_5 = \mu + \omega_2$$

$$d_9 = \frac{\mu(\beta_1(S_H + \eta S_L) + \beta_2 R + \beta_3 T_j)}{\Lambda}.$$

Berdasarkan **Teorema 2.6** kestabilan suatu sistem dapat ditentukan melalui nilai eigen dari matriks Jacobian yang terbentuk. Selanjutnya, akan dianalisis kestabilan dari titik setimbang non endemik (bebas narkoba) dan endemik.

a. Kestabilan Lokal Titik Setimbang Non Endemik (Bebas Narkoba)

Analisis kestabilan lokal pada titik setimbang non endemik diawali dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang non endemik yaitu $E_0 = \left(\frac{\Lambda(\mu p + \omega_2)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, \frac{\Lambda(\mu(1-p) + \omega_1)}{\mu(\mu + \omega_1 + \omega_2)}, 0, 0, 0, 0 \right)$ ke dalam matriks Jacobian diatas, sehingga diperoleh

$$JE_0 = \begin{pmatrix} -d_4 & \omega_2 & -\frac{\beta_1(\mu p + \omega_2)}{d_6} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -d_5 & -\frac{\eta\beta_1(\mu(1-p) + \omega_2)}{d_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_2))}{d_6} - d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-q)\sigma & -d_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & q\sigma & \alpha_1 & -d_3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan $d_6 = \mu + \omega_1 + \omega_2$.

Selanjutnya untuk menentukan kestabilan titik setimbang non endemik, akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian JE_0 diatas dengan menggunakan $\det(JE_0 - \lambda I) = 0$ yang diuraikan sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} -d_4 - \lambda & \omega_2 & -\frac{\beta_1(\mu p + \omega_2)}{d_6} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -d_5 - \lambda & -\frac{\eta\beta_1(\mu(1-p) + \omega_2)}{d_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f - d_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-q)\sigma & -d_2 - \lambda & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & q\sigma & \alpha_1 & -d_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \rho & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

atau diperoleh bentuk yang ekuivalen sebagai berikut :

$$(f - d_1 - \lambda)(-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-\mu - \omega_1 - \omega_2 - \lambda)(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) = 0 \quad (4.23)$$

dengan

$$f = \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_2))}{d_6}$$

$$c_1 = 2\mu + \alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_2$$

$$c_2 = \mu^2 + \mu\alpha_2 + \mu\gamma_2 + \mu\gamma_1 + \gamma_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2 + \mu\alpha_1 + \gamma_2\alpha_1.$$

Uraian lengkap perhitungan dapat dilihat pada Lampiran 5.

Dari persamaan (4.23), diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = f - d_1$, $\lambda_2 = -\mu$, $\lambda_3 = -\mu$, $\lambda_4 = -\mu - \omega_1 - \omega_2$, serta sisanya adalah akar-akar dari persamaan berikut :

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0 \quad (4.24)$$

Berdasarkan **Teorema 2.8**, titik setimbang stabil asimtotis jika dan hanya jika $Re(\lambda_i(JE_0)) < 0$. Jelas bahwa $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ karena semua parameter bernilai positif. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (4.24) mempunyai akar-akar dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$. Jelas bahwa, $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$ karena semua parameter bernilai positif, sehingga dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan (4.24) memiliki bagian real negatif.

Selanjutnya akan ditentukan syarat agar λ_1 bernilai negatif yaitu :

$$\lambda_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow f - d_1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_2))}{\mu + \omega_1 + \omega_2} - (\mu + \sigma + \rho) < 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \sigma + \rho) \left(\frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_2))}{(\mu + \omega_1 + \omega_2)(\mu + \sigma + \rho)} - 1 \right) < 0.$$

Karena sebelumnya diperoleh $R_0 = \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_2))}{(\mu + \omega_1 + \omega_2)(\mu + \sigma + \rho)}$, maka uraian diatas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\lambda_1 = (\mu + \sigma + \rho)(R_0 - 1) < 0 \Leftrightarrow R_0 < 1.$$

Jadi, titik setimbang non endemik atau bebas narkoba stabil asimtotis jika dan hanya jika $R_0 < 1$. Hal ini menunjukkan bahwa jika syarat terpenuhi, maka tidak ada penyebaran penyalahgunaan narkoba pada populasi manusia.

b. Kestabilan Lokal di Titik Setimbang Endemik (E_1)

Kestabilan titik setimbang endemik ditentukan dengan cara yang sama dengan menentukan kestabilan titik setimbang non endemik. Langkah pertama adalah mensubstitusikan titik setimbang endemik $E_1 = (S_H^*, S_L^*, I^*, T_j^*, T_r^*, R^*)$ yang diperoleh pada matriks Jacobian yang telah diuraikan sebelumnya sehingga diperoleh matriks Jacobian di sekitar titik setimbang endemik sebagai berikut:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -y_1 & \omega_2 & -y_5 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -y_3 & -y_6 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_4 & y_7 - d_1 & y_{10} & 0 & y_{12} \\ 0 & 0 & (1-q)\sigma - y_8 & -y_{11} & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & q\sigma & \alpha_1 & -d_3 & 0 \\ 0 & 0 & \rho - y_9 & \gamma_1 & \gamma_2 & -y_{13} \end{bmatrix}$$

dengan

$$d_7 = (\eta\beta_1 I^* + \Lambda)(\mu\beta_1 I^* + \Lambda(\mu + \omega_1)) + \Lambda\omega_2(\beta_1 I^* + \Lambda)$$

$$d_8 = (\mu\beta_3 I^* + \Lambda(\mu + \gamma_1))(\mu + \alpha_2 + \gamma_2) + \Lambda\alpha_1(\mu + \gamma_2)$$

$$y_1 = \frac{\mu\beta_1 I^*}{\Lambda} + d_4$$

$$y_2 = \frac{\mu\beta_1 I^*}{\Lambda}$$

$$y_3 = \frac{\mu\eta\beta_1 I^*}{\Lambda} + d_5$$

$$y_4 = \frac{\mu\eta\beta_1 I^*}{\Lambda}$$

$$y_5 = \frac{\beta_1 \Lambda (\mu p (\eta \beta_1 I^* + \Lambda) + \Lambda \omega_2)}{d_7}$$

$$y_6 = \frac{\eta \beta_1 \Lambda (\mu (1-p) (\beta_1 I^* + \Lambda) + \omega_1 \Lambda)}{d_7}$$

$$y_7 = \frac{\mu (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}{\Lambda r_6}$$

$$y_8 = \frac{\mu \beta_3 \sigma I^* ((\mu + \gamma_2)(1-q) + \alpha_2)}{d_8}$$

$$y_9 = \frac{\beta_2 (\gamma_1 T_j^* d_3 + \gamma_2 (q \sigma I^* + \alpha_1 T_j^*) + \rho I^* d_3)}{d_3 (\beta_2 I^* + \Lambda)}$$

$$y_{10} = \frac{\mu\beta_3 I^*}{\Lambda}$$

$$y_{11} = \frac{\mu\beta_3 I^*}{\Lambda} + d_2$$

$$y_{12} = \frac{\mu\beta_2 I^*}{\Lambda}$$

$$y_{13} = \frac{\mu\beta_2 I^*}{\Lambda} + \mu.$$

Selanjutnya untuk menentukan kestabilan titik setimbang endemik, akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian J_{E_1} diatas dengan menggunakan $\det(J_{E_1} - \lambda I) = 0$, yang diuraikan sebagai berikut :

$$\det \begin{pmatrix} -y_1 - \lambda & \omega_2 & -y_5 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -y_3 - \lambda & -y_6 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_4 & y_7 - d_1 - \lambda & y_{10} & 0 & y_{12} \\ 0 & 0 & (1-q)\sigma - y_8 & -y_{11} - \lambda & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & q\sigma & \alpha_1 & -d_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \rho - y_9 & \gamma_1 & \gamma_2 & -y_{13} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Dari sini diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda^6 + G_1\lambda^5 + G_2\lambda^4 + G_3\lambda^3 + G_4\lambda^2 + G_5\lambda + G_6 = 0 \quad (4.25)$$

Uraian lengkap G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 dan G_6 beserta perhitungan persamaan karakteristik (4.25) dapat dilihat pada Lampiran 6.

Penentuan akar-akar persamaan karakteristik (4.25) sulit dilakukan secara analitik karena koefisien dan konstanta mengandung banyak parameter yang sulit disederhanakan. Oleh sebab itu, titik setimbang endemik akan dianalisis melalui simulasi numerik menggunakan bidang fase dengan *software* MATLAB. Kode program untuk simulasi bidang fase dapat dilihat pada Lampiran 8.

Simulasi ini dilakukan dengan memberikan nilai parameter dan tiga nilai awal yang berbeda untuk setiap populasi $(S_H(0), S_L(0), I(0), T_j(0), T_r(0), R(0))$. Adapun nilai parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 4.3 sebagai berikut :

Tabel 4.3 Parameter Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

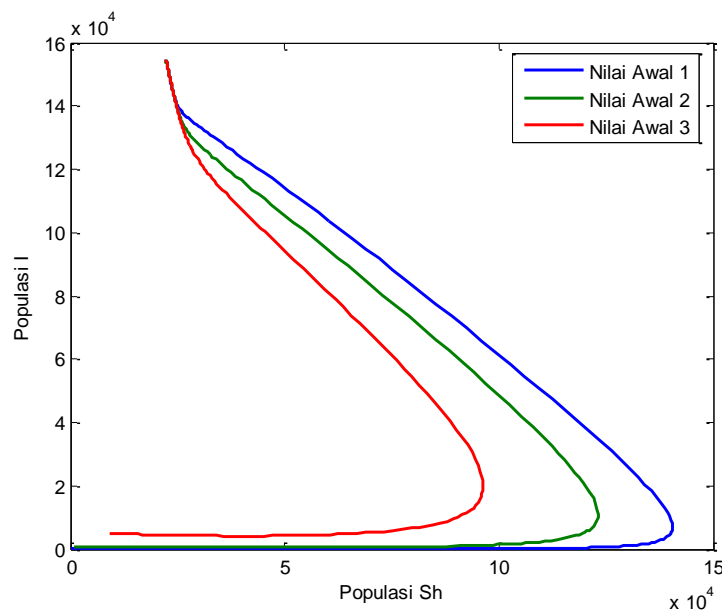
Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
Λ	5000	$\frac{orang}{tahun}$	Asumsi
p	0.352	–	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
q	0.352	–	Mushanyu dkk (2015)
β_1	0.3	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
β_2	0.15	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
β_3	0.1	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dkk (2015)
η	0.09	–	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
ω_1	0.2	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
ω_2	0.65	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
α_1	0.02961	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dkk (2015)
α_2	0.003	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dkk (2015)
μ	0.02	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
ρ	0.0082	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)
γ_1	0.01	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dkk (2015)
γ_2	0.3142	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dkk (2015)
σ	0.02827	$\frac{1}{tahun}$	Mushanyu dan Nyabadza (2018)

Simulasi model dilakukan bertujuan untuk mengetahui solusi dari setiap nilai awal yang diberikan menuju ke satu titik atau tidak. Adapun waktu yang digunakan pada simulasi ini adalah saat $t = 0$ sampai $t = 500$ tahun. Nilai awal untuk masing-masing populasi disajikan pada Tabel 4.4 berikut :

Tabel 4.4 Nilai Awal Bidang Fase Titik Setimbang Endemik E_1

Nilai awal	$S_H(0)$	$S_L(0)$	$I(0)$	$T_j(0)$	$T_r(0)$	$R(0)$	Warna
1	200	250	100	85	70	60	Biru
2	1000	3000	800	600	700	100	Hijau
3	9000	8000	5000	7000	6000	500	Merah

Dengan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 4.3 dan nilai awal pada Tabel 4.4 maka diperoleh hasil simulasi sebagai berikut :



Gambar 4.2 Simulasi Bidang Fase pada Bidang $S_H - I$ untuk Titik Setimbang Endemik Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Gambar 4.2 adalah grafik bidang fase antara populasi manusia rentan dan beresiko tinggi menyalahgunakan narkoba (S_H) dan populasi penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan (I). Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat bahwa untuk masing-masing nilai awal, jumlah kedua populasi menuju ke satu titik yaitu $(S_H, I) = (22340, 154500)$. Hal ini berarti solusi dari setiap subpopulasi pada model bergerak menuju ke titik setimbang endemik yaitu $E_1 = (S_H^*, S_L^*, I^*, T_j^*, T_r^*, R^*) = (22330 ; 11222 ; 154561.7 ; 23480 ; 6623 ; 31783.4)$. Selain itu, didapatkan juga nilai $R_0 = 4.13 > 1$. Karena pada Gambar 4.2 menunjukkan grafik bergerak menuju satu titik yaitu titik setimbang endemik serta diperoleh nilai $R_0 > 1$, maka titik setimbang endemik E_1 cenderung stabil asimtotis jika memenuhi $R_0 > 1$. Ini berarti jika syarat terpenuhi, maka terjadi penyebaran penyalahgunaan narkoba.

4.2 Analisis Sensitivitas

Pada saat menganalisis syarat kestabilan tentunya terdapat beberapa parameter yang berpengaruh cukup besar. Analisis sensitivitas bertujuan untuk menentukan parameter yang memiliki pengaruh besar pada syarat kestabilan dari titik setimbang non endemik maupun endemik. Hal tersebut dapat diketahui melalui indeks sensitivitas (e_m) dari masing-masing parameter. Adapun indeks sensitivitas parameter menurut **Chitnis, dkk (2008)** dirumuskan sebagai berikut:

$$e_m = \left(\frac{\partial R_0}{\partial m} \right) \frac{m}{R_0}$$

dengan:

m : parameter yang akan dianalisis

e_m : indeks sensitivitas parameter m

Pada skripsi ini R_0 yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1))}{(\mu + \sigma + \rho)(\mu + \omega_1 + \omega_2)}.$$

Terdapat 8 parameter yang mempengaruhi R_0 diantaranya $\beta_1, \mu, p, \omega_1, \omega_2, \eta, \sigma,$ dan ρ . Berikut diberikan contoh perhitungan indeks sensitivitas untuk parameter β_1 .

$$e_{\beta_1} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial \beta_1}\right) \frac{\beta_1}{R_0} = \frac{\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1)}{(\mu + \sigma + \rho)(\mu + \omega_1 + \omega_2)} \frac{\beta_1(\mu + \sigma + \rho)(\mu + \omega_1 + \omega_2)}{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1))} = 1.$$

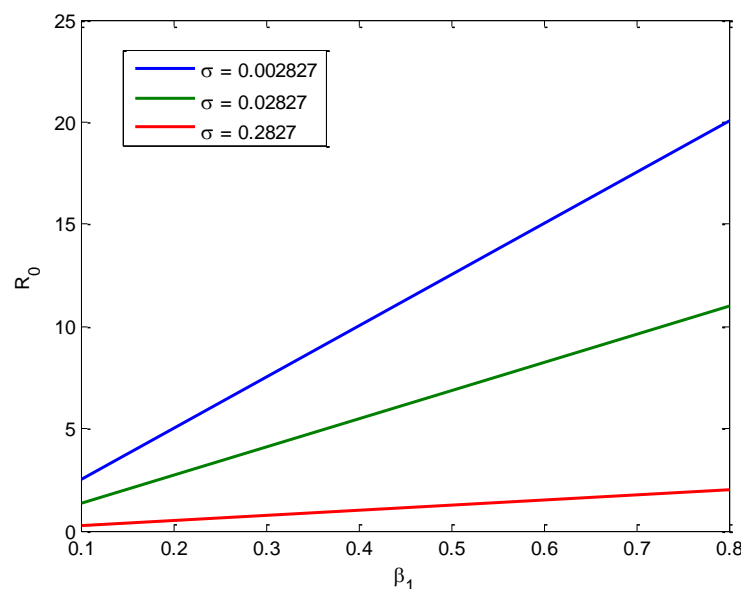
Nilai indeks sensitivitas untuk parameter lainnya diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 4.3 ke dalam indeks sensitivitas yang didapatkan. Uraian perhitungan indeks sensitivitas dapat dilihat pada Lampiran 7. Indeks sensitivitas parameter model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko dapat dilihat pada Tabel 4.5 berikut :

Tabel 4.5 Hasil Perhitungan Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
β_1	1
σ	-0.50
μ	-0.37
ω_2	0.21
ω_1	-0.20
ρ	-0.15
η	0.03
p	0.01

Berdasarkan Tabel 4.5, untuk indeks sensitivitas yang bernilai positif, jika nilai parameter dinaikkan maka nilai R_0 akan bertambah. Sebaliknya, untuk indeks sensitivitas yang bernilai negatif, jika nilai parameter dinaikkan maka nilai R_0 akan berkurang. Sebagai contoh, jika parameter β_1 bertambah sebesar 10%, maka nilai R_0 juga akan bertambah sebesar 10%. Demikian juga, jika parameter ω_2 bertambah sebesar 10%, maka nilai R_0 akan bertambah sebesar 2,1%. Namun, ketika parameter σ bertambah sebesar 10%, maka nilai R_0 akan berkurang sebesar 0,5%. Analisis tersebut berlaku pula untuk parameter $\mu, \omega_1, \omega_2, \eta$, dan ρ . Dari penjelasan analisis tersebut, parameter yang memiliki pengaruh besar dalam model adalah β_1 dan σ .

Selanjutnya, akan disimulasikan sensitivitas parameter β_1 dan σ terhadap R_0 yang masing-masing merupakan probabilitas individu rentan menjadi penyalahguna narkoba dan laju penyalahguna narkoba menjadi pasien rehabilitasi. Pada simulasi ini dipilih nilai $\sigma = 0,002827$, $\sigma = 0,02827$, dan $\sigma = 0,2827$, dengan β_1 berada pada selang $0,1 \leq \beta_1 \leq 0,8$. Kode program simulasi sensitivitas parameter β_1 dan σ terhadap R_0 dapat dilihat pada Lampiran 9. Berikut adalah hasil simulasi berupa grafik sensitivitas β_1 dan σ terhadap R_0 dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Sensitivitas β_1 Terhadap Nilai R_0 dengan Nilai σ yang berbeda

Berdasarkan Gambar 4.3, terlihat bahwa untuk ketiga nilai σ yang berbeda, semakin besar nilai σ maka semakin kecil nilai R_0 . Selain itu, semakin besar nilai β_1 maka semakin besar pula nilai R_0 . Hal ini menunjukkan bahwa indeks sensitivitas σ yang bernilai negatif mengakibatkan jika nilai σ dinaikkan maka nilai R_0 turun, sedangkan indeks sensitivitas β_1 yang bernilai positif mengakibatkan jika nilai β_1 dinaikkan maka nilai R_0 juga naik.

4.3 Kontrol Optimal Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Pada subbab ini akan dianalisis kontrol optimal untuk model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tingkat resiko beserta tipe perawatan. Sebelum menganalisis kontrol optimal, terlebih dahulu dikonstruksi bentuk kontrol optimal untuk model matematika yang dibahas. Kontrol optimal yang ditambahkan pada model untuk skripsi ini adalah upaya pencegahan berupa kampanye anti narkoba.

Berikut diberikan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tingkat resiko beserta tipe perawatan dengan adanya penambahan variabel kontrol :

$$\frac{dS_H}{dt} = p\Lambda - (1-u)\frac{\mu\beta_1IS_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2S_L \quad (4.26)$$

$$\frac{dS_L}{dt} = (1-p)\Lambda - (1-u)\frac{\mu\eta\beta_1IS_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1S_H \quad (4.27)$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-u)\frac{\mu\beta_1I(S_H+\eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2IR}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3IT_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho)I \quad (4.28)$$

$$\frac{dT_j}{dt} = (1-q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3IT_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2T_r \quad (4.29)$$

$$\frac{dT_r}{dt} = q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1T_j \quad (4.30)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1T_j + \gamma_2T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2IR}{\Lambda} - \mu R \quad (4.31)$$

dengan $u(t)$ merupakan upaya kampanye anti narkoba pada saat t . Variabel kontrol u terdapat pada persamaan (4.26) - (4.31). Pemberian variabel kontrol ini bertujuan untuk mengurangi jumlah penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk upaya tersebut. Untuk mencapai tujuan ini digunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Dengan demikian dapat dibentuk fungsi ongkos atau indeks performansi sebagai berikut :

$$\text{Min } J = \int_0^{t_f} \left(I + \frac{K}{2} u^2 \right) dt$$

dengan koefisien K adalah konstanta pembobot berupa biaya yang harus dikeluarkan untuk kampanye anti narkoba. Batas kontrol optimal berada pada $0 \leq u(t) \leq 1$, $0 \leq t \leq t_f$ serta t_f merupakan waktu akhir pengamatan.

4.3.1 Penyelesaian Kontrol Optimal Model Matematika Penyalahgunaan Narkoba dengan Memperhatikan Tipe Perawatan beserta Tingkat Resiko

Permasalahan kontrol optimal model matematika yang dibahas pada skripsi ini diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Misalkan variabel *state* (keadaan) pada model matematika disertai kontrol optimal adalah sebagai berikut:

$$x = (S_H, S_L, I, T_j, T_r, R)'$$

Adapun nilai awal dari semua populasi diasumsikan positif yang dinyatakan sebagai berikut

$$S_H(0), S_L(0), I(0), T_j(0), T_r(0), R(0) \geq 0$$

dengan batas waktu pengontrol mempunyai nilai interval $0 \leq t \leq t_f$.

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin sesuai penjelasan pada subbab 2.6, langkah pertama yang harus dilakukan adalah membentuk fungsi Hamiltonian. Berikut ini adalah fungsi Hamiltonian pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko :

$$H = I + \frac{K}{2}u^2 + \psi'(t)f(x(t), u(t), t)$$

dengan $f(x(t), u(t), t)$ adalah ruas kanan dari model yang disertai penambahan variabel kontrol seperti pada persamaan (4.26) – (4.31). Sedangkan $\psi(t)$ merupakan pengali Lagrange atau variabel *co-state* dan $\psi'(t)$ adalah *transpose* dari $\psi(t)$ sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{pmatrix} \text{ dan } \psi'(t) = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \quad \psi_5 \quad \psi_6).$$

Fungsi Hamiltonian dapat diuraikan menjadi berikut :

$$H = I + \frac{K}{2}u^2 + \psi'(t)f(x(t), u(t), t)$$

$$H = I + \frac{K}{2}u^2 +$$

$$(\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \quad \psi_5 \quad \psi_6) \begin{pmatrix} p\Lambda - (1-u)\frac{\mu\beta_1 IS_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2 S_L \\ (1-p)\Lambda - (1-u)\frac{\mu\eta\beta_1 IS_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1 S_H \\ (1-u)\frac{\mu\beta_1 I(S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2 IR}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho)I \\ (1-q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r \\ q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j \\ \gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2 IR}{\Lambda} - \mu R \end{pmatrix}$$

$$H = I + \frac{K}{2}u^2 + \psi_1 \left[p\Lambda - (1-u)\frac{\mu\beta_1 IS_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1)S_H + \omega_2 S_L \right] + \psi_2 \left[(1-p)\Lambda - (1-u)\frac{\mu\eta\beta_1 IS_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1 S_H \right] + \psi_3 \left[(1-u)\frac{\mu\beta_1 I(S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_2 IR}{\Lambda} + \frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho)I \right] + \psi_4 \left[(1-q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3 IT_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r \right] + \psi_5 \left[q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j \right] + \psi_6 \left[\gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2 IR}{\Lambda} - \mu R \right].$$

Selanjutnya untuk memperoleh u yang optimal, maka fungsi Hamiltonian harus memenuhi kondisi stasioner yaitu $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ dengan uraian sebagai berikut :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$Ku + \frac{\psi_1 \mu \beta_1 I S_H}{\Lambda} + \frac{\psi_2 \mu \eta \beta_1 I S_L}{\Lambda} - \frac{\psi_3 \mu \beta_1 I (S_H + \eta S_L)}{\Lambda} = 0$$

$$u = \frac{\mu \beta_1 I (-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3 (S_H + \eta S_L))}{K\Lambda}$$

Batas kontrol optimal berada pada $0 \leq u(t) \leq 1$, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan nilai u yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u^* \leq 0 \\ \frac{\mu \beta_1 I (-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3 (S_H + \eta S_L))}{K\Lambda} & \text{untuk } 0 < u^* < 1 \\ 1 & \text{untuk } u^* \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan kemungkinan diatas, maka diperoleh nilai u^* yang optimal sebagai berikut :

$$u^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\mu \beta_1 I (-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3 (S_H + \eta S_L))}{K\Lambda} \right) \right) \quad (4.32)$$

Langkah berikutnya adalah menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* karena dalam pengontrol u masih terdapat variabel *state* dan *co-state*.

Berikut adalah penyelesaian persamaan *state* yang diperoleh dari $\frac{\partial H}{\partial \psi}$:

$$\dot{S}_H = \frac{\partial H}{\partial \psi_1} = p\Lambda - (1-u) \frac{\mu \beta_1 I S_H}{\Lambda} - (\mu + \omega_1) S_H + \omega_2 S_L$$

$$\dot{S}_L = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = (1-p)\Lambda - (1-u) \frac{\mu \eta \beta_1 I S_L}{\Lambda} - (\mu + \omega_2) S_L + \omega_1 S_H$$

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \psi_3} = (1-u) \frac{\mu \beta_1 I (S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\mu \beta_2 I R}{\Lambda} + \frac{\mu \beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \sigma + \rho) I$$

$$\dot{T}_j = \frac{\partial H}{\partial \psi_4} = (1 - q)\sigma I - \frac{\mu\beta_3 I T_j}{\Lambda} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r$$

$$\dot{T}_r = \frac{\partial H}{\partial \psi_5} = q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j$$

$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial \psi_6} = \gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\mu\beta_2 I R}{\Lambda} - \mu R .$$

Berikut ini adalah penyelesaian persamaan *co-state* yang diperoleh dari $-\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial S_H} = -\left[-\psi_1(1 - u)\frac{\mu\beta_1 I}{\Lambda} - \psi_1(\mu + \omega_1) + \psi_2\omega_1 + \psi_3(1 - u)\frac{\mu\beta_1 I}{\Lambda}\right]$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial S_L} = -\left[\psi_1\omega_2 - \psi_2(1 - u)\frac{\mu\eta\beta_1 I}{\Lambda} - \psi_2(\mu + \omega_2) + \psi_3(1 - u)\frac{\mu\beta_1 I\eta}{\Lambda}\right]$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial I} = & -\left[1 - \psi_1(1 - u)\frac{\mu\beta_1 S_H}{\Lambda} - \psi_2(1 - u)\frac{\mu\beta_1 \eta S_L}{\Lambda} + \psi_3(1 - \right. \\ & \left. u)\frac{\mu\beta_1(S_H + \eta S_L)}{\Lambda} + \frac{\psi_3\mu\beta_2 R}{\Lambda} + \frac{\psi_3\mu\beta_3 T_j}{\Lambda} - \psi_3(\mu + \sigma + \rho) + (1 - \right. \\ & \left. q)\sigma\psi_4 - \frac{\mu\beta_3\psi_4 T_j}{\Lambda} + q\sigma\psi_5 + \rho\psi_6 - \frac{\mu\beta_2\psi_6 R}{\Lambda}\right] \end{aligned}$$

$$\dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial T_j} = -\left[\frac{\psi_3\mu\beta_3 I}{\Lambda} - \frac{\mu\beta_3\psi_4 I}{\Lambda} - \psi_4(\mu + \alpha_1 + \gamma_1) + \psi_5\alpha_1 + \psi_6\gamma_1\right]$$

$$\dot{\psi}_5 = -\frac{\partial H}{\partial T_r} = -[\psi_4\alpha_2 - \psi_5(\mu + \alpha_2 + \gamma_2) + \psi_6\gamma_2]$$

$$\dot{\psi}_6 = -\frac{\partial H}{\partial R} = -\left[\frac{\psi_3\mu\beta_2 I}{\Lambda} - \frac{\psi_6\mu\beta_2 I}{\Lambda} - \psi_6\mu\right].$$

Dari persamaan *state* dan *co-state* akan diperoleh nilai variabel *state* dan *co-state* yang selanjutnya disubstitusikan pengontrol u^* . Berikutnya mensubstitusikan persamaan (4.32) ke dalam persamaan *state* untuk memperoleh bentuk solusi yang optimal sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{S}_H = p\Lambda - \left(1 - \min\left(1, \max\left(0, \frac{\mu\beta_1 I(-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3(S_H + \eta S_L))}{K\Lambda}\right)\right)\right) \frac{\beta_1 I S_H}{N} - (\mu + \\ \omega_1)S_H + \omega_2 S_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_L &= (1-p)\Lambda - \left(1 - \min\left(1, \max\left(0, \frac{\mu\beta_1 I(-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3(S_H + \eta S_L))}{K\Lambda}\right)\right)\right) \frac{\eta\beta_1 I S_L}{N} - \\ &\quad (\mu + \omega_2)S_L + \omega_1 S_H \\ \dot{I} &= \left(1 - \min\left(1, \max\left(0, \frac{\mu\beta_1 I(-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3(S_H + \eta S_L))}{K\Lambda}\right)\right)\right) \frac{\beta_1 I(S_H + \eta S_L)}{N} + \frac{\beta_2 I R}{N} + \\ &\quad \frac{\beta_3 I T_j}{N} - (\mu + \sigma + \rho)I \\ \dot{T}_j &= (1-q)\sigma I - \frac{\beta_3 I T_j}{N} - (\mu + \alpha_1 + \gamma_1)T_j + \alpha_2 T_r \\ \dot{T}_r &= q\sigma I - (\mu + \alpha_2 + \gamma_2)T_r + \alpha_1 T_j \\ \dot{R} &= \gamma_1 T_j + \gamma_2 T_r + \rho I - \frac{\beta_2 I R}{N} - \mu R.\end{aligned}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, untuk memperoleh nilai S_H, S_L, I, T_j, T_r dan R dari bentuk u^* yang optimal, harus ditentukan penyelesaian persamaan *state* dan *co-state*. Namun persamaan tersebut berbentuk non linier yang sulit diselesaikan secara analitik, sehingga akan diselesaikan secara numerik.

4.4 Simulasi dan Interpretasi Model dengan Adanya Variabel Kontrol

Penyelesaian secara numerik untuk masalah kontrol optimal dapat dilakukan dengan mensimulasikan permasalahan kontrol optimal menggunakan program DOTcvp pada *software* MATLAB. Simulasi ini juga bertujuan untuk mengetahui pengaruh pemberian upaya kampanye anti narkoba terhadap populasi yang akan diminimalkan. Pada program DOTcvp persamaan *state* didefinisikan sebagai $S_H = y(1), S_L = y(2), I = y(3), T_j = y(4), T_r = y(5), R = y(6)$, sedangkan indeks performansi didefinisikan sebagai *state* baru yaitu $y(7)$ dan variabel kontrol $u(1)$.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam mensimulasikan kontrol optimal dengan menggunakan program DOTcvp adalah sebagai berikut:

Langkah 1

Pendefinisian permasalahan (*Initialization*)

Date.name = menginputkan nama atau judul permasalahan

Langkah 2

Melakukan pengaturan untuk IVP (*Initial Value Problem*) :

Data.odes.res(1) = (memasukkan fungsi dinamik sistem)

Data.odes.t0 = (memasukkan nilai awal)

Data.odes.tf = (memasukkan waktu akhir)

Langkah 3

Mendefinisikan NLP (*Non Linear Problem*) :

Data.nlp.RHO = (memasukkan jumlah interval waktu)

Data.nlp.problem = (pilih fungsi min/max)

Data.nlp.J0 = (memasukkan indeks performansi)

Data.nlp.u0 = (memasukkan nilai awal pengontrol)

Data.nlp.ub = (memasukkan batas atas pengontrol)

Data.nlp.lb = (memasukkan batas bawah pengontrol)

Langkah 4

Memanggil fungsi utama

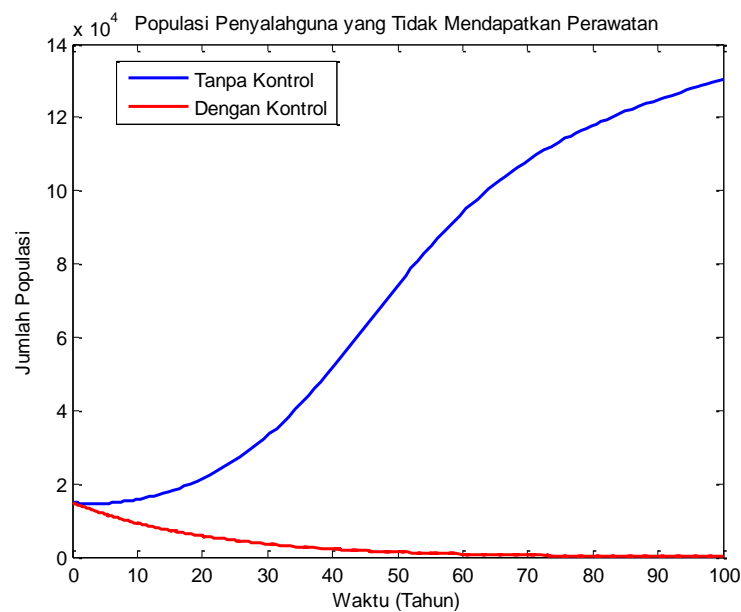
[data]=dotcvp_main(data)

Pada simulasi numerik ini diberikan nilai awal untuk semua populasi yaitu $S_H(0) = 20000$, $S_L(0) = 25000$, $I(0) = 15000$, $T_j(0) = 5000$, $T_r(0) = 10000$, $R(0) = 3000$. Simulasi ini dilakukan untuk $t = 0$ sampai $t = 100$ tahun. Nilai parameter yang digunakan merujuk pada Tabel 4.3. Konstanta pembobot untuk pemberian upaya kampanye anti narkoba adalah $K = 10$.

Simulasi kontrol optimal ini dilakukan dengan mengamati populasi penyalahguna yang tidak mendapatkan perawatan untuk dibandingkan dengan simulasi pada saat belum diberi upaya kampanye anti narkoba. Karena pada skripsi ini hanya terdapat satu penambahan variabel kontrol, maka simulasi dilakukan dengan satu

skenario yaitu saat ada upaya kampanye anti narkoba ($u \neq 0$). Kode program model tanpa kontrol dapat dilihat pada Lampiran 10, sedangkan kode program model dengan kontrol dapat dilihat pada Lampiran 11.

Hasil simulasi perbandingan pada populasi penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan, penyalahguna yang mendapatkan perawatan rawat inap, serta penyalahguna yang mendapatkan perawatan rawat jalan, tanpa dan dengan adanya penambahan variabel kontrol adalah sebagai berikut :



Gambar 4.4 Simulasi Perbandingan Jumlah Penyalahguna Narkoba yang Tidak Mendapatkan Perawatan (I)

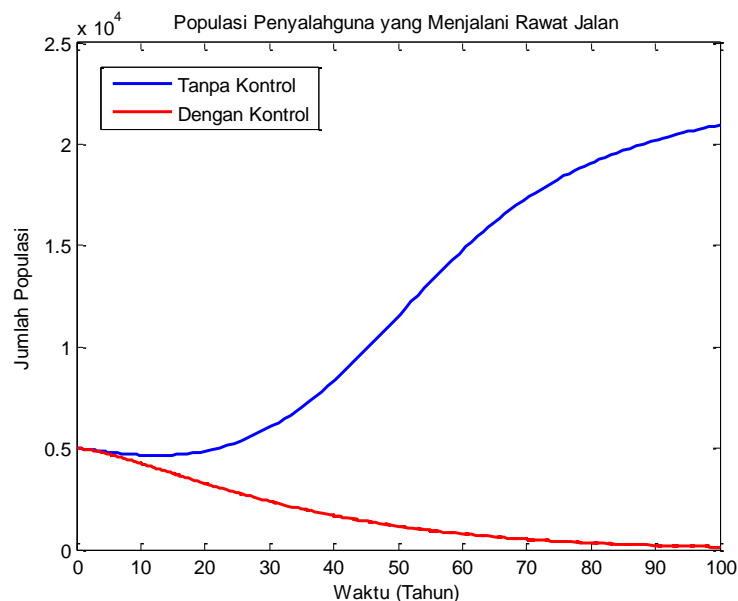
Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat bahwa terdapat perbedaan yang cukup besar antara jumlah populasi tanpa diberi upaya kontrol dan jumlah populasi setelah diberi upaya kontrol. Jumlah populasi tanpa diberi kontrol turun hingga tahun ke-7 kemudian naik terus hingga akhir pengamatan. Namun saat diberi upaya kampanye anti narkoba, jumlah populasi penyalahguna yang tidak dirawat selalu menurun dari awal pengamatan hingga akhir pengamatan dan terlihat bahwa jumlah populasinya menuju nol. Hal ini menunjukkan bahwa upaya kampanye anti narkoba memberikan efek yang signifikan untuk menurunkan jumlah penyalahguna yang tidak mendapatkan

perawatan sesuai dengan tujuan pemberian kontrol optimal. Berikut ini diberikan tabel perbandingan jumlah penyalahguna yang tidak mendapatkan perawatan tanpa dan dengan adanya penambahan variabel kontrol yang diamati pada akhir pengamatan :

Tabel 4.6 Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Tidak Mendapatkan Perawatan (I) Pada Akhir Pengamatan

Skenario	Jumlah Populasi I
Tanpa Kontrol	130.300
Dengan Kontrol	97

Berdasarkan Tabel 4.6 terlihat bahwa kedua skenario memiliki perbedaan jumlah populasi akhir yang sangat besar. Hal ini mempertegas bahwa pemberian kontrol memberikan efek yang besar untuk meminimalkan jumlah penyalahguna narkoba yang tidak mendapatkan perawatan.



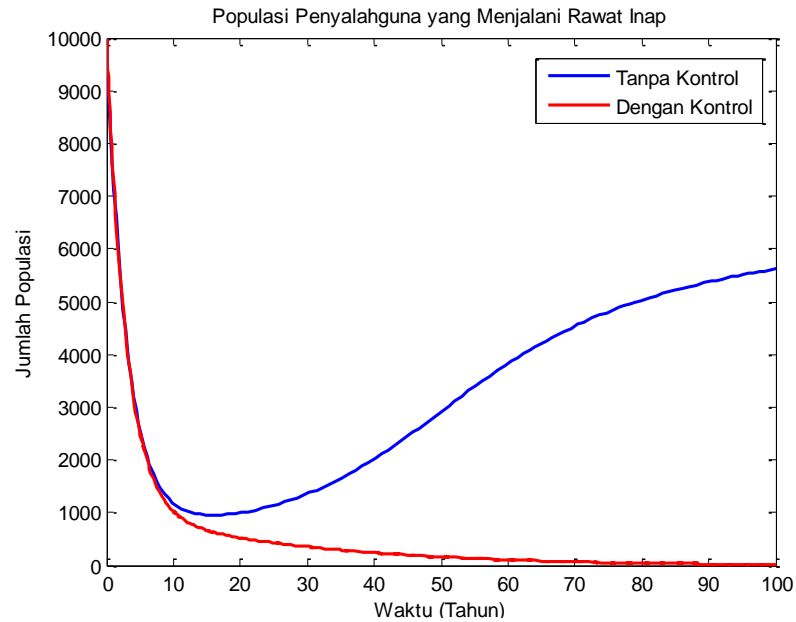
Gambar 4.5 Simulasi Perbandingan Jumlah Penyalahguna Narkoba yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Jalan (T_j)

Berdasarkan Gambar 4.5, jumlah populasi tanpa diberi kontrol turun hingga tahun ke-21 kemudian naik terus hingga akhir pengamatan. Namun saat diberi upaya kampanye anti narkoba, jumlah populasi selalu menurun dari awal pengamatan hingga akhir pengamatan. Hal ini menunjukkan bahwa upaya kampanye anti narkoba memberikan efek yang signifikan untuk menurunkan jumlah penyalahguna. Berikut ini diberikan tabel perbandingan jumlah penyalahguna yang mendapatkan perawatan berupa rawat jalan tanpa dan dengan adanya penambahan variabel kontrol yang diamati pada akhir pengamatan :

Tabel 4.7 Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Jalan (T_j) Pada Akhir Pengamatan

Skenario	Jumlah Populasi T_j
Tanpa Kontrol	20.950
Dengan Kontrol	135

Berdasarkan Tabel 4.7 terlihat bahwa kedua skenario memiliki perbedaan jumlah populasi akhir yang sangat besar. Hal ini mempertegas bahwa pemberian kontrol memberikan efek yang besar untuk meminimalkan jumlah penyalahguna narkoba.



Gambar 4.6 Simulasi Perbandingan Jumlah Penyalahguna Narkoba yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Inap (T_r)

Berdasarkan Gambar 4.6, jumlah populasi tanpa diberi kontrol turun drastis hingga tahun ke-17 kemudian naik secara perlahan hingga akhir pengamatan. Saat diberi upaya kampanye anti narkoba, jumlah populasi selalu menurun dari awal pengamatan hingga akhir pengamatan dan menuju ke nol. Berikut ini diberikan tabel perbandingan jumlah penyalahguna yang mendapatkan perawatan berupa rawat inap tanpa dan dengan adanya penambahan variabel kontrol yang diamati pada akhir pengamatan :

Tabel 4.8 Perbandingan Jumlah Penyalahguna yang Mendapatkan Perawatan berupa Rawat Inap (T_r) Pada Akhir Pengamatan

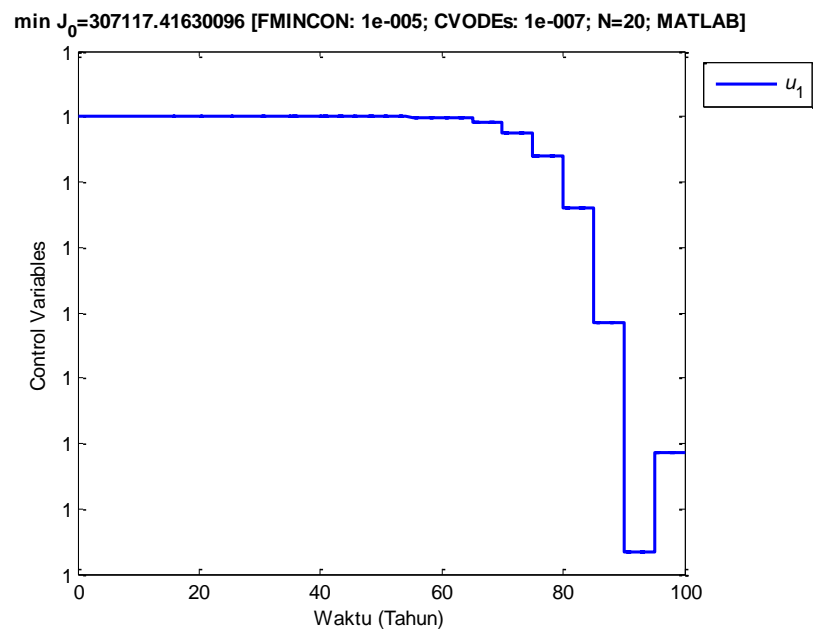
Skenario	Jumlah Populasi T_r
Tanpa Kontrol	5.620
Dengan Kontrol	17

Berdasarkan Tabel 4.8 terlihat bahwa kedua skenario memiliki perbedaan jumlah populasi akhir yang sangat besar. Hal ini mempertegas bahwa pemberian

kontrol memberikan efek yang besar untuk meminimalkan jumlah penyalahguna narkoba yang dirawat.

Berdasarkan Gambar 4.4 – 4.6 dan Tabel 4.6 – 4.8, terlihat bahwa pemberian kontrol optimal berupa upaya kampanye anti narkoba dapat meminimalkan jumlah penyalahguna narkoba baik yang tidak dirawat, dirawat jalan, maupun dirawat inap. Setelah diberi upaya kontrol, jumlah populasi penyalahguna narkoba turun dan menuju nol. Ini berarti kontrol yang diberikan memberikan efek yang signifikan.

Berikut ini adalah hasil simulasi profil kontrol untuk upaya kampanye anti narkoba :



Gambar 4.7 Profil kontrol upaya kampanye anti narkoba

Gambar 4.7 menunjukkan grafik pemberian kampanye anti narkoba hingga tahun ke-100. Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa pemberian upaya kampanye anti narkoba secara penuh yaitu 100% dilakukan hingga akhir pengamatan dengan nilai fungsi ongkos 307117.42. Ini berarti upaya kontrol dilakukan secara intensif

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko memiliki dua titik setimbang, yaitu titik setimbang non endemik atau bebas narkoba (E_0) dan titik setimbang endemik (E_1). Berdasarkan hasil analitik, titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika dan hanya jika $R_0 < 1$, sedangkan titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis jika memenuhi $R_0 > 1$, dengan nilai R_0 sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{\beta_1(\mu p + \omega_2 + \eta(\mu(1-p) + \omega_1))}{(\mu + \sigma + \rho)(\mu + \omega_1 + \omega_2)}.$$

2. Bentuk kontrol optimal pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko yang diberi kontrol berupa upaya kampanye anti narkoba adalah

$$u^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\mu \beta_1 I(-\psi_1 S_H - \psi_2 \eta S_L + \psi_3 (S_H + \eta S_L))}{K \Lambda} \right) \right)$$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik pada model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan tipe perawatan beserta tingkat resiko sebelum dan sesudah diberi kontrol, menunjukkan bahwa upaya kampanye anti narkoba memberikan efek yang signifikan untuk menurunkan jumlah penyalahguna narkoba sesuai dengan tujuan pemberian kontrol optimal.

5.2 **Saran**

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan model matematika penyalahgunaan narkoba dengan memperhatikan adanya populasi pengedar narkoba. Hal ini dikarenakan pengedar narkoba memiliki pengaruh yang besar untuk dinamika penyebaran narkoba sehingga terdapat potensi yang lebih besar adanya keendemikan penyalahgunaan narkoba.